ISBN 978-966-184-339-3

О. О. ЄМЕЦЬ

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

ЧАСТИНА 1

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ПОЛТАВА
2019

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)
Кафедра математичного моделювання
та соціальної інформатики

О. О. Ємець

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Частина 1

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Полтава
ПУЕТ
2019

УДК 519.852(075.8)
Є60

Рекомендувала до видання, розміщення в електронній бібліотеці та впровадження в освітній процес вчена рада Вищого навчального закладу Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі», протокол № 2 від 28 лютого 2018 р.

Автор:

О. О. Ємець, д. ф.-м. н., професор кафедри математичного моделювання та соціальної інформатики Вищого навчального закладу Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі».

Рецензенти:

Т. М. Барболіна, к. ф.-м. н., доцент, завідувач кафедри математичного аналізу та інформатики ПНПУ ім. В. Г. Короленка;

Т. О. Кононович, к. ф.-м. н., доцент кафедри математичного аналізу та інформатики ПНПУ ім. В. Г. Короленка.

Ємець О. О.

Є60 Методи оптимізації та дослідження операцій : навчальний посібник / О. О. Ємець. – Полтава : ПУЕТ, 2019. – Ч. 1. – 245 с. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).

ISBN 978-966-184-339-3

Посібник формує у студентів навички математичного моделювання задачами лінійної оптимізації. Студент зможе будувати лінійні моделі прикладних задач, розв'язувати задачі лінійного програмування симплекс-методом, модифікованим та двоїстим симплекс-методом, М-методом. Наведено індивідуальні розрахунково-графічні роботи та тести до всіх тем, які дозволяють закріпити отримані компетенції. Базується на дисциплінах «Дискретна математика», «Алгебра та геометрія». Для студентів спеціальності 122 Комп'ютерні науки.

УДК 519.852(075.8)

ISBN 978-966-184-339-3

ВСТУП

Дисципліна «Методи оптимізації та дослідження операцій» вивчається студентами спеціальності 122 Комп'ютерні науки й розроблена згідно з освітньою програмою та навчальним планом бакалавра.

Предметом дисципліни «Методи оптимізації та дослідження операцій» є моделі й методи теорії оптимізації та дослідження операцій.

Основною метою вивчення дисципліни є: формування особистості студентів як спеціалістів, розвиток їх інтелекту та здібностей до логічного й алгебраїчного мислення на основі систематичного засвоєння засобів оптимізації та дослідження операцій; формування у студентів уміння застосовувати сучасні методи математичного моделювання та теорії оптимізації в науці, економіці й інших галузях.

Головні завдання дисципліни: ознайомлення студентів з основними поняттями та засобами методів оптимізації й дослідження операції як інструментарію для подання та обробки інформації в комп'ютерах; формування у студентів навичок математичного моделювання задачами оптимізації та розв'язування цих задач.

У результаті вивчення дисципліни студент повинен набути

знання:

– теорії та методів розв'язання задач лінійного програмування;

– властивостей транспортної задачі (ТЗ) та методів її розв'язання;

– основ теорії потоків у мережах;

– методів розв'язання задач цілочисельного та дискретного програмування;

– основ теорії та методів нелінійного програмування;

– основних понять теорії матричних ігор;

уміння:

– будувати лінійні моделі прикладних задач, приводити їх до канонічного вигляду;

– розв'язувати задачі лінійного програмування за допомогою симплекс-методу та двоїстого симплекс-методу;

– аналізувати та розв'язувати задачі лінійного програмування транспортного типу;

– розв'язувати задачі цілочисельного й дискретного програмування методами Гоморі, гілок та меж;

– розв'язувати задачі нелінійного програмування градієнтними методами та їх модифікаціями;

– знаходити сідлові точки та оптимальні розв'язки матричних ігор у змішаних стратегіях;

уявлення:

– про можливості, напрямки й перспективи застосування теорії оптимізації та дослідження операцій.

Вивчення дисципліни базується на знаннях, отриманих студентами під час вивчення таких дисциплін, як «Дискретна математика», «Алгебра та геометрія», «Математичний аналіз», «Програмування», «Інформатика», «Теорія ймовірностей та математична статистика».

КУРС ЛЕКЦІЙ

Лекції 1–2. Вступ у методи оптимізації і дослідження операцій

1. Предмет методів оптимізації та дослідження операцій

Теорія оптимізації представляє собою математичну дисципліну, що займається розробкою й дослідженням екстремальних задач і методів їх розв’язування.

У загальному вигляді математична постановка екстремальної задачі полягає у визначенні найбільшого або найменшого значення функції $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ (яку називають ***цільовою***) за умов

$$g_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \le b_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{1}$$

де f, g_i – задані функції;

b_i – дійсні числа.

Синонімом теорії оптимізації є термін «математичне програмування», який склався історично й нині його не можна вважати вдалим (порівняно із програмуванням на ЕОМ). Як синоніми використовуються назви «оптимальне програмування», «методи оптимізації». Програмування у словосполученні «математичне програмування» означає, з одного боку, що в результаті розв’язування задачі одержується оптимальне (екстремальне) значення цільової функції, але для виходу на цей розв’язок потрібно виконати ряд дій по певній ***програмі.*** З іншого боку, одержаний розв’язок з економічної точки зору можна часто інтерпретувати, як ***програму*** діяльності підприємства (фірми), при виконанні якої цільова функція (яка відображає ефективність роботи) досягає екстремуму.

Залежно від властивостей функцій f та g_i теорію оптимізації (математичне програмування) можна розглядати як ряд самостійних дисциплін, що займаються вивченням і розробкою методів розв’язання окремих класів задач.

Перш за все, задачі математичного програмування поділяються на задачі ***лінійного програмування*** і ***нелінійного програмування.*** При цьому, коли всі функції *f* та g_i – лінійні, то відповідна задача є задачею лінійного програмування. Лінійне програмування – найбільш досліджена частина математичного програмування, де розроблені ефективні методи, алгоритми та програми ЕОМ.

Приклад 1. Знайти найбільше значення функції

$x_1 + 2x_2$	$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$
за умов	
$x_1 \geq 0$	$g_1(x_1, x_2) = -x_1, \quad b_1 = 0$
$x_2 \geq 0$	$g_2(x_1, x_2) = -x_2, \quad b_2 = 0$
$x_1 + x_2 \leq 1$	$g_3 = x_1 + x_2, \quad b_3 = 1$

Це задача лінійного програмування.

Якщо ж хоча б одна з функцій *f,* g_i не є лінійною, то відповідна екстремальна задача є задачею нелінійного програмування.

Необхідність дослідження та розв'язання таких задач обумовлюється тим, що в економічних системах залежності, зазвичай, дуже складні й мають нелінійний характер. Приведення цих залежностей до лінійних загрублює і тим самим спрощує модель системи або явища. При цьому в деяких випадках таке спрощення не спотворює суттєво результати, що одержуються, і тому є прийнятним.

В інших випадках результати, які одержуються, настільки далекі від реальності, що застосування лінійного програмування просто виключається.

Приклад 2. Якщо у прикладі 1 $f(x_1, x_2)$ замінити на $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$, то задача стане задачею нелінійного програмування.

Серед задач нелінійного програмування найбільш вивченими є задачі ***опуклого програмування.*** Це задачі знаходження мінімуму опуклої функції, яка задана на опуклій множині (точні означення будуть зроблені пізніше, а зараз наведемо приклад).

Приклад 3. Задача опуклого програмування.

Знайти мінімум функції

$$f\left(x_1,\, x_2\right) = x_1^2 + 2x_2^2 \tag{2}$$

за умови

$$\left(x_1\right)^2 + \frac{x_2^2}{4} \le 1. \tag{3}$$

У свою чергу, серед задач опуклого програмування найкраще досліджені задачі ***квадратичного програмування,*** які одержуємо, якщо цільова функція $f\left(x_1,\, x_2\right)$ – многочлен другого ступеня, а g_i – лінійні функції.

Приклад 4. Задача квадратичного програмування. Мінімізувати функцію $f\left(x_1,\, x_2\right) = x_1^2 + 2x_2^2$ за обмежень

$g_1\left(x_1,\, x_2\right) = -x_1,\; b_1 = 0\;\; \left(\textit{тобто}\;\; x_1 \ge 0\right);$

$g_2\left(x_1,\, x_2\right) = -x_2,\; b_2 = 0\;\; \left(\textit{тобто}\;\; x_1 \ge 0\right);$

$g_3\left(x_1,\, x_2\right) = x_1 + x_2,\; b_3 = 1\;\; \left(\textit{тобто}\;\; x_1 + x_2 \le 1\right).$

Окремими класами задач математичного програмування є задачі ***цілочислової, дискретної, комбінаторної, параметричної*** та ***дробово-лінійної оптимізації***.

У задачах цілочислової оптимізації всі або деякі невідомі можуть приймати тільки цілочислові значення.

У задачах комбінаторної оптимізації сукупність усіх або деяких невідомих є елементами певних комбінаторних множин (сполучень, переставлень, розміщень тощо).

У моделях реальних економічних систем коефіцієнти цільової функції або обмежувальних умов можуть бути не сталими величинами, а змінюватися залежно від різних факторів за період часу, для якого розв’язується екстремальна задача: формування виробничої програми для підприємства, на якому ведеться реконструкція; визначення додаткових капітальних вкладень за умови заміни технологічних процесів обробки деталей (виробів) тощо. Моделі, що адекватно описують такі реальні ситуації, належать до задач параметричної оптимізації.

У задачах дробово-лінійної оптимізації цільова функція є відношенням двох лінійних функцій, а функції g_i, що визначають область можливих змін змінних, також лінійні.

Виділяють окремі класи задач ***стохастичного*** й ***динамічного*** програмування.

Якщо в цільовій функції $f\left(x_1,...,x_n\right)$ або в функціях $g_i\left(x_1,...,x_n\right)$ є випадкові величини, то така задача належить до стохастичного програмування.

У задачах динамічного програмування необхідно розглядати процес виробництва або керівництва (управління) у просторі, або в часі, тобто в розвитку. При цьому процедура обчислення реалізується згідно зі своєрідною схемою: увесь процес пошуку оптимального розв’язку представляє собою визначену послідовність кроків, для кожного з яких знаходиться оптимальний розв’язок, причому оптимальність визначається впливом на наступні кроки на основі так званого принципу оптимальності Белмана. Сам процес розв’язку є багатокроковим. При цьому одна задача з багатьма змінними замінюється багатьма задачами з невеликим числом змінних (або навіть з однією), що суттєво зменшує обсяг обчислень.

Обмеженнями для застосування методів динамічного програмування є такі умови: підсумковий оптимум є сумою оптимальних розв’язків кожного з виділених кроків, а стан системи в момент часу, що розглядається, визначає вибір оптимального розв’язку, причому на вибір цього розв’язку не впливають стани системи в попередні моменти часу.

Предмет дослідження операцій

Проблеми планування й управління (прийняття рішень) організаційними системами займають усе більш широке місце в наукових дослідженнях. До *організаційних систем* належать промислові підприємства, виробничі об'єднання, економіка цілої держави, будь-які організації.

З одного боку, *надзвичайне ускладнення організаційних форм* людської діяльності, а з іншої – поява *можливості розв'язку виникаючих проблем на базі сучасних ЕОМ* стимулювали розвиток нової наукової дисципліни *«Теорія дослідження операцій».*

Що таке ***дослідження операцій?*** Нині немає загальноприйнятого усталеного означення цієї дисципліни, та й навряд чи воно потрібно, оскільки рамки цієї науки постійно розширюються, а таке означення повинно було б їх строго обмежити. Багато хто сходиться на тому, що це – ***науковий підхід до підготовки та вибору оптимальних рішень.*** Приймати рішення властиво тільки людині, оскільки рішення передбачає свідомий вибір із декількох можливих наслідків.

Існують *природні* та *штучні* явища, останні з яких неможливі без людської діяльності. Часто замість штучних явищ кажуть про економічні явища, економіку, явища організації. Якщо фізика має справу із природними явищами, то ***дослідження операцій вивчає штучні явища, явища організації.*** Суттєві застосування фізики виникли тоді, коли люди навчилися кількісно оцінювати явища природи. Для цього було два шляхи дослідження: один має підґрунтя на вимірюванні та експерименті, другий – на математичній дедукції за допомогою математичних моделей. Моделі й закони математичної фізики дозволили з більшим ступенем довершеності піддати аналізу багато природних явищ, зробити можливим їх передбачення.

В аналогічному стані знаходяться дослідники, які цікавляться ***явищами організації,*** але методика фізичних вимірів розроблена краще, ніж методика вимірів, які стосуються економіки. Для цього є серйозні причини: фізичний експеримент можна багато разів повторювати, а експеримент, що належить до явищ організації, дуже дорогий. Наприклад, неможливо за замовленням відтворювати рух автотранспорту на дорогах. Тому звичайно в явищах організації обмежуються статистичними вимірюваннями, на основі яких будується математична модель явища, що відображає основні співвідношення між його елементами, звідси та виключна увага і значення, які повинні приділятися в дослідженні операцій статистиці.

Отже, можна також сказати, що ***дослідження операцій – це теорія застосування кількісних методів аналізу у процесі прийняття рішень в усіх сферах цілеспрямованої діяльності.*** У цьому означенні підкреслюється використання кількісних, тобто математичних методів у теорії дослідження операцій. Але в цій теорії важливу роль відіграють і методичні, і прикладні питання.

Основним методом теорії дослідження операцій є метод математичного моделювання, який, зазвичай, передбачає використання ЕОМ.

Розглянемо поняття і визначення, які використовуються в теорії і практиці дослідження операцій. У кожному конкретному випадку вони потребують відповідної інтерпретації, що відображає сутність явищ, які вивчаються.

Під *операцією* розуміється сукупність дій, що направлені на досягнення певної мети. Доти, доки мета не визначена, немає сенсу казати про операції. Наприклад, ставиться мета освоїти випуск за певний заданий період часу нової моделі автомобіля з визначеними характеристиками, мінімізував при цьому витрати на капітальні вкладення. Відповідна операція може включати в себе розробку технічного проекту, виготовлення дослідних зразків та їх випробування, наладку нової технологічної лінії, організацію поставок комплектувальних виробів, навчання кадрів новим видам робіт і створення організаційної структури нового підрозділу, пробний початок виробництва й запуск автомобіля в серію.

Наявність цілі в операції припускає існування активних учасників, які переслідують цю мету і називаються оперуючою стороною. Так, у наведеному прикладі операції оперуючою стороною природно вважати керівництво підприємства.

В оперуючій стороні зручно виділити учасника, який називається *дослідником операцій.* Дослідник операцій, зазвичай, сам не приймає рішення щодо вибору способів дій, а тільки допомагає в цьому оперуючій стороні, дає наукову основу для прийняття рішень. Потрібно мати на увазі, що розгляд усіх питань дослідження операцій слід робити з позиції дослідника операцій. Основним інструментом дослідника операцій є *економіко-математична модель*, яка представляє собою математичний опис економічного процесу, явища або об'єкта. Незважаючи на велику кількість різних видів економіко-математичних моделей, існують найважливіші елементи, які є практично в усіх моделях. Так, у будь-якій операції для досягнення поставленої мети оперуюча сторона повинна мати деякий *запас ресурсів* (наприклад, технічне обладнання, мінеральну сировину, обчислювальну техніку тощо). Цей елемент у математичній моделі операції прийнято називати *активними засобами* проведення операції. Очевидно, що оперуюча сторона повинна мати певну свободу вибору активних засобів.

Дії, направлені *на досягнення поставленої мети,* представляють собою допустимі *способи використання* активних засобів. Цей елемент математичної моделі називається *стратегією*_оперуючої сторони та звичайно позначається *змінною х,* яка може бути скалярною величиною, вектором чи функцією. Серед допустимих стратегій, зазвичай, є й *оптимальні,* тобто найкращі. Прикладом стратегії може слугувати план розподілу сировини та трудових ресурсів між наявними технологічними процесами.

Стратегії є контрольованими факторами, через які оперуюча сторона управляє перебігом операції. Але, зазвичай, існують фактори, які не піддаються керуванню, вони впливають на хід операції. Цими факторами оперуюча сторона не розпоряджається, наприклад погодні умови. *Некеровані фактори* позначимо *змінною у.*

Опис операції повинен включати відомості про інформованість оперуючої сторони, про значення некерованих факторів. З цієї точки зору некеровані фактори можна *розділити на детерміновані й випадкові.*

Детерміновані фактори – це фактори, про які відомо, що вони не залежать від імовірносних величин. Під цими факторами розуміють не тільки фіксовані значення, але й функції, зокрема обмеження, що накладені на елементи розв'язку (стратегії).

Випадкові фактори – це фактори, які залежать від імовірнісних величин, або ті, дія яких не достатньо вивчена. Вони, зазвичай, не відомі спочатку, але для них відомі або закони розподілу, або клас можливих законів розподілу, або можливих значень цих факторів.

Для порівняння стратегій (рішень) і вибору найкращої з них формується *критерій ефективності (цільова функція),* який представляється як функція *стратегій x і некерованих факторів y:* $z = f(x, y)$. Приклади критеріїв ефективності: повна вартість перевезення зі складів до місць призначення (у транспортній задачі), імовірність своєчасного обслуговування заявки на ремонтній ділянці (в задачах масового обслуговування), сумарні витрати (на закупівлю, збереження тощо) в задачах управління запасами.

Отже, можна навести більш точне поняття *математичної моделі операції:* це формальне співвідношення, що встановлює зв'язок прийнятого критерію ефективності з діючими факторами операції.

Наведені означення дозволяють сформулювати *основну задачу дослідження операцій:* знайти в рамках прийнятої моделі такі рішення (стратегії), яким відповідають екстремальні значення критерію ефективності (оптимальності). Тобто, *критерій стає еквівалентом цілі операції* в цій моделі, а сукупність умов, що забезпечують екстремальні значення критерію, визначає оптимальні стратегії оперуючої сторони.

2. Математичні моделі економічних задач. Оптимізаційні моделі

Означення. Математична модель – це система математичних співвідношень, яка описує процес або явище, що вивчається, досліджується [1, т. 2, с. 42].

Для складання математичної моделі можна використовувати будь-які математичні засоби – мову диференціальних або інтегральних рівнянь, теорію множин, абстрактну алгебру, математичну логіку, теорію ймовірностей тощо.

Процес складання математичної моделі називається ***математичним моделюванням.*** Це найзагальніший і такий, що найбільше застосовується в науці метод дослідження.

У багатьох випадках під час побудови математичної моделі економічної системи чи явища виникає питання досягнення деяким критерієм (функцією) оптимального значення. Такі моделі називаються ***оптимізаційними.***

Розглянемо декілька прикладів формалізації ситуацій прийняття рішень, які належать до математичних моделей лінійного програмування.

Задача 1. Задача Канторовича про верстати.

Виріб, що випускається, складається із двох металевих деталей, обробка яких може бути виконана на різних верстатах: фрезерному, револьверному та автоматичному револьверному. Потрібно закріпити верстати за деталями так, щоб одержувати за годину максимальну кількість виробів.

Щоб сформулювати задачу, потрібна інформація про кількість верстатів, їх продуктивність за кожною деталлю окремо. Нехай ця інформація представлена в табл. 1.

Таблиця 1

Тип верстата	**Кількість верстатів (шт.)**	**Продуктивність верстата (дет./год)**	
		деталь № 1	**деталь № 2**
Фрезерний	3	10	20
Револьверний	3	20	30
Автоматичний револьверний	1	30	80

Перш ніж скласти математичну модель, потрібно зрозуміти, що є допустимою дією і на які елементарні дії її можна поділити. У цьому разі дія – план розподілу, що характеризується кількістю верстатів кожного типу, який закріплено за кожною деталлю. Згідно з цим уведемо сукупність невідомих

$x=\left\{x_{ij}, i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,2}\right\}$, де x_{ij} – кількість верстатів виду i, що обробляє деталь j. Сукупність змінних x повністю характеризує дію. За яких умов змінні x_{ij} відповідатимуть ***допустимій*** дії, тобто плану, що відповідає заданим ресурсам (верстатам), з вимогами комплектації (*деталей № 1 і 2 повинно бути однакова кількість*)? Очевидно, що

$$\begin{aligned} &x_{11}+x_{12}\le 3; \\ &x_{21}+x_{22}\le 3; \\ &x_{31}+x_{32}\le 1, \end{aligned} \tag{4}$$

(обмеження по верстатам);

$$10x_{11}+20x_{21}+30x_{31}=20x_{12}+30x_{22}+80x_{32} \tag{5}$$

(вимоги комплектності).

Крім цього,

$$x_{11}\ge 0;\ x_{12}\ge 0;\ x_{21}\ge 0;\ x_{22}\ge 0;\ x_{31}\ge 0;\ x_{32}\ge 0. \tag{6}$$

Зазначимо, що x_{ij} не обов'язково повинні бути цілими. Наприклад, якщо $x_{21}=2\frac{4}{5}$, це означає, що два револьверних станка випускають деталь № 1, а третій зайнятий випуском цієї деталі $\frac{4}{5}$ год.

Мета планування полягає в максимізації кількості повних витрат, тобто потрібно знайти такі змінні x_{ij}, $i=1,2,3,\ j=1,2,$ які задовольняють умовам (1.4)–(1.6) і максимізують функцію

$$f\left(x\right)=10x_{11}+20x_{21}+30x_{31}. \tag{7}$$

Одержана математична задача максимізації (7) за обмежень (4)–(6) є прикладом задачі лінійного програмування, до систематичного вивчення яких і методів їх розв'язку ми далі перейдемо.

Розглянемо деякі задачі у плануванні та управлінні, які зводяться до задач лінійного програмування.

Задача 2. Задача виробничого планування.

Деякій виробничій одиниці (заводу, цеху) потрібно визначити програму виробництва n видів ***продукції.*** Кількість видів ресурсів – m. Відома кількість кожного ресурсу b_i, $i \in J_m = \{1, 2, ..., m\}$. Технологічні можливості виробництва визначаються значеннями чисел a_{ij}, $j \in J_n$, які показують, яка кількість i-го ресурсу необхідна для випуску однієї одиниці j-го продукту. Технологія виробництва вважається лінійною, тобто вважається, що всі витрати ресурсів ростуть прямо пропорційно обсягу випуску.

Задані ціни c_j, $j \in J_n$ на кожен вид продукту, потрібно визначити програму виробництва, що максимізує вартість виробленої продукції.

Побудова математичної моделі

Програма виробництва – вектор $x = (x_1, ..., x_n)$, x_j – кількість продукту j, що буде вироблено, це змінна задачі, $\forall_j \in J_n$.

Цільова функція:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j .$$

Знайти $\langle z^*, x^* \rangle$:

$$z^* = \max_{x \in R^n} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j ; \tag{8}$$

$$x^* = arg \max_{x \in R^n} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{9}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \forall i \in J_m; \tag{10}$$

$$x_j \ge 0 \quad \forall_j \in J_n. \tag{11}$$

Хоч розглянута задача та її модель (1.8)–(1.11) і відображає певні риси реального виробництва, вона є сильно ідеалізованою. У ній не враховані динаміка виробництва, ритміка поставок і деякі інші властивості реального виробництва.

Задача 3. Транспортна задача.

Транспортна модель використовується під час розробки плану перевезень однорідної продукції з m пунктів відправлення в n пунктів призначення. Під час побудови моделі використовують:

– величини, що характеризують обсяг виробництва $a_i,\ i \in J_m$ в кожному вихідному пункті й попит $b_j,\ j \in J_n$ в кожному пункті призначення;

– вартість c_{ij} переведення одиниці продукції з кожного вихідного пункту в кожний пункт призначення.

Оскільки розглядається однорідний продукт, то потреби пункту призначення можуть задовольнятися за рахунок будь-яких вихідних пунктів.

Мета розв'язку – визначити кількість продукції, яку потрібно перевезти з кожного вихідного пункту в кожний пункт споживання так, щоб загальні транспортні витрати (вартість) були ***мінімальними.***

Основне положення, що використовується під час побудови моделі, полягає в тому, що величина транспортних витрат на кожному маршруті прямо пропорційна обсягу перевезень. Крім того, уважається, що загальний обсяг виробництва дорівнює загальному попиту.

Нехай x_{ij} – кількість продукції, що перевозять із вихідного пункту i в пункт призначення j. Тоді можна скласти таку математичну модель транспортної задачі: знайти $\langle z^*, x^* \rangle$, де

$$z^* = \min_{x \in R^{mn}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij};$$

$$x^* = \left(x_{11}^*, \ldots, x_{mn}^* \right) = \arg \min_{x \in R^{mn}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}; \qquad (12)$$

за обмежень:

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in J_m, \ \forall j \in J_n; \qquad (13)$$

– на обсяг виробництва:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ \ \forall i \in J_m; \qquad (14)$$

– на попит:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \forall j \in J_n; \qquad (15)$$

– баланс попиту й виробництва:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (16)$$

Модель (12)–(16) називають збалансованою, якщо (16) не виконується; модель можна збалансувати, увівши фіктивні пункти виробництва або споживання.

Транспортну модель можна розглядати як частковий випадок мережевих задач.

Задача 4. Задача вибору плану обслуговування клієнтів фінансового ринку та її математична модель у вигляді транспортної задачі.

Нехай є n споживачів фінансових ресурсів (n інвестиційних проектів) $B_1,\ldots,B_n$ з потребами в обсягах $b_1,\ldots,b_n$ грошових одиниць та m кредиторів $A_1,\ldots,A_m$ з можливостями обсягами кредитування $a_1,\ldots,a_m$ грошових одиниць. Відома вартість отримання одиниці кредитного ресурсу для j-го споживача від i-го кредитора: c_{ij} грошових одиниць (вартість робіт із видачі кредиту, оцінки платоспроможності тощо). Можна вважати, що потреби на кредит та можливості кредитування в сумі збігаються

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Знайти розподіл x_{ij} – кредитування споживачів кредиторами з мінімізацією сумарної вартості отримання (видачі) кредитів.

Очевидно, що її модель має такий же вигляд (12)–(16), тобто є транспортною задачею.

Задача 5. Задача про оптимальну суміш.

Задача визначення оптимального складу суміші виникає тоді, коли з кількох видів сировини, що є в наявності, необхідно шляхом змішування одержати новий продукт із заданими характеристиками. При цьому потрібно, щоб вартість такої суміші була мінімальною.

Нехай суміш потрібно скласти з n різних видів сировини, кожний із яких містить m видів елементів (речовин), що нас цікавлять.

Нехай $a_{ij}, \left(i \in J_m\right)$ – кількість i-ї речовини в одиниці j-ї сировини, вартість якої c_j, $j \in J_n$. Позначимо через b_i – найменшу допустиму кількість i-ї речовини, через d_j – запас (обсяг) сировини. Позначимо x_j – кількість сировини j-го виду, яка необхідна для складання суміші. Тоді можна сформулювати модель цієї задачі.

Знайти $\left\langle z^*, x^* \right\rangle$, де

$$z^* = \min_{x \in R^n} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j ; \tag{17}$$

$$x^* = arg \min_{x \in R^n} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{18}$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i \in J_m; \tag{19}$$

$$0 \leq x_j \leq d_j \quad j \in J_n. \tag{20}$$

Задача 6. Задача вибору портфеля цінних паперів і її математична модель у вигляді задачі лінійного програмування.

Визначення оптимального портфеля цінних паперів є однією з найважливіших задач, з якими стикаються різні інвестори (банки, страхові компанії, тощо). Під портфелем розуміють розміри вкладень у різні види цінних паперів: звичайні облігації, облігації короткотермінових державних займів, банківські депозитні сертифікати, звичайні акції та ін.). Для аналізу задачі вибору портфеля цінних паперів, зважаючи на її складність та економічну важливість, розроблено ряд математичних моделей. Зупинимося поки що на моделі, що є задачею лінійного програмування.

Нехай наявний капітал *C* у наступному інвестиційному періоді можна вкласти в цінні папери *N* видів. Потрібно визначити відповідні долі вкладень. Нехай x_j, $j \in J_N$ – величина капіталу (у грошових одиницях), що вкладається в цінні папери *j*-го виду. Тоді на змінні x_j накладаються обмеження:

$$\sum_{j=1}^{N} x_j \leq C; \tag{21}$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \in J_N. \tag{22}$$

Нехай є статистичні дані за кожним видом вкладень за останні *T* років (або інших інвестиційних періодів), що відображають коливання цін і виплат дивідендів протягом цього періоду. За допомогою цих даних можна оцінити прибуток від вкладень для кожного виду цінних паперів. Нехай $r_j(t)$ – загальний прибуток у році (періоді) t на одну грошову одиницю вкладень у цінні папери виду j. Тоді

$$r_j(t) = \left[p_j(t+1) - p_j(t) + d_j(t)\right] / \, p_j(t), \tag{23}$$

де $p_j(t)$ − вартість цінних паперів j-го типу на початку року (періоду) t, а $d_j(t)$ – сумарні дивіденди, що одержані в році (періоді) t.

Зазначимо, що $r_j(t)$ непостійні й можуть сильно коливатися рік від року (період від періоду). Ці значення можуть мати будь-який знак або бути нульовими (тобто приносити прибуток чи збиток або не приносити ні того ні того). Тому, для оцінки того, чи варто вкладати капітал в цінні папери виду j, знайдемо середній за T років (періодів) прибуток на одну вкладену грошову одиницю:

$$\mu_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_j(t). \tag{24}$$

Загальна величина прибутку, що очікується, задається так:

$$E = \sum_{j=1}^{N} \mu_j x_j. \tag{25}$$

Отже, одержали математичну модель цієї задачі: знайти $\langle E^*,\ x^* \rangle$, де

$$E^* = \max_{x \in R^N} \sum_{j=1}^{N} \mu_j x_j; \tag{26}$$

$$x^* = \arg \max_{x \in R^N} \sum_{j=1}^{N} \mu_j x_j, \tag{27}$$

де μ_j обчислюється за допомогою формул (24), (23) за обмежень (21), (22).

Тут максимізується загальний очикуємий прибуток за обмежень на загальний обсяг інвестицій. Портфель цінних паперів може також формуватися з урахуванням різних обмежень, пов'язаних із політикою фірми. Більшість інвестиційних фірм обмежують розміри вкладень у звичайні акції, оскільки прибуток від останніх значно коливається. Таке обмеження можна записати у вигляді

$$\sum_{j \in I_1} x_j \le b_1,$$

де I_1 – множина номерів ризикованих інвестицій.

Для врахування необхідності мати високоліквідні вкладення вводять таке обмеження:

$$\sum_{j \in I_2} x_j \ge b_2,$$

де I_2 – множина, що містить номери інвестицій, які відповідають високоліквідним вкладенням (готівка, ощадні рахунки, поточні рахунки тощо); b_2 – мінімальний обсяг необхідного високоліквідного капіталу.

Можуть розглядатися інші обмеження такого роду. Головна вада цієї простої моделі у вигляді задачі лінійного програмування: ризик, пов‘язаний з інвестиціями не враховується в повній мірі. Отже, портфель інвестицій, що знаходиться в результаті розв'язку відповідної задачі лінійного програмування, може обіцяти високий середній прибуток, але при цьому ризик, пов'язаний з інвестиціями, також буде великий. Оскільки реальний ризик може бути великим, це також призведе до того, що реальний прибуток буде значно меншим від того, який очікується.

Урахування ризику виводить нас з класу задач лінійного програмування і вводить в клас задач нелінійного програмування і, які будуть розглянуті пізніше.

Розглянута модель не враховує, що деякі акції (вкладення на депозитні рахунки тощо) не можуть бути будь-якими за величиною, а є деякими дискретними величинами (акції можуть продаватись тільки пакетами, вартість однієї акції теж може бути дискретною величиною, на рахунки приймаються вклади не менше певної величини тощо). Урахування цих обмежень робить модель задачею цілочислової (дискретної), комбінаторної оптимізації, які будуть розглядатися пізніше.

Інформаційні джерела

1. Энциклопедия кибернетики. – Т. 2, с. 42.

Лекції 3–4. Задачі лінійного програмування та їх форми. Основна термінологія лінійного програмування. Графічний метод розв'язування ЗЛП

1. Загальна, стандартна та канонічна форми задач лінійного програмування. Способи переходу від однієї форми до іншої

У попередній лекції ми розглянули побудову математичних моделей ряду задач, які можуть бути розглянуті як часткові випадки такої задачі:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \quad (min) \tag{1}$$

за обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,k}, \quad (i \in J_k); \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{k+1,m} \quad (i \in J_m / J_k), \tag{3}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,l}; \quad l \le n \quad (j \in J_l), \tag{4}$$

де a_{ij}, b_i, c_j $\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$ – задані сталі, $0 \le k \le m,$ а $J_0 = \varnothing.$

Задачу (1)–(4) називають задачею ЛП у *загальному вигляді (в загальній формі)*.

Розрізняють ще дві форми задач ЛП (ЗЛП) залежно від наявності обмежень різного типу.

Стандартна **(або** ***симетрична*****)** форма моделі ЗЛП полягає у визначенні ***максимального*** значення функції (1) за умов (2) та (4), де $k = m,\ l = n,$ тобто:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{6}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Канонічна **(або** ***основна*****)** форма моделі ЗЛП полягає у визначенні максимального значення функції (1) за умов (3) та (4), де $k = 0, \ l = n:$

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \tag{8}$$

за обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}; \tag{9}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{10}$$

Стандартна форма цікава, по-перше, тим, що велика кількість прикладних задач зводиться до цього вигляду моделей. Канонічна форма моделі важлива тим, що основні обчислювальні схеми різних варіантів симплекс-методу розроблені саме для цієї форми.

Наведені три форми ЗЛП еквівалентні в тому сенсі, що кожна з них за допомогою деяких перетворень може бути зведена до будь-якої з двох інших. Отже, будь-яку ЗЛП можна звести до канонічного вигляду. Тому вміння розв’язувати ЗЛП у канонічному вигляді дозволяє розв’язувати ЗЛП, записану в будь-якій формі. Тому достатньо вміти зводити задачу ЛП до канонічної її форми.

Щоб перейти від загальної чи стандартної форми ЗЛП до канонічної, потрібно вміти:

– зводити задачу мінімізації до задачі максимізації;

– переходити від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей;

– заміняти невід'ємними змінними змінні, для яких не виконується умова невід'ємності.

Ці проблеми вирішуються так:

1) коли треба знайти мінімум функції $z = c_1 x_1 + + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$, то можна перейти до знаходження максимуму функції $F = -z = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - ... - c_n x_n$, оскільки $min\, z = -max(-z)$;

2) обмеження-нерівність вихідної задачі лінійного програмування можна перетворити в обмеження-рівність додаванням до його лівої частини додаткової невід'ємної змінної з відповідним знаком.

Таким чином, обмеження вигляду

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n \le b_i$$

перетворюється в обмеження-рівність

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n + x_{n+1} = b_i, \ \ x_{n+1} \ge 0,$$

а обмеження вигляду

$$a_{t1} x_1 + a_{t2} x_2 + ... + a_{tn} x_n \ge b_t$$

– у рівність вигляду:

$$a_{t1} x_1 + a_{t2} x_2 + ... + a_{tn} x_n - x_{n+2} = b_t, \quad x_{n+2} \ge 0.$$

Очевидно, що кількість додаткових змінних при цьому дорівнює кількості нерівностей, що перетворюються;

3) якщо змінна x_k не задовольняє умові невід'ємності, то її потрібно замінити різницею двох невід'ємних змінних $x_k = x_k' - x_k'' \left(x_k' \ge 0, \ \ x_k'' \ge 0 \right)$. Обґрунтованість такої заміни витікає з того, що будь-яке число можна представити у вигляді різниці двох невід'ємних чисел.

У разі переходу від канонічної форми $x = a$ заміняється на $x \le a, \ \ x \ge a.$

2. Термінологія задач лінійного програмування, основні означення і поняття

У лінійному програмуванні склалась певна термінологія, якої слід додержуватися.

Як відомо, множини, елементами яких є точки, називають ***точковими.*** (Приклади: на площині круг, пряма тощо; у просторі – шар, куб, площина тощо; у n-вимірному просторі – область визначення функції (n = 3) $u = \dfrac{1}{x + y + z}$ тощо).

Точкові множини (далі просто множини) поділяються на ***опуклі*** й ***неопуклі.***

Означення 1. Опуклою лінійною комбінацією точок $x^1, \ldots, x^r$ n-вимірного евклідового простору R^n називається точка

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^i , \qquad (11)$$

де $\lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1.$ Тут $x^i = \left(x_1^i, \ldots, x_n^i\right) \in \boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{i = 1, \ldots, r}.$

При $r = 2,$ множина точок (11) називається ***відрізком,*** що з'єднує точки x^1, x^2. Будь-яку точку цього відрізку можна представити як $x = lx^1 + \left(1 - \lambda\right)x^2,$ де $0 \leq \lambda \leq 1.$

Приклад 1. Нехай $x^1 = \left(0, b\right);\ x^2 = \left(a, 0\right).$ Тоді $x = \lambda x^1 + \left(1 - \lambda\right)x^2 =$ $= \left(\left(1 - \lambda\right)a;\ \lambda b\right)$ (рис. 1).

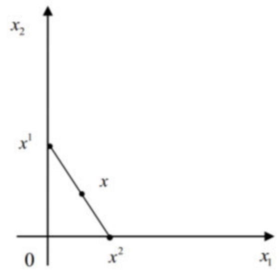


Рисунок 1 – Ілюстрація до прикладу 1

Означення 2. Множина точок називається ***опуклою,*** якщо разом із будь-якими двома точками вона ***містить у собі й увесь відрізок, що їх з'єднує.***

Якщо ж існує хоча б одна така пара точок множини, що відрізок, який з'єднує ці точки, не належить повністю цій множині, то вона називається ***неопуклою.*** Приклади опуклих та неопуклих множин зображено на рис. 2.

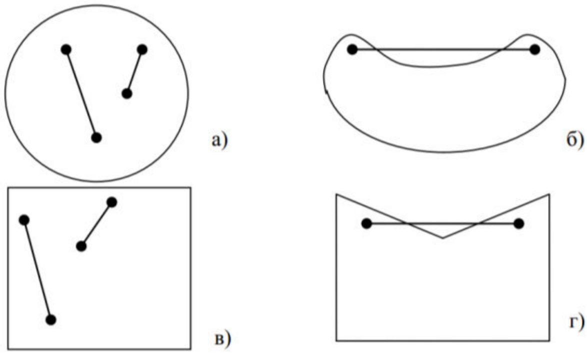


Рисунок 2 – Множини: а), в) – опуклі; б), г) – неопуклі

Опуклі множини мають важливу властивість, що задається нижченаведеною теоремою.

Теорема 1. Переріз (спільна частина) двох опуклих множин – також опукла множина.

Доведення. Нехай M_1, M_2 – опуклі множини (рис. 3).

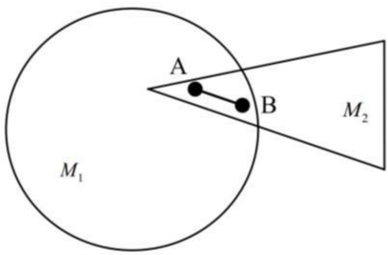


Рисунок 3 – Множини, що ілюструють теорему 1

Якщо $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, або $M_1 \cap M_2 = A$, де A – єдина точка, то справедливість теореми очевидна, оскільки ці множини ($\varnothing$; A) – опуклі. Тому вважаємо, що $\exists A,\ B: A \in M_1 \cap M_2;\ B \in M_1 \cap M_2$. Отже, $A \in M_1;\ A \in M_2;\ \ B \in M_1;\ B \in M_2$. Оскільки M_1, M_2 – опуклі множини, то якщо $A,B \in M_1 \Rightarrow AB \subset M_1,\ \ A,B \in M_2 \Rightarrow AB \subset M_2;$ $AB \subset M_1 \cap M_2$. Отже, $M_1 \cap M_2$ – опукла множина.

Зауважимо, що теорема 1 справедлива для будь-якої скінченої кількості опуклих множин.

Означення 3. Точка опуклої множини називається ***кутовою*** (або ***крайньою***) якщо через неї не можна провести жодного відрізка, що складається ***тільки*** із внутрішніх точок даної множини, для якого вона була б ***внутрішньою.***

Іншими словами: кутовими (крайніми) точками опуклої множини називаються точки, які не є опуклою лінійною комбінацією двох різних внутрішніх точок цієї множини.

Означення 4. Напівпростором у R^n називається множина точок $x = (x_1, ..., x_n)$, що задовольняють нерівності

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b, \tag{12}$$

де $a_j, \left(j = \overline{1,n}\right),\ b$ – деякі константи.

Означення 5. Гіперплощиною називають множину точок $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$, що задовольняють рівнянню

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b. \tag{13}$$

Теорема 2. Півпростір є опуклою множиною.

Доведення. Доведення здійснюється безпосередньо перевіркою.

Нехай x^1, x^2 – дві точки півпростору (12), тобто

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^i \le b, \ \ i=1, \ 2. \tag{14}$$

Покажемо, що $x=\lambda x^1+\left(1-\lambda\right)x^2, \ \ 0\le\lambda\le1,$ також належить півпростору (2.12). Дійсно, зважаючи на (2.14), маємо:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j=\sum_{j=1}^{n} a_j\left(\lambda x_j^1+\left(1-\lambda\right)x_j^2\right)=\lambda\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^1+\left(1-\lambda\right)\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^2\le\lambda b+\left(1-\lambda\right)b=b\,.$$

Теорему доведено.

Наслідок. Гіперплощина є опуклою множиною. Дійсно, гіперплощина – це переріз двох півпросторів, у яких ліві та праві частини в (2.12) однакові, а знаки нерівності різні.

3. Геометричне тлумачення (інтерпретація) ЗЛП. Графічний метод розв'язування ЗЛП

Графічний метод застосовується для розв'язування ЗЛП, заданих у стандартній формі, коли $n=2,3$.

Розглянемо таку задачу при $n=2$.

$$c_1x_1+c_2x_2\to min\left(max\right)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2\le b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m_1}x_1+a_{m_2}x_2\le b_m; \\ x_j\ge0, \quad j=1,2. \end{cases}$$

Область допустимих розв'язків може бути порожньою (випадок А) або непорожньою і представляти багатокутник, необмежену багатокутну область або точку (випадок В).

1. **Випадок А.** Допустима область порожня, коли система обмежень суперечлива. Висновок: ЗЛП не має розв'язків.

Приклад 2 (рис. 4).

$$x_1 + 2x_2 \to min(max);$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0; \\ 2x_1 \leq x_2; \\ 3x_2 \leq x_1; \\ x_1 + x_2 \geq 1. \end{cases}$$

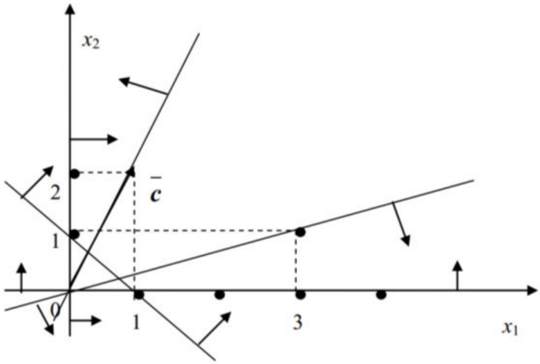


Рисунок 4 – Ілюстрація до прикладу 2

2. **Випадок В.** а) Якщо допустима область складається з однієї точки, то ця точка є оптимальним розв'язком ЗЛП.

Приклад 3.

$$x_1 + 2x_2 \to min(max);$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0, \\ 2x_1 \leq x_2, \\ 3x_2 \leq x_1. \end{cases}$$

Допустима область – початок координат (рис. 5). Отже, маємо:

$$x_{min} = x_{max} = (0,0), \;\; z_{min} = z_{max} = 0 + 2 \cdot 0 = 0.$$

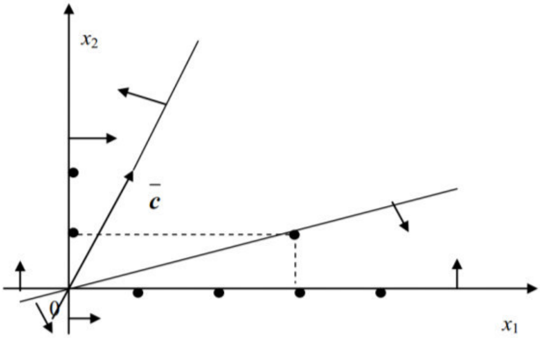


Рисунок 5 – Ілюстрація до прикладу 3

Рівняння $c_1x_1 + c_2x_2 = z$ описує сім'ю паралельних прямих із параметром z. Коли z зростає, то пряма (лінія рівня) зміщується паралельно сама собі в напрямку напрямного вектора цільової функції $\bar{c} = (c_1, c_2)$.. Переміщуючи лінію рівня до границі області допустимих розв'язків (ОДР), маємо: перша точка перетину лінії рівня з ОДР є точкою мінімуму функції, остання – точкою максимуму. Якщо цільова функція досягає екстремуму одночасно у двох вершинах *A* і *B,* то вона, очевидно, досягає цього значення і на відрізку $[A, B]$ (це може бути, коли c паралельний напрямному вектору обмеження);

б) допустима область – багатокутник.

Приклад 4.

$$x_1 + 2x_2 \to min(max);$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \ge 0 \\ 2x_1 \ge x_2, & I \\ 3x_2 \ge x_1, & II \\ x_1 + x_2 \ge 1, & III \\ x_1 + 2x_2 \le 5. & IV \end{cases}$$

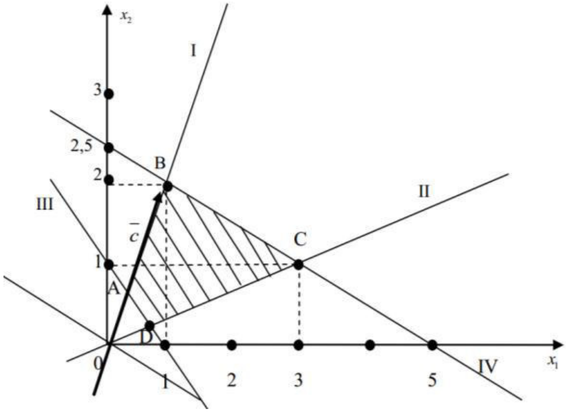


Рисунок 6 – Ілюстрація до прикладу 4

ОДР – чотирикутник ABCD. Напрямний вектор $\bar{c} = (1,2)$. Будуємо, наприклад, лінію рівня, що проходить через 0 (вона не має перетину з ОДР). Подумки рухаємо її в напрямку $\bar{c}$ до перетину, одержуємо точку D. Рухаємо пряму далі доти, доки вона має спільні точки з ABCD. Виявляється, що останніми точками перетину з нею будуть вершини B і C, відповідно, усі точки [B, C], але нам достатньо знайти одну з них, наприклад, точку B.

Для того, щоб записати розв'язок, розв'яжемо систему двох рівнянь, яку складаємо з геометричних міркувань, а саме, точка D розташована на перетині прямих, отриманих із нерівностей II і III, заміною знаків «$\le$» на «=».

$$D:\begin{cases} 3x_2 = x_1; \\ x_1 + x_2 = 1; \end{cases} \quad D\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Точка B – це точка перетину прямих, отриманих із нерівностей I і IV, заміною знаків $\le$ на =.

$$B: \begin{cases} 2x_1 = x_2; \\ x_1 + 2x_2 = 5; \end{cases} \quad B(1, 2).$$

Відповідь: $x_{min} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $z_{min} = \frac{3}{4} + 2\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; x_{max} однозначно невизначений ($x_{max} \in [B, C]$), $z_{max} = 1 + 2 \cdot 2 = 5$;

в) допустима область – багатокутна необмежена область.

Приклад 5 (рис. 7).

$$x_1 + 2x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0, \\ 2x_1 \geq x_2, \\ 3x_2 \geq x_1, \\ x_1 + x_2 \geq 1. \end{cases}$$

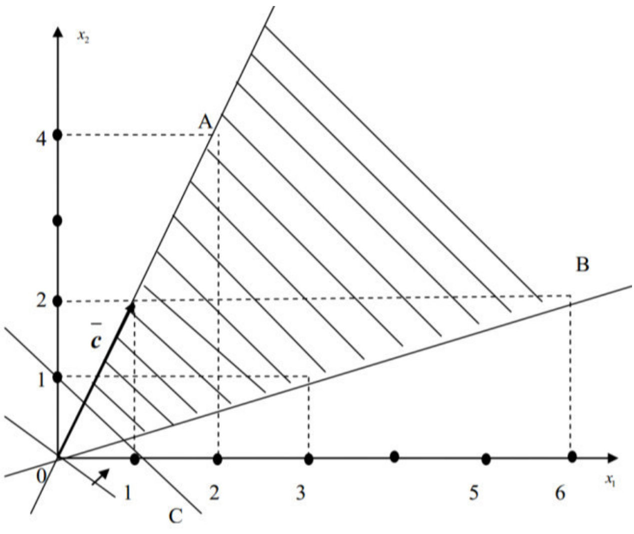


Рисунок 7 – Ілюстрація до прикладу 5

Як видно, рухаючись у напрямку вектора $\bar{c}$, ми ніколи не знайдемо останньої точки перетину лінії рівня з ОДЗ. У такому випадку кажуть, що цільова функція *необмежена зверху* й пишуть: $z_{max} = +\infty$. Аналогічно, якщо не можна вказати першої точки перетину лінії рівня з ОДР, говорять, що цільова функція *необмежена знизу* й відповідь записують у вигляді: $z_{min} = -\infty$.

Для випадку $n = 3$, геометричне представлення задачі будується у просторі. ОДР представляє, якщо вона непорожня, собою точку, многогранник або необмежену многогранну область. Лінія рівня – гіперплощина $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = z$, яка зміщується в напрямку вектора $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Множина розв'язків ЗЛП, якщо вона непорожня, і цільова функція обмежена, очевидно, може бути точкою, нескінченною множиною, що представляє собою ребро, нескінченною множиною – гранню многогранника. Для того, щоб знайти координати вершини, у якій досягається розв'язок ЗЛП, необхідно три нерівності системи додаткових обмежень перетворити на рівності.

Зауваження. Аналогічно тому, як лінійна нерівність може бути зведена до рівняння додаванням нової змінної з відповідним знаком, рівняння може бути зведено до нерівності з числом змінних на 1 менше та з відповідним знаком, і при цьому повинна виконуватися умова невід'ємності змінної, яку було відкинуто. Це дозволяє в окремих випадках графічно розв'язувати ЗЛП, в яких $n > 3$. Цей прийом продемонструємо на прикладі.

Приклад 6.

$$z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 - 30x_5 + 6x_6 \to min(max);$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_5 = 9, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_6 = 8, \\ 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ x_2 - x_6 = 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Випишемо матрицю A системи рівнянь і вектор вільних членів:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&0&1&0\\1&1&-2&0&0&1\\0&0&3&4&0&0\\0&1&0&0&0&-1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}9\\8\\6\\3\end{pmatrix}.$$

Перше, наприклад, рівняння системи еквівалентне таким системам із двох нерівностей:

$$\begin{matrix}3x_3+x_5\le 9, & x_1\ge 0;\\ x_1+3x_3\le 9, & x_5\ge 0;\\ x_1+x_5=9, & x_3\ge 0.\end{matrix}$$

Проте, оскільки дане рівняння входить до системи, в інші рівняння якої також входять змінні x_1,x_3,x_5, перейти від системи рівнянь нерівностей можна тільки для змінних, які входять в одне рівняння системи (це, наприклад, змінна x_4). Еквівалентними перетвореннями приведемо матрицю обмежень до такого вигляду:

$$\left(A|b\right)=\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&3&0&1&0&9\\1&1&-2&0&0&1&8\\0&0&3&4&0&0&6\\0&1&0&0&0&-1&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ III/4\\ II+IV\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&3&0&1&0&9\\1&1&-2&0&0&1&8\\0&0&3/4&1&0&0&3/2\\0&2&-2&0&0&0&11\end{array}\right)\begin{array}{l}I-IV\\ II-IV\\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{cccccc|c}0&-2&5&0&1&0&-2\\0&-1&0&0&0&1&8\\0&0&3/4&1&0&0&3/2\\1&2&-2&0&0&0&11\end{array}\right)\begin{array}{l}I-IV\\ II-IV\\ \\ \\ \end{array}.$$

Тепер система містить одиничний базис, тобто існують чотири змінні, кожна з яких входить лише в єдине рівняння системи (це змінні x_1,x_4,x_5,x_6). Запишемо систему рівнянь та еквівалентну їм систему нерівностей:

$$\begin{cases} -2x_2+5x_3+x_5=-2; \\ -x_2+x_6=8; \\ \dfrac{3}{4}x_3+x_4=\dfrac{3}{2}; \\ x_1+2x_2-2x_3=11; \\ x_i\ge 0\ \left(i=\overline{1,6}\right). \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_2+5x_3\le -2; \\ -x_2\le 8; \\ \dfrac{3}{4}x_3\le\dfrac{3}{2}; \\ 2x_2-2x_3\le 11; \\ x_i\ge 0\ \left(i=\overline{1,6}\right). \end{cases}$$

Виключимо змінні x_1, x_4, x_5, x_6 з цільової функції:

$$F=3x_1-2x_2+5x_3+x_4-30x_5+6x_6=3\left(11-2x_2+2x_3\right)-2x_2+5x_3+$$

$$+\left(3/2-3/4x_3\right)-30\left(-2+2x_2-5x_3\right)+6\left(8+x_2\right)=$$

$$=142,5-62x_2+160,25x_3.$$

Розглянемо тепер ЗЛП із системою обмежень, які є нерівностями із двома змінними, і розв'яжемо її графічно (рис. 8).

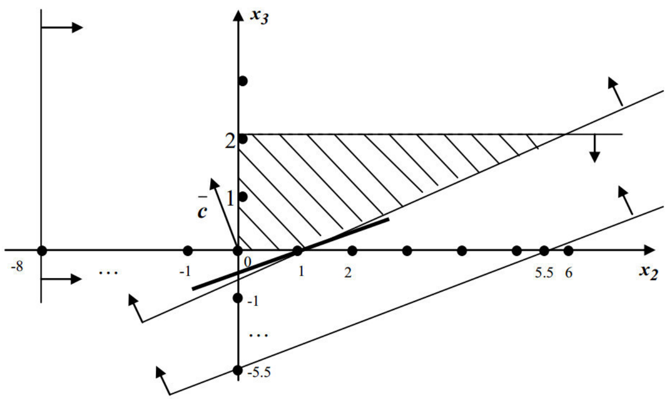


Рисунок 8 – Ілюстрація до прикладу 6

$$-62x_2+160\frac{1}{4}x_3\to min$$

$$\begin{cases} -2x_2 + 5x_3 \le -2, \\ x_2 \ge -8, \\ x_3 \le 2, \\ x_2 - x_3 \le \dfrac{11}{2} \\ x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Отриманий розв'язок задачі мінімізації:

$$x^{**} = (1{,}0);\ \ z^{**} = -62 + 0 + 142{,}5 = 50{,}5.$$

Знайдені значення цільової функції допоміжної задачі – це шукане значення цільової функції z в розв'язках задач вихідної задачі. Для того, щоб знайти розв'язок вихідної задачі, знаходимо решту змінних x_1, x_4, x_5, x_6.

Відповідь: $x^* = (9{,}1{,}0{,}1{,}5{,}0{,}9)$, $z^* = z^{**} = 50{,}5$.

Користуватися під час розв'язання ЗЛП геометричною інтерпретацією навіть для $n = 3$ досить складно, але наведена геометрична інтерпретація дозволяє сформулювати такі властивості ЗЛП:

а) оптимальний розв'язок, якщо він існує, знаходиться не всередині, а на границі ОДР, у тому числі принаймні в одній із його вершин;

б) для того, щоб знайти оптимальний розв'язок, треба, переходячи від однієї вершини до іншої, рухатися в напрямку зменшення (або збільшення) цільової функції.

Лекції 5–6. Основні теореми лінійного програмування

1. Властивості опуклих множин

Теорема 1. ***Нехай множина A – опукла. Тоді опукла лінійна комбінація довільної кількості точок цієї множини належить цій множині***.

Доведення. Нехай $x^1,\dots,x^r \in A,\ \ \lambda_i \geq 0,\ \ i=1,\dots,r,\ \ \sum_{i=1}^{r}\lambda_i = 1.$

Покажемо, що

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i x^i \in A.$$

Доведення проведемо ***методом математичної індукції.*** Для $r=1$ теорема очевидна. Для $r=2$ теорема правильна згідно з означенням опуклої множини.

Нехай теорема правильна для $r=k,$ тобто

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x^i \in A. \tag{1}$$

Доведемо, що теорема правильна і для $r=k+1,$ тобто

$$x=\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i x^i \in A. \tag{2}$$

Можна вважати, що в (2) ***всі*** $\lambda_i \neq 0,$ інакше теорема ***вірна згідно із припущенням індукції*** при $r=k.$ Оскільки

$$\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i = 1,$$

то

$$\lambda_{k+1} = 1-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i .$$

Позначимо $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=\lambda>0.$ Маємо $\lambda_{k+1}=1-\lambda>0.$

Тепер

$$x=\lambda\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{\lambda}x^i+(1-\lambda)x^{k+1}.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{\lambda}x^i\in A$ в силу (1), $x^{k+1}\in A$ за умовою теореми, то згідно з означенням опуклої множини $x\in A,$ що й треба було довести.

Означення. Многогранною множиною (або ***многогранною областю***) називається переріз скінченої кількості напівпросторів.

Обмежена многогранна множина називається ***многогранником.***

Нагадаємо, що якщо система обмежень задачі ЛП має хоча б один розв'язок, то вона називається ***сумісною,*** в іншому разі – ***несумісною.***

Множина точок *x,* що задовольняє системі обмежень задачі ЛП, називається ***допустимою множиною*** (областю). Будь-яка точка цієї множини називається ***допустимою точкою (допустимим розв'язком, планом).*** Допустима точка, що мінімізує (максимізує) цільову функцію

$$(c,\, x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j, \tag{3}$$

називається ***розв'язком*** (оптимальним розв'язком) задачі ЛП, оптимальним планом. Тут і далі $(c,\, x)$ – ***скалярний добуток векторів*** $c,\ x\in R^n.$

Допустима множина задачі ЛП ***не порожня,*** якщо система обмежень задачі ЛП ***сумісна.***

Отже, допустима множина задачі ЛП (якщо вона не порожня) є ***в загальному випадку многогранною множиною.*** Покажемо, що многогранна множина є опуклою множиною.

Теорема 2. Многогранна множина є опуклою множиною.

Справедливість теореми 2 витікає з наведених означень і доведених теорем. Дійсно, це переріз скінченої кількості напівпросторів, отже, вона опукла.

Без обмеження загальності розглянемо типовий для практичних задач випадок, коли допустима множина задачі ЛП є многогранником (який далі називаємо многогранником розв'язків). Кутові точки многогранника є вершинами.

Теорема 3. Будь-яка точка многогранника є опуклою лінійною комбінацією його вершини.

Доведення. Якщо ця точка – вершина x^i з множини усіх вершин $x^1,...,x^r$, то вона є лінійною опуклою комбінацією: $x = 0x^1 + ... + 0x^{i-1} + 1x^i + 0x^{i+1} + ... + 0x^r$. Якщо вона не вершина, то вона може бути внутрішньою або межовою. Проведемо в першому випадку довільний відрізок до перетину з межею – отримаємо пару межових точок. Для межових точок можна провести відрізки прямих, що лежать на частини межі, яка не є відрізком, з кінцями у вершинах. Знайдемо в кінці кінців такі відрізки (з кінцями у вершинах) продовжуючи побудову відрізків на межах, що не є відрізками. Зробивши зворотній шлях, отримаємо дану точку, як опуклу лінійну комбінацію вершин (див. приклад на рис. 1).

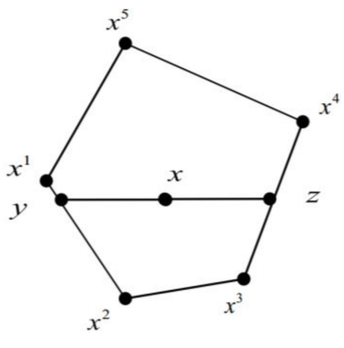


Рисунок 1 – Ілюстрація до теореми 3

Отже, якщо $x = \alpha y + (1-\alpha) z;$ $y = \beta x^1 + (1-\beta) x^2;$ $z = \gamma x^4 + (1-\gamma) x^3,$ де $0 \le \alpha \le 1,\ 0 \le \beta \le 1,\ 0 \le \gamma \le 1;$ тобто: $x = \alpha\left(\beta x^1 + (1-\beta) x^2\right) + (1-\alpha)\left(\gamma x^4 + (1-\gamma) x^3\right) = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i x^i,$ де $\lambda^5 = 0;$ $\lambda_1 + ... + \lambda_4 = 1,\ 0 \le \lambda_i \le 1,\ i = 1,2,3,4.$

2. Властивості допустимої області ЗЛП

Теорема 4. Нехай допустима множина D задачі ЛП є многогранником. Тоді функція цілі (3) досягає свого мінімуму у вершині D. Якщо функція (3) приймає мінімальне значення більш ніж в одній точці, то вона досягає того ж значення в будь-якій точці, що є їх опуклою лінійною комбінацією.

Доведення. Нехай $x^1, x^2, ..., x^p$ – вершини многогранника D, x^* – розв'язок задачі ЛП (який дає мінімальне значення функції (3.3). Тобто $(c,\ x^*) \le (c,\ x)\ \forall x \in D$. Якщо x^* – вершина, то перша частина теореми доведена; якщо x^* не є вершиною многогранника розв'язків, то x^* може бути представлене опуклою лінійною комбінацією його вершин, тобто

$$x^* = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i,\ \lambda_i \ge 0,\ i = 1,...,p, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1.$$

Зважаючи на лінійність функції $(c,\ x)$, маємо

$$(c, x^*) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \left(c, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_j^i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} c_j \lambda_i x_j^i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(c, x^i\right) \ge \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right)\left(c, x^k\right) = \left(c, x^k\right),$$

де $\left(c, x^k\right) = \min\limits_{1 \le i \le p}\left(c, x^i\right).$

Оскільки x^* – оптимальний розв’язок (мінімум), то $\left(c, x^*\right) \le \left(c, x^k\right),$ отже $\left(c, x^*\right) = \left(c, x^k\right).$ Тобто існує вершина $x^k,$ у якій функція (3) приймає мінімальне значення.

Доведемо другу частину теореми. Нехай $(c,\ x)$ приймає мінімальне значення $\overline{f}$ в точках $x^1, ..., x^s,$ тобто

$$\left(c,\ x^j\right) = \overline{f}, \quad j = 1, ..., s.$$

Візьмемо деяку опуклу лінійну комбінацію цих точок

$$x = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j x^j, \quad \lambda_j \ge 0, \quad j = 1, ..., s, \sum_{j=1}^{s} \lambda_j = 1.$$

Тоді

$$(c, x) = \left(c, \sum_{j=1}^{s} \lambda_j x^j\right) = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \left(c, x^j\right) = \overline{f} \sum_{j=1}^{s} \lambda_j = \overline{f}.$$

Отже, цільова функція (c, x) досягає мінімального значення, рівного $\overline{f},$ у довільній точці x множини з вершинами $x^1, ..., x^s.$ Теорема доведена.

Таким чином, щоб розв’язати задачу ЛП, достатньо зробити перебір крайніх точок многогранника розв’язків. При цьому виникає питання про знаходження довільної вершини допустимої множини й перехід до іншої вершини.

Система обмежень, що входить у задачу ЛП, в канонічній формі має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \ge 0, \quad j \in J_n, \end{cases} \tag{4}$$

де $b_i \geq 0$ (інакше домножемо рівняння на –1). Представимо систему (4) у векторній формі. Розглянемо n векторів $P_1,...,P_n$ (назвемо їх векторами умов) та вектор P_0:

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} ..., \ P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \ P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тоді з (3.4) маємо:

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + ... + P_n x_n = P_0. \tag{5}$$

Допустимий розв'язок x називають базисним розв'язком (опорним планом), якщо система векторів умов, що відповідає його додатнім компонентам, лінійно незалежна (тобто $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_{j_i} = \bar{0}$, тільки коли $\alpha_1 = ... = \alpha_m = 0$ $x_{j_i} > 0$; $P_{j_i} \in R^m$ $\forall j \in J_n$, $\alpha_i \in R^1$ $\forall i \in J_m$), $\bar{0}$ – нульовий вектор.

Теорема 5. Допустимий розв'язок *x* є вершиною допустимої області ЗЛП (многогранника розв'язків) тоді і тільки тоді, коли він є базисним.

Доведення. 1. ***Достатність.*** Нехай x – базисний розв'язок. Без обмеження загальності можна вважати, що перші k компонент розв'язку x відрізняються від нуля, останні – нулі, тобто

$$x = (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0).$$

За означенням

$$\sum_{j=1}^{k} x_j P_j = P_0 \tag{6}$$

і система векторів $P_1,...,P_k$ – лінійно незалежна.

Покажемо, що x є вершиною многогранника розв'язків. Нехай справедливо ***протилежне,*** тобто x не є вершиною і може бути представлено у вигляді

$$x = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2,$$

де $0 < \lambda < 1,\ \ x^1, x^2$ – дві ***різні*** точки многогранника. Оскільки $\lambda > 0,\ (1-\lambda) > 0,$ точка x має перші k ненульових компонент, то точки x^1, x^2 повинні мати вигляд (оскільки $x_i^1 \geq 0;\ \ x_i^2 \geq 0$)

$$x^1 = \left(x_1^1, ..., x_k^1,\ 0, ...,\ 0\right),$$

$$x^2 = \left(x_1^2, ..., x_k^2, 0,\ ...,\ 0\right).$$

Оскільки x^1, x^2 – ***допустимі*** розв'язки, то

$$\sum_{j=1}^{k} x_j^l P_j = P_0,\ l = 1, 2. \tag{7}$$

Віднімаючи з першого співвідношення (7) друге, одержимо:

$$\sum_{j=1}^{k} \left(x_j^1 - x_j^2\right) P_j = \bar{0}.$$

Зважаючи на лінійну незалежність $P_1, ..., P_k : x^1 = x^2.$ Це суперечить тому, що $x^1 \neq x^2,$ отже, x – вершина.

2. Необхідність. Нехай $x = \left(x_1, ..., x_k, 0, ..., 0\right)\ \ (k \leq n),$ – є вершина допустимої області. Покажемо, що x є базисним розв'язком. Для цього достатньо показати, що система векторів $P_1, ..., P_k$ є лінійно незалежною. ***Припустимо протилежне.*** Тоді існують $\alpha_j,$ не всі рівні нулю, такі що

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j P_j = \bar{0}. \tag{8}$$

Оскільки x – допустимий розв’язок, то

$$\sum_{j=1}^{k} x_j P_j = P_0. \tag{9}$$

Виходячи із (8), (9), розглянемо за довільного $\varepsilon > 0$ такі вирази:

$$\sum_{j=1}^{k} \left(x_j + \varepsilon\alpha_j \right) P_j = P_0;$$

$$\sum_{j=1}^{k} \left(x_j - \varepsilon\alpha_j \right) P_j = P_0.$$

Очевидно, що ε можна підібрати так, щоб точки

$$\begin{aligned} x^1 &= \left(x_1 + \varepsilon\alpha_1, ..., x_k + \varepsilon\alpha_k, 0, ..., 0 \right), \\ x^2 &= \left(x_1 - \varepsilon\alpha_1, ..., x_k - \varepsilon\alpha_k, 0, ..., 0 \right) \end{aligned} \tag{10}$$

мали додатні компоненти, тобто були ***допустимими*** розв’язками задачі мінімізації функції (3) за умов (5) та

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, ..., n. \tag{11}$$

Підберемо $\varepsilon,$ щоб

$$\begin{cases} x_i - \varepsilon\alpha_i > 0; \\ x_j + \varepsilon\alpha_j > 0. \end{cases}$$

Випадок I. $\alpha_i > 0,$ тоді $\varepsilon < -\dfrac{x_i}{-\alpha_i} = \dfrac{x_i}{\alpha_i} < \min\limits_{\substack{1 \leq i \leq k \\ \alpha_i > 0}} \dfrac{x_i}{\alpha_i}.$

Випадок II. $\alpha_i < 0,$ тоді $\varepsilon > -\dfrac{x_i}{-\alpha_i} = \dfrac{x_i}{\alpha_i} > \max\limits_{\substack{1 \leq i \leq k \\ \alpha_i < 0}} \dfrac{x_i}{\alpha_i}.$ Цей максимум менше нуля, отже, довільне $\varepsilon > 0$ підходить.

Аналогічно, випадок А: $\alpha_j > 0,$ тоді

$$\varepsilon > -\frac{x_j}{\alpha_j} > \max_{\substack{1 \le i \le k \\ \alpha_j > 0}} \left\{ -\frac{x_j}{\alpha_j} \right\}. \Rightarrow \varepsilon > 0.$$

Випадок В: $\alpha_j < 0$, тоді $\varepsilon < -\frac{x_j}{\alpha_j} < \min_{\substack{1 \le j \le k \\ \alpha_j < 0}} \left\{ -\frac{x_j}{\alpha_j} \right\}.$

Тобто у випадку І А: $\varepsilon < \min_{\substack{1 \le i \le k \\ \alpha_i > 0}} \frac{x_i}{\alpha_i};$ у випадку І В $\varepsilon < \min_{1 \le i \le k} \frac{x_i}{|\alpha_i|};$

у випадку ІІ А $\varepsilon > 0;$ у випадку ІІ В $\varepsilon < \min_{\substack{1 \le j \le k \\ \alpha_j < 0}} \left\{ \frac{x_j}{-\alpha_j} \right\}.$

Отже, остаточно $0 < \varepsilon < \min_{1 \le i \le k} \frac{x_i}{|\alpha_i|}$.

Із (10) випливає, що $x = \frac{1}{2}\left(x^1 + x^2\right)$, тобто ***не є вершиною***, оскільки це середина відрізка x^1, x^2 (***протиріччя*** з означення вершин). Одержане протиріччя доводить теорему.

Таким чином, якщо додатнім компонентам деякого допустимого розв'язку відповідають лінійно незалежні вектори умов, то цей допустимий розв'язок є вершиною многогранника розв'язків.

Виходячи з теореми 5, можна було б запропонувати такий шлях розв'язування ЛП: ***вибирається довільна лінійно незалежна система векторів умов,*** компоненти x_j не відповідні цим векторам, покладаються ***рівними*** 0, знаходиться розв'язок одержаної при цьому системи (5). ***Якщо він задовольняє умові невід'ємності (11)***, ***то це – вершина допустимої області.*** За знайденим розв'язком ***обчислюється і запам'ятовується значення цільової функції (3)***.

Теоретично, таким шляхом можна одержати розв'язок задачі ЛП, вибравши серед знайдених значень функції цілі (c, x)

мінімальне. Можна показати, що систем, які треба розглянути, всього $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, що при великих m, n – велика кількість. Ясно, що в запропонованому підході ***відсутня цілеспрямованість*** у переборі вершин допустимої області й реалізація його ***практично неможлива.***

Далі ми розглянемо ціленаправлений перебір ***сусідніх*** (суміжних) ***вершин*** многогранника розв'язків. Виходячи з деякої ***початкової вершини,*** будемо переходити до сусідньої вершини так, щоб в новій вершині значення функції цілі було менше.

Лекції 7–8. Метод Жордана-Гауса та симплекс-метод

1. Перебір вершин методом виключення Жордана-Гауса

Оскільки розв'язок задачі ЛП можна звести до перебору вершин, то виникають питання: ***як найти початкову вершину та як перейти до іншої вершини?***

Будемо казати, що ***система рівнянь (4)*** з лекції 5–6 ***записана в канонічній формі,*** якщо ***праві*** її ***частини невід'ємні, для кожного з рівнянь є змінна з коефіцієнтом 1*** в цьому рівнянні ***і коефіцієнтами 0 у всіх інших рівняннях.*** Для спрощення нехай система (4) з лекції 5–6 записана у вигляді:

$$
\begin{aligned}
x_1 + \alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1k}x_k + \ldots + \alpha_{1j}x_j + \ldots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1;\\
&\ldots\\
x_i + \alpha_{i,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{ik}x_k + \ldots + \alpha_{ij}x_j + \ldots + \alpha_{in}x_n &= \beta_i;\\
&\ldots\\
x_l + \alpha_{l,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{lk}x_k + \ldots + \alpha_{lj}x_j + \ldots + \alpha_{ln}x_n &= \beta_l;\\
&\ldots\\
x_m + \alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{mk}x_k + \ldots + \alpha_{mj}x_j + \ldots + \alpha_{mn}x_n &= \beta_m,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де $\beta_i > 0$. ***Змінні*** $x_1,...,x_m$ називаються ***базисними,*** інші – ***небазисними.***

Система (4.1) дозволяє легко знайти ***початкову вершину*** допустимої області. Дійсно, точка

$$\left(\beta_0,\ \beta_1,\ ...,\ \beta_m,\ 0,\ ...,\ 0\right)$$

є вершиною допустимої області, ***бо вектори умов, що*** відповідають $x_1,...,x_m$ є ***лінійно незалежними.***

Від задачі мінімізації (3) за умов (4) (формули з лекції 5–6) легко перейти до рівносильної задачі з системою (1) замість рівнянь з (4) із лекції 5–6, ***увівши штучні змінні.*** У кожне рівняння

($i = 1,...,m$) вводиться *змінна* x_{n+1}, щоб в оптимальному розв'язку ці змінні були рівні 0, одночасно з ***великим коефіцієнтом М вони вводяться в цільову функцію.*** Цей прийом одержав назву ***М-методу*** (або ***методу штучного базису***) й детально буде розглянуто далі.

Розглянемо перехід від системи (1) до еквівалентної їй методом ***виключення Жордана-Гауса.***

Спершу розглянемо приклад.

Приклад 1. Перейти від заданої системи до еквівалентної, де базисною змінною є x_6 замість x_3.

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_5 + 3x_6 + 4x_7 + 5x_8 = 15;\\
&x_2 + x_5 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 = 11;\\
&x_3 - x_5 + 2x_6 - 3x_7 + 4x_8 = 3;\\
&x_4 - 2x_5 + 3x_6 - 4x_7 + 5x_8 = 3.
\end{aligned}$$

Розділимо третє рівняння на 2:

$$\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 + x_6 - \frac{3}{2}x_7 + 2x_8 = \frac{3}{2};$$

одержане рівняння далі множимо на 3; 2; 3 та віднімаємо від 1, 2, 4-го рівнянь відповідно.

Отримаємо:

$$\begin{aligned}
&x_1 - \frac{3}{2}x_3 + \left(2 + \frac{3}{2}\right)x_5 + \left(4 + \frac{9}{2}\right)x_7 + (5-6)x_8 = 15 - \frac{9}{2};\\
&x_2 - x_3 + 2x_5 + 6x_7 + 0x_8 = 8;\\
&x_6 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{3}{2}x_7 + 2x_8 = \frac{3}{2};\\
&x_4 + \left(-\frac{3}{2}x_3\right) + \left(-2 + \frac{3}{2}\right)x_5 + \left(-4 + \frac{9}{2}\right)x_7 + (5-6)x_8 = 3 - \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Після обчислення:

$$
\begin{aligned}
&x_1 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{2}x_5 + \frac{17}{2}x_7 - x_8 = \frac{21}{2};\\
&x_2 - x_3 + 2x_5 + 6x_7 = 8;\\
&x_6 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{3}{2}x_7 + 2x_8 = \frac{3}{2};\\
&x_4 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_7 - x_8 = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Цей перехід від (1) до еквівалентної системи полягає у виключенні з усіх рівнянь, крім l-го, змінної x_k шляхом множення l-го рівняння на α_{ik}/α_{lk} і віднімання цього результату з i-го рівняння, $i=1,...,l-1,l+1,...,m$. Помноживши l-те рівняння на $\frac{1}{\alpha_{lk}}$, ми одержимо систему вигляду (1), що відрізняється від вихідної тим, що в l-тому рівнянні змінною з коефіцієнтом 1 буде не x_l, а x_k. Ця система має вигляд:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + \alpha'_{1l}x_l + \alpha'_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + \overset{\overset{0}{\parallel}}{\alpha'_{1k}}x_k + \ldots + \alpha'_{1j}x_j + \ldots + \alpha'_{1n}x_n = \beta'_1, \frac{1}{2}\\
&\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\
&x_i + \alpha'_{il}x_l + \alpha'_{im+1}x_{m+1} + \ldots + \overset{\overset{0}{\parallel}}{\alpha'_{ik}}x_k + \ldots + \alpha'_{ij}x_j + \ldots + \alpha'_{in}x_n = \beta'_i,\\
&\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\
&\alpha'_{ll}x_l + \alpha'_{lm+1}x_{m+1} + \ldots + \overset{\overset{1}{\parallel}}{\alpha'_{lk}}x_k + \ldots + \alpha'_{lj}x_j + \ldots + \alpha'_{ln}x_n = \beta'_l, \qquad (2)\\
&\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots
\end{aligned}
$$

$$\alpha'_{ml}x_l + x_m + \alpha'_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \overset{\overset{0}{\|}}{\alpha'_{mk}}x_k + \ldots + \alpha'_{mj}x_j + \ldots + \alpha'_{mn}x_n = \beta'_m,$$

де

$$\alpha'_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{ij}}{\alpha_{lk}}, \; i = l; \\ \alpha_{ij} - \dfrac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}}\alpha_{ik}, \; i \neq l; \end{cases} \qquad \beta'_i = \begin{cases} \dfrac{\beta_i}{\alpha_{lk}}, \; i = l; \\ \beta_i - \dfrac{\beta_l}{\alpha_{lk}}\alpha_{ik}, \; i \neq l. \end{cases}$$

Приклад 2. Проведемо перетворення прикладу 1 в табличній формі. Стрілки вказують, яка змінна стає базисною замість якої.

i	Базисні змінні	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	
1	1	15	1	0	0	0	2	3	4	5	
2	2	11	0	1	0	0	1	2	3	4	
3	3	3/ 3/2	0/ 0	0/ 0	1/ 1/2	0/ 0	–1/ –1/2	2/ 1	–3/ –3/2	4/ 2	←
4	4	3	0	0	0	1	–2	3	–4	5	
								↑			

Рядок, помічений стрілкою, називаємо ***напрямним,*** стовбець, помічений стрілкою, – ***напрямним,*** а елемент на їх перетині ***розв'язальним.***

Схема перерахунку:

$$\boxed{\text{№ 1'}} = \boxed{\text{№ 1}} - \boxed{\text{№ 2}} \qquad \boxed{\text{№ 3'}}$$

де р. е. – розв'язальний елемент, а елемент № 1 – це той, що перераховується (рис. 1).

№ 1		№ 2
№ 3/3'		р. е.

Рисунок 1 – Позначки клітин таблиці в схемі перерахунку

Значення з нової таблиці мають номер зі штрихом: $№1'$, $№3'$.

i	Базисні змінні	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
1	1	21/2	1	0	–3/2	0	7/2	0	17/2	–1
2	2	8	0	1	–1	0	2	0	6	0
3	6	3/2	0	0	1/2	0	–1/2	1	–3/2	2
4	4	–3/2	0	0	–3/2	1	–1/2	0	1/2	–1

Новий напрямний рядок одержуємо, розділивши старий на розв'язальний елемент. Його зручно для користування схемою перерахунку записати також і у стару таблицю. Новий напрямний стовбець, крім отриманої одиниці містить інші нулі.

Бачимо, що результат такий же, як у прикладі 1.

Щоб нова система (2) визначала вершину многогранника розв'язків, її праві частини повинні бути невід'ємними. Тому потрібно вибирати такий рядок l і стовпець k, щоб виконались умови:

1) $\theta = \dfrac{\beta_l}{\alpha_{lk}} \geq 0;$ 2) $\beta_i - \dfrac{\beta_l}{\alpha_{lk}} \alpha_{ik} \geq 0.$

Якщо вибрати ту змінну x_k, для якої компонента α_{lk} відповідного їй вектора умов додатня ($\alpha_{lk} > 0$), то умова 1) буде виконана. Крім того, повинна виконуватись умова 2).

Якщо $\alpha_{ik} \leq 0,$ то умова 2) також виконується.

Якщо ж $\alpha_{ik} > 0,$ то l потрібно вибирати так, щоб

$$\beta_i - \frac{\beta_l}{\alpha_{lk}} \alpha_{ik} \geq 0, \text{ або } \frac{\beta_i}{\alpha_{ik}} \geq \frac{\beta_l}{\alpha_{lk}}.$$

Отже, l повинно бути таким, щоб

$$\frac{\beta_l}{\alpha_{lk}} = \min_{i:\alpha_{ik}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ik}} = \theta. \qquad (3)$$

Одержаний результат сформулюємо у вигляді правила: виходячи із системи (1), яка визначає деяку вершину многогранника розв’язків, нову вершину можна одержати так: потрібно взяти небазисну змінну x_k, якій відповідає вектор умов хоча б з однією додатною компонентою; вибрати l-те рівняння з умови (3); потім виключити змінну x_k з усіх рівнянь, крім l-го; у результаті одержимо нову систему вигляду (1), з якої можна визначати нову вершину допустимої області.

Приклад 3. Виберемо в прикладі 2 рядок і стовбець так, щоб отримати нову вершину. Уведемо для цього додатковий стовбець. Нехай стовбець вибрано P_6. Знайдемо рядок.

i	Базисні змінні	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	β_i / α_{ik} $\alpha_{ik} > 0$	
1	1	15	1	0	0	0	2	3	4	5	15/3=5	
2	2	11	0	1	0	0	1	2	3	4	11/2=5,5	
3	3	3	0	0	1	0	–1	2	–3	4	3/2=1,5	
4	4	3/ 1	0/ 0	0/ 0	0/ 0	1/ 1/3	–2/ –2/3	3/ 1	–4/ –4/3	5/ 5/3	3/3=1	←
								↑				

Після перерахунку отримаємо.

i	Базисні змінні	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
1	1	12	1	0	0	–1	4	0	8	0
2	2	9	0	1	0	–2/3	7/3	0	17/3	2/3
3	3	1	0	0	1	–2/3	1/3	0	–1/3	2/3
4	6	1	0	0	0	1/3	–2/3	1	–4/3	5/3

Тобто система набула вигляду:

$$x_1 - x_4 + 4x_5 + 8x_7 = 12;$$

$$x_2 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{7}{3}x_5 + \frac{17}{3}x_7 + \frac{2}{3}x_8 = 9;$$

$$x_3 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_7 + \frac{2}{3}x_8 = 1;$$

$$x_6 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 - \frac{4}{3}x_7 + \frac{5}{3}x_8 = 1.$$

Виникає природне питання: чи не можна вибрати таку вершину, значення цільової функції в якій було б більше, ніж у вихідній (у задачі максимізації).

У вихідній вершині $x^0 = \left(\beta_1, ..., \beta_m, 0, ..., 0\right)$ значення функції цілі дорівнює $\left(c, x^0\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i \beta_i$.

Нова вершина має координати

$$x' = \left(\beta_1 - \theta\alpha_{1k}, ..., \beta_{l-1} - \theta\alpha_{l-1,k}, 0, \beta_{l+1} - \theta\alpha_{l+1,k}, ..., \beta_m - \theta\alpha_{mk}, 0, ..., 0, \theta, 0, ..., 0\right) =$$

$$= \left(\beta_1 - \theta\alpha_{1k}, ..., \beta_{l-1} - \theta\alpha_{l-1,k}, \beta_l - \theta\alpha_{lk}, \beta_{l+1} - \theta\alpha_{l+1,k}, ..., \beta_m - \right.$$

$$\left. -\theta\alpha_{mk}, 0, ..., 0, \theta, 0, ..., 0\right),$$

(де $\boldsymbol{\theta}$ стоїть на місці k) оскільки $\beta_l - \theta\alpha_{kl} = 0.$ Обчислимо значення функції цілі (c, x) в новій вершині

$$\left(c,\ x'\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i \left(\beta_i - \theta\alpha_{ik}\right) + \theta c_k = \left(c, x^0\right) + \theta\left(c_k - z_k\right) = \left(c, x^0\right) - \theta\Delta_k, \quad (4)$$

де

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ik}, \quad \Delta_k = z_k - c_k. \quad (5)$$

З (4), (5) випливає, що якщо вибрати таке x_k, при якому $\Delta_k < 0,$ то значення функції цілі в новій вершині буде більше, ніж у вихідній.

Отже, ми розглянули всі питання, необхідні для опису симплекс-методу – одного з центральних методів лінійного програмування.

Параметр Δ_k називають ***відносною оцінкою.***

2. Симплекс-метод. Критерій оптимальності

Цей метод застосовується, коли задача ЛП має обмеження у формі (1). У цьому випадку автоматично знаходяться початкова вершина допустимої області, а потім за описаною схемою здійснюється напрямлений перебір вершин. З цією метою для кожної з небазисних змінних із використанням формул (5) підраховується величина $\Delta_k = z_k - c_k$ ***відносної оцінки.*** Вибирається змінна x_k, для якої $\Delta_k < 0$ і, крім того, вектор умов, відповідний x_k, має хоча б одну додатню компоненту. Для кожного *i*-го рівняння, для якого $\alpha_{ik} > 0,$ обчислюємо $\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$ і вибираємо те рівняння, де це співвідношення мінімальне. Нехай це буде *l*-те рівняння. Потім за методом Жордана-Гауса виключаємо змінну x_k з усіх рівнянь, крім *l*-того.

У результаті перейдемо до задачі ЛП, у якій система обмежень записана в формі (1), що автоматично визначає нову вершину многогранника. Як випливає з розглянутого раніше значення функції цілі в новій вершині буде більше, ніж в вихідній. Для знайденої вершини виконуємо аналогічний цикл, що називають ***ітерацією.***

Цей процес продовжуємо до тих пір, поки відносні оцінки небазисних змінних не стануть додатніми, точніше не від'ємними. Покажемо, що в цьому випадку задача ЛП розв'язана.

Теорема 7. (Критерій оптимальності). Якщо для деякого базисного розв'язку $x = (x_1, ..., x_n)$ справедливі нерівності

$$\Delta_k = z_k - c_k \geq 0, \;\; k = 1, ..., n, \tag{6}$$

то *x* є розв'язком задачі ЛП (де цільова функція максимізується).

Доведення. Позначимо для визначеності вектора умов початкової системи $P_1, ..., P_n, P_0$ і нехай базисному розв'язку *x* відповідає канонічна система (1). Матриці умов цих систем, тобто матриці, що складаються з векторів умов початкової і кінцевої системи, відповідній *x,* мають вигляд

$$A = (P_1, ..., P_m, P_{m+1}, ..., P_n); \;\; \alpha = (E, \; \alpha_{m+1}, ..., \alpha_n),$$

де $\alpha_j = \left(\alpha_{1j},...,\alpha_{mj}\right)^T$, $j = m+1,...,n,$ а E – одинична матриця порядку m.

Позначимо через $f\left(x\right)$ значення $\left(c, x\right)$, відповідне отриманому розв'язку (плану) x. Нехай $y = \left(y_1,..., y_n\right)$ – довільний допустимий розв'язок, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} y_i P_i = P_0. \tag{7}$$

Нехай $f\left(y\right)$ – значення функції $\left(c, x\right)$, відповідне допустимому розв'язку (плану) y. Покажемо, що за умови (6) $f\left(x\right) \geq f\left(y\right)$.

Використовуючи (6), (5) і змінюючи порядок підсумовування, одержимо:

$$f\left(y\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \leq \sum_{j=1}^{n} z_j y_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij}\right) y_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j\right) c_i. \tag{8}$$

Покажемо, що

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j = x_i.$$

Позначимо B матрицю, складену з векторів $P_1, P_2,..., P_m$, які називаються базисом, тобто $B = \left(P_1,..., P_m\right)$. Тоді, очевидно, $\alpha = B^{-1}A$ або $\alpha_j = B^{-1} \cdot P_j$, $j = 1,...,n.$

Отже, $P_j = B\alpha_j$, що можна записати ще так:

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} P_i, \quad j = 1,...,n. \tag{9}$$

Підставляючи ці значення в рівність (7), одержуємо

$$P_0=\sum_{j=1}^{n} y_j P_j=\sum_{j=1}^{n} y_j\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}P_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}y_j\right)P_i.$$

Оскільки $\boldsymbol{x}$ задовольняє початкову систему, то

$$P_0=\sum_{i=1}^{m} x_i P_i.$$

При цьому система векторів $P_1,...,P_m$ лінійно незалежна. Тому $x_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}y_j$ і з (8) одержуємо $f(y)\le f(x)$, що й треба було довести.

Ознаку необмеженості цільової функції на допустимій множині встановлює теорема:

Теорема 8. Якщо для деякого базисного розв'язку є змінна x_k, для якої $\Delta_k<0$ і $\alpha_{ik}\le 0,\ \forall\, i=1,...,m,$ то функція цілі задачі ЛП (на максимум) не обмежена зверху на допустимій множині.

Доведення. Нехай $x=(x_1,...,x_m,0,...,0)$ – базисний розв'язок, а x_k – небазисна змінна, що задовольняє умовам теореми. Покажемо, що вектор $x'=(x_1-\theta\alpha_{1k},...,x_m-\theta\alpha_{mk},0,...0,\theta,0,...,0)$, де $x_k=\theta,$ при будь-якому $\theta>0$ є допустимим. Дійсно, компоненти вектора x' є допустимим розв'язком задачі ЛП, оскільки на основі рівності (4.9) маємо:

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-\theta\alpha_{ik})P_i+\theta P_k=\sum_{i=1}^{m}x_iP_i-\theta\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ik}P_i+\theta P_k=P_0-\theta P_k+\theta P_k=P_0.$$

Знайдемо значення функції цілі, відповідні допустимому вектору x'

$$(c,x')=\sum_{i=1}^{m}c_i(x_i-\theta\alpha_{ik})+c_k\theta=\sum_{i=1}^{m}c_ix_i+\theta(c_k-z_k)=\sum_{i=1}^{m}c_ix_i-\theta\Delta_k.$$

Оскільки за умовою $\Delta_k < 0,$ то, узявши достатньо велике додатнє число $\theta,$ величину $\left(c, x'\right)$ можна зробити як завгодно великою, що й доводить теорему.

Зауваження 1. Якщо після деякої ітерації $\theta = 0,$ то у процесі перебору вершин за симплекс-методом деякі вершини можуть повторюватися, і не виключено, що може бути отримана послідовність базисних розв'язків (вершин), що періодично одержується і така, що не є розв'язком задачі ЛП. Це явище називається ***зациклюванням.*** Такі випадки є малоймовірними і на практиці не зустрічаються. Але існують спеціальні приклади, на яких зициклювання відбувається. ***Розроблені спеціальні методи усування зациклювання.***

Зауваження 2. У теоремі 7 для задачі мінімізації умова (6) має вигляд: $\Delta_k \le 0.$

Зауваження 3. У теоремі 8 для задачі мінімізації, якщо $\Delta_k > 0$ і $\alpha_{ik} \le 0 \quad \forall i,$ то функція цілі не обмежена знизу на допустимій множині.

Розглянемо приклад, у якому в 1-й симплекс таблиці виконується критерій оптимальності.

Приклад 4

$$x_1 + 2x_2 \to max$$
$$x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 7;$$
$$x_2 - x_3 + 2x_4 = 1;$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

Перевірку критерію оптимальності рекомендується здійснити самостійно.

Лекція 9. Практична реалізація симплекс-методу

1. Симплекс-метод на практиці

Нехай потрібно знайти максимальне значення функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ ... \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Тут a_{ij}, b_i, c_j $(i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n)$ – задані сталі числа $(m < n, b_i > 0)$.

Векторна форма цієї задачі має такий вигляд: знайти максимум функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

за умов

$$x_1P_1 + x_2P_2 + ... + x_mP_m + ... + x_nP_n = P_0; \tag{2}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, ..., n), \tag{3}$$

де

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}; \ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}; ... ; \ P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix}; \dots ; \ P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots\dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \ P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_1, \dots, P_m$ – лінійно незалежні (система лінійних векторів, що утворює базис m-вимірного простору) та виконується рівність

$$b_1 P_1 + b_2 P_2 + \dots + b_m P_m = P_0,$$

то згідно з означенням базисного розв’язку точка $X = \left(b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0\right)$ є базисним розв’язком (вершинною допустимої області).

Покладемо

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ik}, \ \left(k = 1, 2, \dots, n\right);$$

$$\Delta_k = z_k - c_k, \ \left(k = 1, 2, \dots, n\right).$$

Тобто

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ik} - c_k.$$

Згадаємо критерії оптимальності та ознаку необмеженості цільової функції.

Критерій оптимальності. Базисний розв’язок $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*, 0, 0, \dots, 0\right)$ задачі (1)–(3) є оптимальним, якщо $\Delta_k \geq 0$ для будь-якого $k \left(k = 1, 2, \dots, n\right)$.

Ознака необмеженості функції. Якщо $\Delta_k < 0$ для деякого k і серед чисел a_{ik} $\left(i = 1, 2, \dots, m\right)$ немає додатніх $\left(a_{ik} \leq 0\right)$, то цільова функція (1) задачі (1)–(3) не обмежена на допустимій множині.

Дослідження базисного розв’язку на оптимальність, а також подальший обчислювальний процес доцільно вести, якщо умови задачі і дані, одержані після визначення вихідного базисного розв’язку, записати так, як показано в табл. 1.

Таблиця 1

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
				P_1	P_2	…	P_l	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1k}	…	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2k}	…	a_{2n}
…	…	…		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
l	P_l	c_l	b_l	0	0	…	1	…	0	$a_{l,m+1}$	…	a_{lk}	…	a_{ln}
…	…	…		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	P_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mk}	…	a_{mn}
m+1			F_0	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

У стовпці $C_б$ цієї таблиці записуються коефіцієнти за невідомих цільової функції, які мають ті ж індекси, що й вектори даного базису.

У стовпці P_0 записуються (додатні) компоненти вихідного базисного розв’язку, у ньому ж у результаті обчислень одержують додатні компоненти оптимального розв’язку. Стовпці P_j – є коефіцієнтами розкладення цих векторів за векторами даного базису.

У табл. 1 перші m рядків визначаються вихідними даними задачі, а числа $(m+1)$-го рядка обчислюються. У цьому рядку в стовпці вектора P_0 записуються значення цільової функції, яке вона приймає при даному базисному розв’язку, а в стовпці P_j – значення $\Delta_j = z_j - c_j$.

Значення z_j знаходиться як скалярний добуток вектора P_j $(j=1,2,...,m)$ на вектор $C_б = (c_1, c_2, ..., c_n)$:

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \quad (j=1,2,...,n).$$

Значення F_0 дорівнює скалярному добутку вектора P_0 на вектор $C_б$:

$$F_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i.$$

Після заповнення табл. 1 вихідний базисний розв'язок перевіряють на оптимальність. Для цього передивляються елементи $(m+1)$-го рядка. При цьому можемо мати один з трьох випадків:

1) $\Delta_j \geq 0$ для $j = m+1, m+2, ..., n$ (при $j = 1, 2, ..., m,\ z_j = c_j$). Тому в цьому випадку числа $\Delta_j \geq 0$ для всіх *j* від 1 до *n*;

2) $\Delta_j < 0$ для деякого *j*, та всі відповідні цьому індексу величини $a_{ij} \leq 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$;

3) $\Delta_j < 0$ для деяких індексів *j*, та для кожного такого *j* хоча б одне з чисел $a_{ij} > 0$ додатне.

У першому випадку на основі критерію оптимальності базисний розв'язок є оптимальним. У другому випадку цільова функція не обмежена на допустимій множині, а у третьому випадку можна перейти від вихідного базисного розв'язку до нового базисного розв'язку, за якого значення цільової функції збільшиться. Цей перехід від одного базисного розв'язку до іншого реалізується виключенням із вихідного базису будь-якого з векторів і введенням в нього певного вектора. У ролі вектора, що вводиться в базис, можна взяти будь-який з векторів P_j, що має індекс *j*, для якого $\Delta_j < 0$.

Нехай, наприклад, $\Delta_k < 0$ і вирішено ввести до базису, вектор P_k.

Для визначення вектора, що підлягає виключенню з базису, знаходять

$$\Theta = \min_{i:a_{ik}>0} \frac{b_i}{a_{ik}} = \frac{b_l}{a_{lk}}.$$

Нехай цей мінімум досягається при $i = l$. Тоді з базису виключається вектор P_l, а число a_{lk} називають ***розв'язувальним*** (розв'язальним) елементом.

Стовпець і рядок, на перетині яких знаходиться розв'язувальний елемент, називають ***напрямними.***

Після знаходження напрямних рядка і стовпця знаходять новий базисний розв'язок і коефіцієнти розкладення векторів P_j через вектори нового базису, що відповідає новому базисному розв'язку. Це легко реалізувати методом Жордана-Гауса. Як показано в попередній лекції, додатні компоненти нового базисного розв'язку обчислюються за формулою:

$$b_i' = \begin{cases} b_i - \left(b_l / a_{lk}\right) \cdot a_{ik}\,; \; i \neq l, \\ b_l / a_{lk} \qquad\qquad\quad ; \; i = l, \end{cases} \tag{4}$$

і коефіцієнти розкладення векторів P_j через вектори нового базису – за формулою:

$$a_{ij}' = \begin{cases} a_{ij} - \left(a_{lj} / a_{lk}\right) a_{ik}\,; \; i \neq l, \\ a_{lj} / a_{lk} \qquad\qquad\quad ; \; i = l. \end{cases} \tag{5}$$

Після обчислення b_i' та a_{ij}' згідно з формулуми (4), (5) їх значення заносять в табл. 2. Елементи $(m+1)$-го рядка цієї таблиці можуть бути обчислені або за формулами

$$F_0' = F_0 - \left(b_l / a_{lk}\right)\Delta_k; \tag{6}$$

$$\Delta_j' = \Delta_j - \left(a_{lj} / a_{lk}\right)\Delta_k, \tag{7}$$

або на основі їх означень.

Таблиця 2

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
				P_1	P_2	…	P_l	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	b_1'	1	0	…	a_{1l}'	…	0	a_{1m+1}'	…	0	…	a_{1n}'
2	P_2	c_2	b_2'	0	1	…	a_{2l}'	…	0	a_{2m+1}'	…	0	…	a_{2n}'
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
j	P_k	c_k	b_l'	0	0	…	a_{ll}'	…	0	a_{lm+1}'	…	1	…	a_{ln}'
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	P_m	c_m	b_m'	0	0	…	a_{ml}'	…	1	a_{mm+1}'	…	0	…	a_{nn}'
m+1			F_0'	0	0	…	$z_l'-c_l$	…	0	$z_{m+1}'-c_{m+1}$	…	0	…	$z_n'-c_n$

Наявність двох способів знаходження елементів $(m+1)$-го рядка дозволяє вести контроль правильності обчислень. З формули (6) випливає, що при переході від одного базисного розв'язку до іншого найкраще було б ввести в базис вектор P_j, що має індекс *j,* при якому максимальним за абсолютною величиною є число $(b_l / a_{lj})\Delta_j$ $(\Delta_j < 0, a_{lj} > 0)$. Але з метою спрощення обчислювального процесу, у подальшому будемо вектор, що вводиться в базис, визначати, виходячи з максимальної абсолютної величини від'ємних чисел Δ_j. Якщо ж таких чисел декілька, то в базис будемо вводити вектор, що має такий же індекс, як і максимальне з чисел c_j, що визначаються даними числами Δ_j ($\Delta_j < 0$).

Отже, перехід від одного базисного розв'язку до іншого зводиться до переходу від однієї симплекс-таблиці до іншої. Елементи нової симплекс-таблиці можна обчислювати як за допомогою рекурентних формул (4)–(7), так і за правилами, що безпосередньо витікають із них. Ось ці правила:

I. У стовпцях векторів, що входять в базис, на перетині стовпців і рядків однойменних векторів проставляються одиниці, а всі останні елементи даних стовпців покладають нулями.

II. Елементи векторів P_0, P_j в рядку нової симплекс-таблиці, в якій записаний вектор, що вводиться до базису, одержують з елементів цього ж рядка вихідної таблиці, діленням їх на величину розв'язувального елементу. У стовпці $c_б$ в рядку вектора, що вводиться, проставляємо величину c_k, де *k* – індекс вектора, що вводиться до базису.

III. Усі інші елементи стовпців вектора P_0, P_j нової симплекс-таблиці обчислюються за ***правилом прямокутника.***

Для обчислення будь-якого з цих елементів за допомогою розв'язального елемента знаходять три числа:

1) число, що стоїть у вихідній симплекс-таблиці на місці шуканого елемента нової симплекс-таблиці;

2) число, що стоїть у вихідній симплекс-таблиці на перетині рядка, у якому знаходиться шуканий елемент нової симплекс-таблиці, і стовпця, відповідного вектору, що вводиться в базис;

3) число, що стоїть у новій симплекс-таблиці на перетині стовпця, у якому стоїть шуканий елемент, і рядка вектора, що вводиться в базис (як відзначено вище, цей рядок одержано з рядка вихідної симплекс-таблиці діленням її елементів на розв'язувальний елемент).

Ці три числа разом із розв’язальним елементом утворюють прямокутник, три вершини (№ 1, № 2, р. е.) якого відповідають числам, що знаходяться у вихідній симплекс-таблиці, а четверте (№ 3') – числу, з нової симплекс-таблиці. Для визначення шуканого елементу нової симплекс-таблиці від першого числа (№ 1) віднімають добуток другого (№ 2) і третього (№ 3') (рис. 1, 2):

$$\boxed{№\,1'} = \boxed{№\,1} - \boxed{№\,2} \cdot \boxed{№\,3'}\,.$$

Рисунок 1 – Схема обчислення нового елемента симплекс-таблиці

№ 1		№ 2
№ 3/№ 3'		*р. е.*

Рисунок 2 – Схема для обчислень. У клітині *р. е.* стоїть розв’язальний елемент

IV. Після заповнення нової симплекс-таблиці продивляються елементи $(m+1)$-го рядка. Якщо всі $\Delta'_j = z'_j - c_j \geq 0,$ то новий базисний розв’язок є оптимальним. Якщо серед указаних чисел є від’ємні, то, використовуючи вищеописану процедуру, знаходять новий базисний розв’язок. Цей процес продовжують, доки не одержать оптимальний розв’язок, або не визначать її нерозв’язність.

Отже, знаходження оптимального розв'язку симплекс-методом включає такі етапи:

1. Знаходять базисний розв'язок.
2. Складають симплекс-таблицю.
3. З'ясовують, чи є хоча б одне від'ємне число Δ_j. Якщо немає, то знайдений є оптимальним. Якщо ж серед чисел Δ_j є від'ємні, то або установлюють нерозв'язність задачі, або переходять до нового базисного розв'язку.
4. Знаходять напрямні стовпець і рядок. Напрямний стовпець визначають найбільшим за абсолютною величиною від'ємним числом Δ_j, а напрямний рядок – мінімальним відношенням компонент стовпця вектора P_0 до додатніх компонент напрямного стовпця.
5. За формулами (4)–(7) визначають додатні компоненти нового базисного розв'язку, коефіцієнти розкладення векторів P_j по векторам нового базису, числа F_0', Δ_j'. Усі ці числа записують в нову симплекс-таблицю.
6. Перевіряють знайдений базисний розв'язок на оптимальність. Якщо план не оптимальний та необхідно перейти до нового базисного плану, то повертаються до етапу 4, а у випадку одержання оптимального плану або встановлення її нерозв'язності процес розв'язування задачі закінчують.

2. Приклади

Приклад 1. Знайти

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to max$$

за умов

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360; \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192; \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180, \quad x_i \ge 0; \quad i = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Маємо:

$$P_0=\begin{pmatrix}360\\192\\180\end{pmatrix};P_1=\begin{pmatrix}18\\6\\5\end{pmatrix};P_2=\begin{pmatrix}15\\4\\3\end{pmatrix};P_3=\begin{pmatrix}12\\8\\3\end{pmatrix};P_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};P_5=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};P_6=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Таблиця 3

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0	$b_i\ /\ a_{ik}$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0	360/12=30
2	P_5	0	192/ 24	6/ 3/4	4/ 1/2	8/ 1	0/ 0	1/ 1/8	0/ 0	192/8=24←
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1	180/3=60
4			0	–9	–10	–16 ↑	0	0	0	

$$F_0=\left(C_б,P_0\right)=0;\ \ z_1=\left(C_б,P_1\right)=0;\ \ \Delta_1=z_1-c_1=-9;$$

$$z_2=\left(C_б,P_2\right)=0;\ \ \Delta_2=z_2-c_2=-10;$$

$$z_3=\left(C_б,P_3\right)=0;\ \ \Delta_3=z_3-c_3=-16;\ \ \Delta_4=\Delta_5=\Delta_6=0.$$

Таблиця 3 дає допустимий розв’язок:

$$X=\left(0,0,0,360,192,180\right);\ \ F_0=0.$$

Зручно для розрахунків другий (що був напрямним) рядок нової таблиці записувати у стару таблицю у другий (під «слешами») рядок.

Позначимо $P_j\left(i\right)$ – число, що стоїть у рядку i стовпця P_j.

$P_0\left(1\right)=360-24\cdot12=72,$ $\qquad$ $P_1\left(1\right)=18-3/4\cdot12=9,$

$P_0\left(3\right)=180-24\cdot3=108,$ $\qquad$ $P_1\left(3\right)=5-3/4\cdot3=11/4,$

$F_0=0-24\cdot\left(-16\right)=384,$ $\qquad$ $P_1\left(4\right)=\Delta_1=-9-3/4\cdot\left(-16\right)=3,$

інше обчислюється аналогічно.

Таблиця 4

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0	b_i / a_{ik}
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	P_4	0	72/ 8	9/ 1	9/ 1	0/ 0	1/ 1/9	–3/2/ –1/6	0/ 0	72/9=8←
2	P_3	16	24	¾	½	1	0	1/8	0	24/0,5=48
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	–3/8	1	108/1,5=72
4			384	3	–2↑	0	0	2	0	

Допустимий розв'язок та значення цільової функції такі: $X=(0,0,24,72,0,108)$, $F_0=384$. Існує $\Delta=-2<0$, та в P_2 є додатні елементи. Перерахуємо табл. 4.

$P_0(2)=24-8\cdot 1/2=20,$

$P_0(3)=108-8\cdot 3/2=96,$

$P_0(4)=F_0=384-8\cdot(-2)=400,$

$P_4(2)=0-1/9\cdot 1/2=-1/18,$

$P_4(3)=0-1/9\cdot 3/2=-1/6,$

$P_4(4)=0-1/9\cdot(-2)=2/9,$

$P_1(2)=3/4-1\cdot 1/2=1/4,$

$P_1(3)=11/4-1\cdot 3/2=5/4,$

$P_1(4)=3-1\cdot(-2)=5,$

$P_5(2)=1/8-(-1/6)\cdot 1/2=5/24,$

$P_5(3)=-3/8-(-1/6)\cdot 3/2=-1/8,$

$P_5(4)=2-(-1/6)\cdot(-2)=5/3$

Таблиця 5

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	–1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	–1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	-–1/6	–1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

Маємо з табл. 5 $X=(0,8,20,0,0,96)$, $F_{max}=400$. Допустимий розв'язок X є оптимальним, оскільки всі оцінки не від'ємні.

Приклад 2. Знайти максимум функції $F=2x_1-6x_2+5x_5$ за умов

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20; \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24; \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,6}.$$

У векторній формі

$$x_1P_1 + x_2P_2 + ... + x_6P_6 = P_0,$$

де маємо

$$P_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix}; \; P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \; P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \; P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \; P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}; \; P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таблиця 6

i	Базис	$C_б$	P_0	2	–6	0	0	5	0	b_i / a_{ik}
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	P_3	0	20	–2	1	1	0	1	0	20
2	P_4	0	24	–1	–2	0	1	3	0	8←
3	P_6	0	18	3	–1	0	0	–12	1	–
4			0	–2	6	0	0	–5↑	0	

$P_0(1) = 20 - 1 \cdot 8 = 12;$

$P_0(3) = 18 - (-12) \cdot 8 = 114;$

$P_0(4) = 0 - (-5) \cdot 8 = 40;$

$P_1(1) = -2 - 1 \cdot (-1/3) = -5/3;$

$P_1(3) = 3 - (-12) \cdot (-1/3) = -1;$

$P_1(4) = -2 - (-5) \cdot (-4/3) = -11/3;$

$P_2(4) = 6 - (-5) \cdot (-2/3) = 8/3;$

$P_3(4) = 0 - (-5) \cdot 1/3 = 5/3.$

Таблиця 7

i	Базис	$C_б$	P_0	2	–6	0	0	5	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	12	–5/3	5/3	1	–1/3	0	0
2	P_5	5	8	–1/3	–2/3	0	1/3	1	0
3	P_6	0	114	–1	–9	0	4	0	1
4			40	–11/3↑	8/3	0	5/3	0	0

$\exists\Delta_j < 0\ \left(\Delta_1\right),$ для якого $\forall a_{1i} < 0,$ отже, задача не має оптимального розв’язку, оскільки цільова функція не обмежена (необмежено зростає).

Приклад 3. Знайти максимум функції F за заданих умов і дати геометричну інтерпретацію розв’язування задачі:

$$F = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \to max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9; \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 7; \end{cases}$$
$$x_1, x_2, ..., x_5 \geq 0.$$

Тут

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};\ P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ P_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо

$$x_3 = 5 - x_1 - x_2;\ \ x_4 = 9 - 2x_1 - x_2;\ \ x_5 = 7 - x_1 - 2x_2$$

та підставимо в усі вирази задачі:

$$F = 2x_1 + x_2 - \left(5 - x_1 - x_2\right) + \left(9 - 2x_1 - x_2\right) - \left(7 - x_1 - 2x_2\right) =$$
$$= \cancel{2x_1} + \underline{\underline{x_2}} - 5 + \underline{x_1} + \cancel{\underline{\underline{x_2}}} + 9 - \cancel{2x_1} - \cancel{\underline{\underline{x_2}}} - 7 + \underline{x_1} + \underline{\underline{2x_2}} = 2x_1 + 3x_2 - 3$$

за умов $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5; \\ 2x_1 + x_2 \le 9; \\ x_1 + 2x_2 \le 7; \end{cases}$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

Отриману задачу можна розв'язати графічно, порівнявши розв'язок з аналітичним (рис. 3).

Таблиця 8

i	Базис	$C_б$	P_0	2	1	–1	1	–1	b_i / a_{ik}
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
1	P_3	–1	5	1	1	1	0	0	5
2	P_4	1	9	2	1	0	1	0	9
3	P_5	–1	7/ 7/2	1/ 1/2	2 /1	0/ 0	0/ 0	1/ 1/2	3,5←
4			–3	–2	–3↑	0	0	0	

Таблиця 9

i	Базис	$C_б$	P_0	2	1	–1	1	–1	b_i / a_{ik}
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
1	P_3	–1	3/2/3	1/2 /1	0/ 0	1/ 2	0/ 0	–1/2 /–1	3←
2	P_4	1	11/2	3/2	0	0	1	–1/2	11/3
3	P_2	1	7/2	1/2	1	0	0	1/2	7
4			15/2	–1/2↑	0	0	0	3/2	

Таблиця 10

i	Базис	$C_б$	P_0	2	1	–1	1	–1
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	2	3	1	0	2	0	–1
2	P_4	1	1	0	0	–3	1	1
3	P_2	1	2	0	1	–1	0	1
4			9	0	0	1	0	1

У табл. 10 маємо: $\forall \Delta_j > 0$, отже, одержано оптимальний розв'язок. Позначимо базисні допустимі розв'язки з табл. 8–10 відповідно так:

$$X_I=(0,0,5,9,7);\ \ A=(0,0);\ \ X_{II}=(0,7/2,3/2,11/2,0);$$
$$B=(0;\ 7/2);\ \ X_{III}=(3,2,0,1,0);\ \ C=(3,2).$$

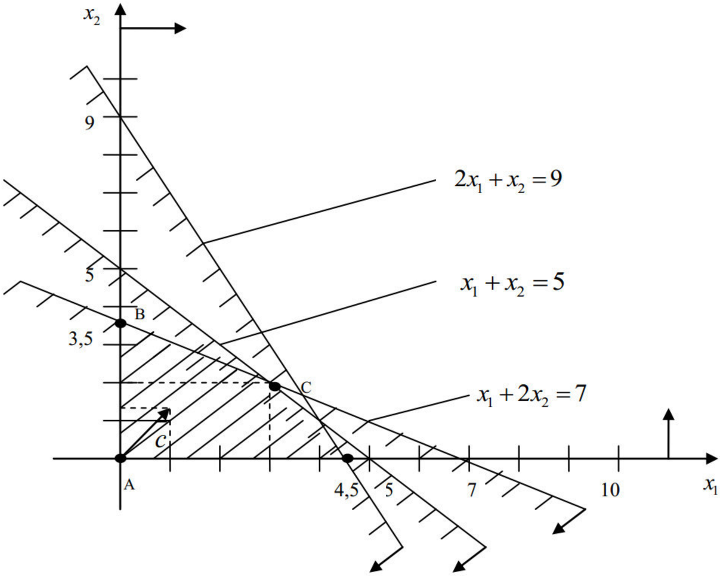


Рисунок 3 – Геометрична інтерпретація прикладу 3

Лекція 10. Метод штучного базису (М-метод)

1. Розширена задача та її зв'язок із вихідною ЗЛП

Нехай потрібно знайти максимум функції

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{1}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = 1, \ldots, n\right), \tag{3}$$

де $b_i > 0$ $\left(i = 1, \ldots, m\right)$, $m < n$ і серед векторів $P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \ldots. \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{21} \\ \ldots. \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots,$ $P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots. \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ ***немає m різних одиничних*** (тобто не має базису).

Означення 1. Задача визначення максимального значення функції

$$F^* = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n - M x_{n+1} - \ldots - M x_{n+m} \tag{4}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \quad (5)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,\ldots,n+m), \quad (6)$$

де M – деяке достатньо велике *додатнє* число, називається ***розширеною задачею*** відносно задачі (1)–(3).

Базисний розв’язок (опорний план) $X = (0,\ldots,0,b_1,\ldots,b_m)$ називається ***штучним*** базисним розв’язком. Вектори $P_{n+1},\ldots,P_{n+m}$, змінні $x_{n+1},\ldots,x_{n+m}$ називають ***штучними.***

Розв’язування розширеної задачі проводять симплекс-методом.

Переконаємося, що при достатньо великих M розширена задача має розв’язок, що не залежить від M, або його не має.

Дійсно визначення цих фактів за критеріями оптимальності та необмеженості цільової функції ґрунтується на знаках оцінок $\Delta_k = \sum_{j=1}^{m} c_{i_j} a_{jk} - c_k$, де i_j – номери базисних змінних. Величина M входить у коефіцієнти цільової функції, а в інші параметри, що визначають Δ_k, параметр M не входить, отже, оцінки приймають вигляд

$$\Delta_k = \gamma_k + \delta_k M.$$

При $\delta_k \neq 0$ знак Δ_k визначає δ_k, оскільки $M > 0$ і достатньо велике, щоб «поглинути» γ_k. Зауважимо, що γ_k, δ_k та праві частини обмежень від M не залежать. Це ***доводить,*** що ***розв’язок або буде*** (для всіх великих M однаковий), ***або цільова функція необмежена.*** Розв’язок може бути одержаний, як зазначалось, симплекс-методом.

Теорема 1. Якщо в оптимальному розв'язку (плані) $\bar{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, x^*_{n+1}, ..., x^*_{n+m}\right)$ розширеної задачі (4)–(6) ***значення штучних змінних*** $x^*_{n+i} = 0$ $\left(i = 1, ..., m\right)$, то $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ є ***оптимальним розв'язком (планом)*** задачі (1)–(3).

Доведення. Дійсно, очевидно те, що $x^* = \left(x_1^*, ..., x_n^*\right)$ – ***допустимий розв'язок*** $\left(x_i^* \ge 0,\ x^*_{n+j} = 0,\ i = 1, ..., n;\ j = 1, ..., m\right)$ задачі (10.1)–(10.3), якщо $\bar{x}^*$ – оптимальний розв'язок розширеної задачі. Отже, усі обмеження вихідної задачі в x^* виконуються. Більш того x^* є базисним розв'язком вихідної задачі, оскільки вектори, що відповідають його додатнім компонентам ***входять в базис оптимального розв'язку розширеної задачі,*** а отже ***є лінійно незалежними.*** Оптимальність x^* для вихідної задачі доведемо так. Нехай $x = \left(x_1, ..., x_n\right)$ – довільний допустимий розв'язок вихідної задачі, тоді очевидно, що $\bar{x} = \left(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{m+n}\right) =$ $= \left(x_1, ... x_n, 0, ..., 0\right)$ – ***допустимий розв'язок розширеної задачі.*** Згадаємо, що оптимальний розв'язок розширеної задачі має вигляд:

$\bar{x}^* = \left(x_1^*, ..., x^*_{m+n}\right) = \left(x_1^*, ... x_n^*, 0, ..., 0\right)$. Отже, маємо:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \sum_{i=1}^{n+m} c_i \bar{x}_i \le \sum_{i=1}^{n+m} c_i x_i^* = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^*,$$

тобто

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^*,$$

що і означає оптимальність x^*.

2. Реалізація М-методу

Значення F_0 та $\Delta_j = z_j - c_j$ залежать від M (і складаються із двох частин, одна залежить від M, а інша – ні).

Вихідні дані розширеної задачі, а також значення F_0 та Δ_j заносять в таблицю, яка містить на один рядок більше ніж звичайна. При цьому в $(m+2)$-й рядок заносять коефіцієнти при M, а в $(m+1)$-й – доданки, що не містять M.

Під час переходу від одного базисного розв'язку до іншого в базис уводять вектор, що відповідає найбільшому за абсолютною величиною від'ємному числу $(m+2)$-го рядка. (***Штучний вектор, що виключено з базису в результаті деякої ітерації, у подальшому немає сенсу вводити ні в один з наступних базисів***).

Перерахунок симплекс-таблиць з переходом від одного базисного розв'язку до іншого проводять за загальними правилами симплекс-методу.

Ітераційний процес по $(m+2)$-му рядку ведуть доти, доки:

1) або всі штучні вектори будуть виключені з базису;

2) або не всі штучні вектори виключені, але $(m+2)$-й рядок не містить більше від'ємних елементів в стовпцях $P_1,...,P_{m+n}$.

У першому випадку одержаний базис відповідає деякому базисному розв'язку вихідної задачі й визначення її оптимального плану продовжують за $(m+1)$-м рядком.

У другому випадку, якщо елемент, що стоїть в $(m+2)$-му рядку стовпця вектора P_0, – ***від'ємний,*** вихідна задача ***не має розв'язку.*** Якщо ж він дорівнює ***нулю,*** то знайдений базисний розв'язок вихідної задачі є ***виродженим*** і базис містить принаймні один із векторів ***штучного базису.***

Зауважимо, що виродженим розв'язком називають той, у якого більш ніж $n-m$ елементів дорівнюють нулю. Використання його може призвести до зациклювання, тобто переходу по ланцюгу розв'язків, у яких не змінюється цільова функція, і не отримання, у зв'язку з цим, оптимального розв'язку. Існують методи, які дозволяють обійти зациклювання.

Розглянемо доведення такого факту.

Твердження 2. Якщо в симплекс-таблиці ***елемент,*** що стоїть у $(m+2)$-му рядку у стовпці P_0, – ***від'ємний,*** $(m+2)$-й рядок не ***містить від'ємних елементів*** у стовпцях $P_1,...,P_{m+n}$, ***не всі штучні вектори виключені з базису,*** то вихідна задача не має розв'язку.

Доведення. Оскільки у стовпцях $P_1,...,P_{m+n}$ в $(m+2)$-му рядку не має від'ємних чисел $\delta_k \geq 0$, то це (при достатньо великому *M*) означає, що всі оцінки $\Delta_k = \gamma_k + \delta_k M$ в розширеній задачі невід'ємні, отже, симплекс-таблиця дає її оптимальний розв'язок. Позначимо його $\bar{x}^* = (x^*_1,...,x^*_{n+m})$. Оскільки не всі штучні змінні вийшли з базису, то серед чисел $x^*_{n+1},...,x^*_{n+m}$ є додатні. Оптимальне значення цільової функції розширеної задачі має вигляд:

$$F_0\left(\bar{x}^*\right) = c_1 x^*_1 + ... + c_n x^*_n - M\sum_{i=1}^{m} x^*_{n+i},$$

при цьому

$$\sum_{i=1}^{m} x^*_{n+i} > 0.$$

Припустимо від супротивного, що у вихідної задачі існує допустимий розв'язок, який позначимо $x = (x_1,...,x_n)$, тоді точка $x = \left(x_1,...,x_{n+m}\right) = (x_1,...,x_n,0,...,0)$ буде допустимим розв'язком розширеної задачі. $F_0\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ – значення цільової функції для $\tilde{x}$ – від *M* не залежить і в силу допустимості $\tilde{x}$ та оптимальності $\bar{x}^*$ співвідноситься з $F_0\left(\bar{x}^*\right)$ так: $F_0\left(x\right) \leq F_0\left(\bar{x}^*\right)$. Але останнє при певному *M* може бути як завгодно малим і стати менше сталої $F_0\left(x\right)$. ***Протиріччя.*** Отже, жодного допустимого розв'язку у вихідної задачі немає. Доведення завершено.

Зауважимо, що якщо вихідна задача містить декілька базисних векторів, то їх доцільно включити в штучний базис.

Отже, розв'язування задачі (1)–(3) методом штучного базису включає такі основні етапи:

1) складаємо розширену задачу (4)–(6);

2) знаходимо базисний розв'язок розширеної задачі;

3) за допомогою звичайних обчислень симплекс-методу виключаємо штучні вектори з базису. У результаті або знаходимо базисний розв'язок вихідної задачі (1)–(3), або встановлюємо її нерозв'язність;

4) використовуючи знайдений базисний розв'язок задачі (1)–(3), або знаходимо симплекс-методом оптимальний розв'язок задачі, або встановлюємо її нерозв'язність.

3. Приклади

Приклад 1. [1, задача 1. 44]. Знайти мінімум функції $F=-2x_1+3x_2-6x_3-x_4$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3+x_4=24; \\ x_1+2x_2+4x_3\le 22; \\ x_1-x_2+2x_3\ge 10; \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

Розв'язок. Зведемо до канонічної форми дану ЗЛП:

$$F_1=2x_1-3x_2+6x_3+x_4\to max,$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3+x_4=24; \\ x_1+2x_2+4x_3+x_5=22; \\ x_1-x_2+2x_3-x_6=10; \\ x_j\ge 0 \quad (j=1,\ldots,6). \end{cases}$$

$$P_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix};\; P_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix};\; P_3=\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix};\; P_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\; P_5=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\; P_6=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Додамо у третє рівняння x_7 і запишемо розширену задачу.

$$F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - Mx_7 \to max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 + x_7 = 10; \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,7}. \end{cases}$$

Розширена задача має базисний розв'язок $x = (0,0,0,24,22,0,10)$, що визначається векторами P_4, P_5, P_7.

Складаємо таблицю 1-ї ітерації (табл. 1), що містить п'ять рядків. Для заповнення 4-го та 5-го рядка знаходимо F_0 і значення різниць $\Delta_j = z_j - c_j$.

$F_0 = 24 - 10M;$ $\quad z_1 - c_1 = 0 - M;$ $\quad z_2 - c_1 = 4 + M;$ $\quad z_3 - c_3 = -8 - 2M;$ $\quad z_4 - c_4 = 0;$ $\quad z_5 - c_5 = 0;$ $\quad z_6 - c_6 = 0 + M;$ $\quad z_7 - c_7 = 0.$ Ці значення записуємо: один додаток (без M) – у 4-й рядок; коефіцієнт при M – у п'ятий.

Таблиця 1

i	Базис	$C_б$	P_0	2	–3	6	1	0	0	$-M$	b_i / a_{ik}
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
1	P_4	1	24	2	1	–2	1	0	0	0	–
2	P_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0	5,5=22/4
3	P_7	–M	10/ 5	1/ 1/2	–1/ –1/2	2/ 1	0/ 0	0/ 0	–1/ –1/2	1/ 1/2	5=10/2 *min* ←
4			24	0	4	–8	0	0	0	0	
5			–10	$-\underline{1}$	1	$-\underline{2}$	0	0	1	0	

↑

Отже, P_7 виключається з базису й таблиці. (Тому не буде й 5-го рядку).

Таблиця 2

i	Базис	$C_б$	P_0	2	–3	6	1	0	0	b_i / a_{ik}
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	P_4	1	34	3	0	0	1	0	–1	
2	P_5	0	2/ 1	–1/ –1/2	4/ 2	0/ 0	0/ 0	1/ 1/2	2/ 1	←
3	P_3	6	5	1/2	–1/2	1	0	0	–1/2	
4			64	4	0	0	0	0	$-\underline{4}$	

Табл. 2 дає базисний розв'язок $X = (0,0,5,34,2)$.

Таблиця 3

i	Базис	$C_б$	P_0	2	–3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	1	35	5/2	2	0	1	1/2	0
2	P_6	0	1	–1/2	2	0	0	1/2	1
3	P_3	0	11/2	1/4	1/2	1	0	1/4	0
4			68	2	8	0	0	2	0

З табл. 3 одержуємо оптимальний розв'язок:

$$X = (0,0,11/2,35,0,1); \;\; F_{max} = 68 \; (F_{min} = -68).$$

Приклад 2. Розв'язати задачу, давши їй геометричну інтерпретацію.

$$x_1 + 2x_2 \to max;$$

$$x_1 + x_2 \le 5;$$

$$2x_1 + 3x_2 \ge 6;$$

$$x_1 \ge 0;$$

$$x_2 \ge 0.$$

$$x_1 + 2x_2 - Mx_5 \to max;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5;$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 6;$$

$$x_1 \ge 0;$$
$$x_2 \ge 0;$$
$$x_3 \ge 0;$$
$$x_4 \ge 0.$$

Розв'язування наведено в табл. 4, а ілюстрація – на рис. 1.

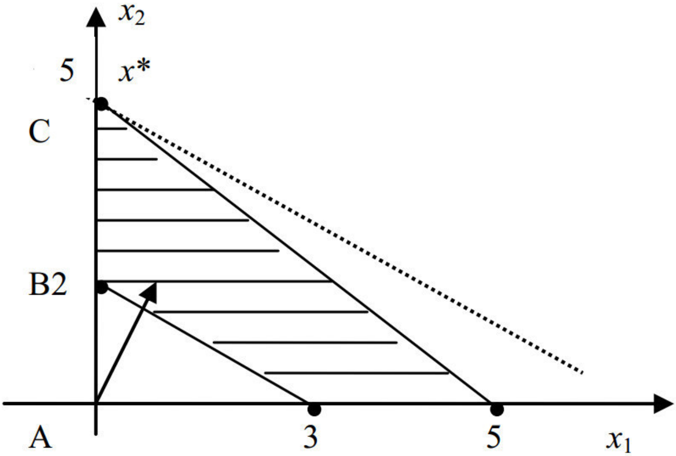


Рисунок 1 – Ілюстрація до прикладу 2

Інформаційні джерела

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / Акулич И. Л. – Москва : Высш. шк., 1986. – 319 с.

Таблиця 4

	i	Базис	$C_б$	P_0	1	2	0	0	$-M$	b_i / a_{ik}
					P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
	1	P_3	0	5	1	1	1	0	0	5
A:	2	P_5	$-M$	6/ 2	2/ 2/3	3/ 1	0/ 0	–1/ –1/3	1/ 1/3	2 ←
	3			0	–1	–2	0	0	0	
	4			–6	–2	–3 ↑	0	1	0	
	1	P_3	0	3/ 9	1/3 /1	0/ 0	1/ 3	1/3/ 1		←
B:	2	P_2	2	2	2/3	1	0	–1/3	1/3	
	3			4	1/3	0	0	–2/3 ↑		
	4			0	0	0	0	0		
	1	P_4	0	9	1	0	3	1		
C:	2	P_2	2	5	.	1	.	0		
	3			10	1	0	2	0		

$$x^* = (0;5;0;9;0); \quad F_{max} = 10.$$

Лекція 11–12. Модифікований симплекс-метод (МСМ)

1. Основні формули МСМ

Для більш ефективної організації обчислювального процесу симплекс-метод використовують в іншій, так званій модифікованій формі.

В алгоритмі симплекс-методу суттєвим є аналіз оцінок

$$\Delta_j = z_j - c_j = \sum_{k=1}^{m} c_{i_k} a_{i_k j} - c_j, \tag{1}$$

де $i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m$ – номери базисних векторів;

c_j – коефіцієнт цільової функції біля змінної x_j ;

$a_{i_1 j}, ..., a_{i_m j}$ – коефіцієнти розкладання векторів P_j по векторам базису $P_{i_1},\ P_{i_2}, ...,\ P_{i_m}$, тобто

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j} \\ ... \\ a_{i_m j} \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot P_j, \tag{2}$$

де B^{-1} – матриця обернена до матриці $B = \left(P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_m}\right)$ – матриці, складеної з векторів базису.

Оцінки знаходять на кожній ітерації симплекс-методу. Для цього на кожній ітерації знаходять $a_{i_1 j},\ ...,\ a_{i_m j}$. У модифікованому симплекс-методі такої необхідності немає, тому що на кожній ітерації обчислюють вектор

$$\Omega = C_\delta B^{-1}, \tag{3}$$

де $C_\delta = \left(c_{i_1}, ..., c_{i_m}\right)$.

З (1) та (2) маємо

$$\Delta_j = C_\delta B^{-1} P_j - c_j; \tag{4}$$

$$\Delta_j = \Omega P_j - c_j. \tag{5}$$

Отже, замість знаходження на кожній ітерації для кожного вектора P_j його координат у базисі $P_{i_1}, ..., P_{i_m}$ за (2), а потім для знаходження Δ_j за (4) множити C_δ на $B^{-1}P_j$, можна;

1) спочатку знайти Ω (за (3);
2) потім за (5) для кожного P_j знайти Δ_j.

У багатьох випадках модифікований таким чином алгоритм симплекс-методу є більш ефективним (економним з точки зору кількості операцій).

2. Алгоритм модифікованого симплекс-методу

Нехай є ЗЛП у кононічній формі:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, ..., \ m;$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, \ 2, ..., n,$$

тут $b_i > 0 \ \ \forall \ i = 1, 2, ..., m.$

Нехай знайдено базисний допустимий розв'язок, що визначається базисом $P_{i_1}, ..., P_{i_m}$. Можемо утворити матрицю $B = \left(P_{i_1}, \ ..., \quad P_{i_m} \right)$ і знайти до неї обернену B^{-1}.

Результати обчислень зручно представляти у вигляді таблиць. Розглядають основні та допоміжну таблиці. Допоміжну таблицю використовують при переході від однієї до іншої основної таблиць.

Розглянемо побудову таблиць. Почнемо з допоміжної.

Таблиця 1 – Вигляд допоміжної таблиці в МСМ

i	Базис	C_δ	P_0	c_1	c_2	…	c_n	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(2)}$	…	$\Omega^{(k)}$
				P_1	P_2	…	P_n				
1	P_{i_1}	C_{i_1}						$\omega_1^{(1)}$	$\omega_1^{(2)}$	…	$\omega_1^{(k)}$
2	P_{i_2}	C_{i_2}						$\omega_2^{(1)}$	$\omega_2^{(2)}$	…	$\omega_2^{(k)}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	P_{i_m}	C_{i_m}						$\omega_m^{(1)}$	$\omega_m^{(2)}$		$\omega_m^{(k)}$
$m+1$	$\Delta_j^{(1)}$			$\Delta_1^{(1)}$	$\Delta_2^{(1)}$	…	$\Delta_n^{(1)}$				
$m+2$	$\Delta_j^{(2)}$			$\Delta_1^{(2)}$	$\Delta_2^{(2)}$	…	$\Delta_n^{(2)}$				
…	…			…	…	…	…				
$m+k$	$\Delta_j^{(k)}$			$\Delta_1^{(k)}$	$\Delta_2^{(k)}$	…	$\Delta_n^{(k)}$				

Допоміжна таблиця схожа на звичайну симплекс-таблицю. На відміну від неї має додаткові рядки (з номерами $m+1$, $m+2$, $\ldots, m+k$), де записують значення $\Delta_1^{(1)},\ldots,\Delta_n^{(1)};$ $\Delta_1^{(2)},\ldots,\Delta_n^{(2)};$ ...; $\Delta_1^{(k)},\ldots,\Delta_n^{(k)},$ що отримують в процесі розв'язування задачі. Крім додаткових рядків справа до таблиці приписують додаткові k стовпців для координат векторів $\Omega^{(1)},\Omega^{(2)},\ldots,\Omega^{(k)}$, що розраховують при розв'язуванні задачі. Таким чином, допоміжна таблиця має вигляд табл. 1.

Основна таблиця (табл. 2) відрізняється від звичайної симплекс-таблиці тим, що:

1) в таблицю записують стовпці A_i – стовпці з матриці B^{-1} (а не вектори умов P_j);

2) в $m+1$ рядку записують координати вектора Ω (а не оцінки Δ_j);

3) табл. 2 має додатковий стовпець P^*_s – координати вектора P_s у базисі P_{i_1}, $P_{i_2},\ldots,$ P_{i_m} – вектора, який потрібно ввести в базис на наступній ітерації.

Основна табл. 2 схожа на звичайну симплекс-таблицю тим, що має $m+1$ рядок, перші стовпці: і (номер рядка), базис та вектори C_δ, P_0.

Таблиця 2 – Основна таблиця МСМ

i	Базис	C_δ	P_0	A_1	A_2	…	A_m	P_s^*
1	P_{i_1}	C_{i_1}	b_{i_1}	α_{11}	α_{12}	…	α_{1m}	$\beta_{i_1 s}$
2	P_{i_2}	C_{i_2}	b_{i_2}	α_{21}	α_{22}	…	α_{2m}	$\beta_{i_2 s}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…
r	P_{i_r}	C_{i_r}	b_{i_r}	α_{r1}	α_{r2}		α_{rm}	$\beta_{i_r s}$
…	…	…	…	…		…		
m	P_{i_m}	C_{i_m}	b_{i_m}	α_{m1}	α_{m2}	…	α_{mm}	$\beta_{i_m s}$
m+1	$\Omega^{(1)}$		F_0	$\omega_1^{(1)}$	$\omega_2^{(1)}$	…	$\omega_m^{(1)}$	$\Delta_s^{(1)}$

$\Omega^{(1)} = \left(\omega_1^{(1)}, \ldots, \omega_m^{(1)}\right)$ $\qquad$ $\Delta_s^{(1)} < 0$

Визначення вектора P_s^* проводять так:

1) знаходять вектор $\Omega^{(1)} = C_\delta \cdot B^{-1}$ (за (3), тобто i-та компонента $\Omega^{(1)}$ – це скалярний добуток $(C_\delta,\ A_i) = \omega_i^{(1)}$.

2) знайдені координати вектора $\Omega^{(1)}$ записують в останній рядок основної таблиці МСМ (табл. 2), а в допоміжній таблиці МСМ (табл. 1) – в поточний останній стовпець $\Omega^{(1)}$;

3) за формулою (5) ($\Delta_j = \Omega P_j - c_j$) знаходять $\Delta_j^{(1)}$, записують їх в поточний останній рядок допоміжної таблиці МСМ;

4) перевіряють розв'язок на оптимальність: якщо для всіх $j = 1,\ 2, \ldots, n,\ \Delta_j^{(1)} \geq 0$ – розв'язок оптимальний;

5) якщо існує $\Delta_j^{(1)} < 0,$ то задача або нерозв'язна, або можна перейти до нового базисного розв'язку зі значенням цільової функції не меньшим ніж є.

Для превірки (аналізу) цієї ситуації вибирають

$$\max_{\substack{1 \le j \le n \\ \Delta_j^{(1)} < 0}} \left|\Delta_j^{(1)}\right| = \left|\Delta_s^{(1)}\right|,$$

якщо таких s декілька – вибирають довільне. Так вибирають номер s стовпця (вектора) P_s (P_s^*) для запису в останній стовпець основної таблиці МСМ (в перші m рядків);

6) для обчислення координат цього вектор-стовпця в поточному базисі беруть матрицю B^{-1} (стовпці $A_1, \ldots, A_m$ з табл. 2) і множать на вектор P_s (з таблиці 1). Так визначають вектор-стовпець P_s^* з основної таблиці МСМ.

Аналіз чи нерозв'язна задача (чи необхідний подальший перерахунок таблиць) роблять на основі аналізу координат $\beta_{i_r s}$ вектора P_s^* з табл. 2. Якщо всі $\beta_{i_k s} \leq 0,\ k = 1,\ 2,\ ...,\ m,$ то задача ***нерозв'язна.*** Якщо існує $\beta_{i_k s} > 0,$ то переходять до нового базисного розв'язку. Визначають

$$\theta = \min_{\substack{\beta_{i_k s} > 0 \\ 1 \le k \le m}} \frac{b_{i_k}}{\beta_{i_k s}} = \frac{b_{i_r}}{\beta_{i_r} s}.$$

Тобто рядок r – напрямний, вектор $P*_s$ (в табл. 2) – напрямний. У базисі P_{i_r} заміняють на P_s. Розв'язальним елементом є $\beta_{i_r s}$. ***Перераховують*** основну таблицю МСМ, переходячи до нової основної таблиці. Для цього перші m рядків стовпців $P_0, A_1, ..., A_m$ та F_0 переобчислюють за звичайними правилами симплекс-метода.

Потім знаходять, як описано, Ω (позначимо його $\Omega^{(2)}$) потім $\Delta_j^{(2)}$, $j = 1, 2, \ldots, n,$ і так далі.

Продовжуючи ітераційний процес, за певну кількість кроків або встановлюємо нерозв'язність задачі, або знаходимо її розв'язок.

Коротко алгоритм МСМ вкладається в такі етапи:

1) знаходження базисного розв'язку ЗЛП, базису $P_{i_1}, \ldots, P_{i_m}$;

2) обчислення B^{-1} для $B = \left(P_{i_1}, \ldots, P_{i_m}\right)$;

3) обчислення $\Omega = C_\delta B^{-1}$;

4) обчислення $\Delta_j = \Omega P_j - c_j$;

5) перевірка: якщо всі $\Delta_j \ge 0,$ то отримано оптимальний розв'язок. Якщо існує $\Delta_j < 0,$ то знаходять s з умови $\left|\Delta_s\right| = \max\limits_{\substack{\Delta_j < 0 \\ 1 \le j \le n}} \left|\Delta_j\right|$;

6) обчислюємо в базисі $P_{i_1}, \ldots, P_{i_m}$ координати вектора

$$P*_s = \begin{pmatrix} \beta_{i_1 s} \\ \ldots \\ \beta_{i_m s} \end{pmatrix};$$

7) перевірка: якщо всі $\beta_{i_k s} \le 0, k = 1, 2, ..., m,$ то цільова функція задачі необмежена. Якщо існує $\beta_{i_k s} > 0,$ то знаходять

$$\theta = \min_{\substack{\beta_{i_k s} > 0 \\ 1 \le k \le m}} \frac{b_{i_k}}{\beta_{i_k s}} = \frac{b_{i_r}}{\beta_{i_r s}}.$$

8) за допомогою розв'язального елемента $\beta_{i_r s}$ (напрямний рядок r; напрямний стовпець s) переобчислюють основну таблицю МСМ при цьому знаходяться:

а) компоненти нового базисного розв'язку;

б) матриця B^{-1}, обернена до нової матриці B (що складена з нового базису). Перехід на крок 3.

Приклади

Приклад 1. Розв'язати МСМ:

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to max;$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360; \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192; \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, ..., 6.$$

Розв'язання. Базисний розв'язок $x = (0,\ 0,\ 0,\ 360;\ 192;\ 180)$ при базисі $P_4;\ P_5;\ P_6$. При цьому $B = (P_4,\ P_5,\ P_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична; очевидно, що $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (A_1,\ A_2,\ A_3)$. Складемо допоміжну (табл. 3) та основну (табл. 4) таблиці МСМ.

Таблиця 3 – Допоміжна таблиця МСМ для прикладу 1

i	Базис	C_{δ}	P_0	9	10	16	0	0	0	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(2)}$	$\Omega^{(3)}$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6			
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0	0	0	2/9
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0	0	2	5/3
3	P_6	0	180	+5	3	3	0	0	1	0	0	0
4			$\Delta^{(1)}$	–9	–10	–16 ↑	0	0	0			
5			$\Delta^{(2)}$	3	–2 ↑	0	0	2	0			
6			$\Delta^{(3)}$	5	0	0	2/9	5/3	0			

Таблиця 4 – Основна таблиця МСМ для прикладу 1

i	Базис	C_δ	P_0	A_1	A_2	A_3	P^*_3	$\dfrac{b_{i_r}}{\beta_{i_r s}}$
1	P_4	0	360	1	0	0	12	360/12=30
2	P_5	0	192/24	0/0	1/1/8	0/0	**8**	192/8=24 ←
3	P_6	0	180	0	0	1	3	180/3=60
4			0	0	0	0	–16 ↑	

B^{-1} (над стовпцями A_1–A_3); F_0 (під P_0); $\Omega^{(1)} = C_\delta B^{-1}$ (під A_1–A_3); $\Delta_3^{(1)}$ (під P^*_3)

Обчислюємо $\Omega^{(1)} = \left(\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \omega_3^{(1)}\right)$:

$$\omega_1^{(1)} = \left(c_\delta, A_1\right) = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0;$$
$$\omega_2^{(1)} = \left(c_\delta, A_2\right) = 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = 0;$$
$$\omega_3^{(1)} = \left(c_\delta, A_3\right) = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0.$$

Обчислюємо $F_0 = \left(c_\delta, P_0\right) = \ 0\cdot 360 + 0\cdot 192 + 0\cdot 180 = 0.$ $\Omega^{(1)}$ записуємо в основну та допоміжну таблиці. У допоміжній таблиці обчислюємо $\Delta^{(1)}$

$$\Delta_1^{(1)} = \left(\Omega^{(1)}, P_1\right) - c_1 = 0\cdot 18 + 0\cdot 6 + 0\cdot 5 - 9 = -9.$$

Аналогічно:

$$\Delta_2^{(1)} = -10;\ \ \Delta_3^{(1)} = -16;\ \ \Delta_4^{(1)} = \Delta_5^{(1)} = \Delta_6^{(1)} = 0.$$

Серед чисел $\Delta_j^{(1)}$ ***є від'ємні,*** отже, розв'язок не є оптимальним.

Знаходимо $S = 3\left(\left|\Delta_3^{(1)}\right| = \left|-16\right| = \max\limits_{\Delta^1{}_j<0}\left\{\left|-9\right|;\left|-10\right|;\left|-16\right|\right\}\right).$

Отже, $P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ переобчислюємо для табл. 4:

$$P_3^* = B^{-1} \cdot P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Перевіряємо, чи є в P_3^* додатні (є, більш того – усі).

Переходимо до нового базисного розв'язку:

$$\theta = min\left\{ \frac{360}{12}; \frac{192}{8}; \frac{180}{3} \right\} = \frac{192}{8} = 24 \text{ при } i = 2 \ \left(i_k = 5\right).$$

Елемент 8 – розв'язальний. Перераховуємо табл. 4, отримуючи другу основну таблицю МСМ.

Таблиця 5 – Друга основна таблиця МСМ для прикладу 1

i	Базис	C_δ	P_0	A_1	A_2	A_3	$P^*{}_2$	$\dfrac{b_{i_r}}{\beta_{i_r s}}$
1	P_4	0	72/8	1/1/9	–3/2/–1/6	0/0	9	72/9=8
2	P_3	16	24	0	1/8	0	1/2	24:1/2=48
3	P_6	0	108	0	–3/8	1	3/2	(108/3)2=72
4			384	0	2	0	–2	

$\| \ F_0$ $\quad \underbrace{\qquad\qquad}_{\Omega^{(2)}}$ $\quad \| \ \Delta_2^{(2)}$

Знаходимо F_0 та

$$\omega_1^{(2)} = \left(c_\delta, A_1\right) = 0 \cdot 1 + 16 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0;$$

$$\omega_2^{(2)} = \left(c_\delta, A_2\right) = 0 \cdot \left(-3/2\right) + 16 \cdot 1/8 + 0 \cdot \left(-3/2\right) = 2;$$

$$\omega_3^{(2)} = \left(c_\delta, A_3\right) = 0 \cdot 0 + 16 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Знаходимо

$$\Delta^{(2)} = \left(-3; -2;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0\right);\ \ s = 2\ \text{ (тільки } \Delta_2^{(2)} < 0\text{)}.$$

План не оптимальний.

Обчислимо з табл. 3 за вектором $P_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ вектор P_2^* для табл. 5:

$$P_2^* = B^{-1} \cdot P_2 = \left(A_1, A_2, A_3\right) \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & -3/8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 15 + \left(-3/2\right) \cdot 4 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 15 + 1/8 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 15 + \left(-3/8\right) \cdot 4 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

Серед координат P_2^* є додатні, переходимо до нового базисного розв’язку. Уводимо в базис P_2, виводимо P_4 (оскільки розв’язальним елементом є 9).

Перераховуємо табл. 5.

Таблиця 6 – Третя основна таблиця МСМ для прикладу 1

i	Базис	C_δ	P_0	A_1	A_2	A_3
1	P_2	10	8	1/9	–1/6	0
2	P_3	16	20	–1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	–3/2	–1/8	1
			400	2/9	5/3	0

$\Omega^{(3)}$

За $\Omega^{(3)}$ в табл. 3 обчислюємо $\Delta^{(3)}$. Усі $\Delta_j^{(3)} \geq 0$. Отже, отриманий базисний розв’язок (табл. 6) є оптимальним. Таким чином: $x^* = \left(0;\ 8;\ 20;\ 0;\ 0;\ 96\right)$ дає максимальне $F_{max} = 400$ значення цільовій функції. Задача розв’язана.

Лекція 13. Двоїстість у лінійному програмуванні

1. Пряма та двоїста задачі

Кожній задачі ЛП можна поставити у відповідність деяку іншу задачу ЛП, яку називають двоїстою (або спряженою). Введемо означення двоїстої задачі відносно загальної задачі ЛП (яку називають *прямою*), яка полягає у знаходженні максимального значення функції

$$F = c_1 x_1 + ... + c_n x_n \to max \tag{1}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k; \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + ... + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,l};\ l \le n \right). \tag{3}$$

Означення. Задача, що полягає у знаходженні *мінімального* значення функції

$$F^* = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \to min \tag{4}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + ... + a_{ml}y_m \ge c_l; \\ a_{1,l+1}y_1 + a_{2,l+1}y_2 + ... + a_{m,l+1}y_m = c_{l+1}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m = c_n; \end{cases} \tag{5}$$

$$y_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,k}, \quad k \leq m\right) \tag{6}$$

називається двоїстою відносно задачі (1)–(3).

Задачі (1)–(3) та (4)–(6) утворюють так звану ***двоїсту пару ЗЛП*** (див. табл. 1).

Таблиця 1 – Правила складання двоїстої задачі за прямою

Пряма задача	**знак**	**Двоїста задача**
На максимум	$\Rightarrow$	на мінімум
$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$ матриця коефіцієнтів транспонується	$\Rightarrow$	$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{m1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$
Кількість змінних n кількість обмежень в (13.2)	= =	кількість обмежень в (13.5) кількість змінних m
Вільні члени в (13.2) коефіцієнти цільової функції	$\Rightarrow$ $\Rightarrow$	коефіцієнти цільової функції вільні члени в (13.5)
$x_j \geq 0$ в іншому разі (тобто знак x_j – будь-який) $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$ $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$	$\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$	$a_{1j}y_1 + \ldots + a_{mj}y_m \geq c_j$ $a_{1j}y_1 + \ldots + a_{mj}y_m = c_j$ $y_i \geq 0$ y_i – будь-який знак

Двоїсті пари поділяють на симетричні й несиметричні. Якщо $l = n, k = m$ – пари називають *симетричними* (тобто всі обмеження – нерівності, усі змінні – невід'ємні), інакше – несиметричними.

Приклад 1. Складемо двоїсту задачу для задачі

$$F = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18; \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Двоїста має вигляд:

$$F^* = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2; \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \geq 1; \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3; \end{cases}$$

$y_i \left(i = \overline{1,3} \right)$ – можуть бути будь-якими (і додатними, і рівними нулю, і від'ємними).

2. Зв'язок між розв'язками прямої і двоїстої задач

Розглянемо пару двоїстих задач:

пряма:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow max \tag{7}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \left(i = \overline{1,m} \right), \tag{8}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}; \tag{9}$$

двоїста:

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \rightarrow min \tag{10}$$

за умов:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \left(j = \overline{1,n} \right). \tag{11}$$

Задачі (7)–(9); (10)–(11) можуть бути розв'язані незалежно. Але під час визначення симплекс-методом оптимального розв'язку однієї задачі знаходиться розв'язок і другої.

Існуючі залежності між розв'язками пари двоїстих задач можуть бути сформульовані у вигляді нижченаведених тверджень.

Лема 1. Якщо X – деякий допустимий розв'язок задачі (7)–(9), а Y – довільний допустимий розв'язок двоїстої задачі (10)–(11), то

$$F\left(X\right) \le F^*\left(Y\right),$$

тобто значення цільової функції вихідної задачі на допустимому розв'язку X завжди не більше значення цільової функції двоїстої задачі на допустимому розв'язку Y.

Лема 2. Якщо $F\left(X^*\right) = F^*\left(Y^*\right)$ для деяких допустимих розв'язків X^* і Y^* відповідно задач (7)–(9) та (10)–(11), то X^* – оптимальний розв'язок прямої, а Y^* – двоїстої задачі.

Теорема 1. (Перша теорема двоїстості). Якщо одна з пари двоїстих задач (7)–(9); (10)–(11) має оптимальний розв'язок, то й інша має оптимальний розв'язок, при цьому значення цільових функцій при їх оптимальних розв'язках рівні між собою $F_{max} = F^*{}_{min.}$

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена (для (7)–(9) – зверху, для (10)–(11) – знизу), то інша задача двоїстої пари зовсім немає ***допустимих*** розв'язків.

Теорема 2. (Друга теорема двоїстості). Допустимий розв'язок $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ задачі (7)–(9) і допустимий розв'язок $Y^* = \left(y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*\right)$ задачі (10)–(11) є ***оптимальними*** розв'язками цих задач тоді і тільки тоді, коли для будь-якого j $\left(j = \overline{1,n}\right)$ виконується рівність

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0,$$

Тобто або $x_j^* = 0$ або $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$, $\forall_j = 1, 2, ..., n.$

Розглянемо приклад геометричної інтерпретації двоїстих задач. Можуть мати місце 3 випадки: 1) обидві задачі мають допустимі розв'язки; 2) одна; 3) жодна не має.

Приклад 2. Дано:

$$F = 2x_1 + 7x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14; \\ x_1 + x_2 \le 8; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язок. Складемо двоїсту

$$F^* = 14y_1 + 8y_2 \to min$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 \ge 2; \\ 3y_1 + y_2 \ge 7; \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0.$$

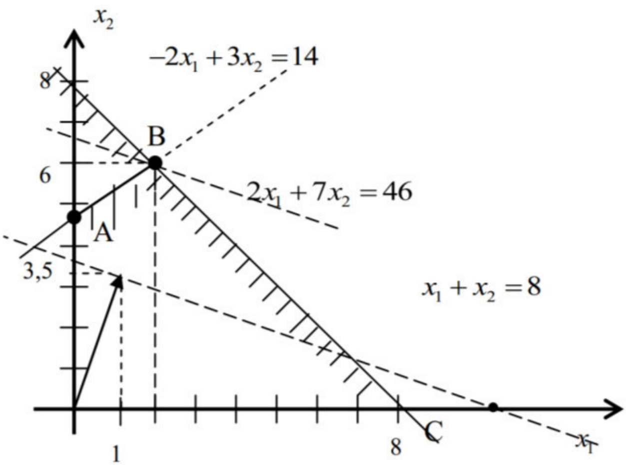


Рисунок 1 – Розв'язок прямої ЗЛП

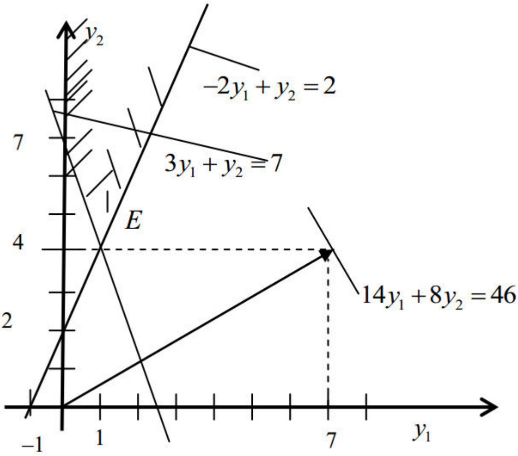


Рисунок 2 – Розв’язок двоїстої ЗЛП

$$B = X^* = (2{,}6); F(X^*) = 46 = F_{max};$$

$$E = Y^* = (1{,}4); F^*(Y^*) = 46 = F^*_{min}; \quad F^*(Y) \ge 46;$$

$$F_{max} = F^*_{min} \ \Rightarrow F(X) \le F^*(Y).$$

Лекція 14. Розв'язування двоїстих задач. Економічна інтерпретація двоїстих задач

1. Знаходження розв'язку двоїстих задач

Розглянемо пару двоїстих задач (7)–(9) з лекції 13 і (10)–(11) з лекції 13. Нехай симплекс-методом знайдено оптимальний розв'язок X^* задачі (7)–(9) з лекції 13 і цей розв'язок визначається базисом $P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_m}$. Позначимо через $C_б = \left(c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m}\right)$ – вектор-рядок, складений з відповідних коефіцієнтів при невідомих цільової функції (7) із лекції 13, задачі (7)–(9) з лекції 13, а через B^{-1} – матрицю, обернену до матриці B, що складена з компонент векторів $P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_m}$ базису. Має місце така теорема.

Теорема 1. Якщо задача (7)–(9) з лекції 13 має оптимальний розв'язок X^*, то $Y^* = C_б B^{-1}$ є оптимальним розв'язком двоїстої задачі (10)–(11) з лекції 13.

Отже, якщо знайти симплекс-методом оптимальний розв'язок задачі (7)–(9) з лекції 13, то, використовуючи останню симплекс-таблицю, можна визначити $C_б$, B^{-1} і за допомогою теореми 3 знайти оптимальний план задачі (10)-(11) з лекції 13.

У тому випадку, коли серед векторів $P_1, P_2, ..., P_n$, складених із коефіцієнтів при невідомих у системі (8) з лекції 13, є m вигдяду

$$P_j = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix},$$

де 1 стоїть на j_i-му місці, то вказану матрицю B^{-1} утворюють числа перших *m* рядків останньої симплекс-таблиці, що стоять у стовпцях даних векторів. Тоді немає необхідності визначати оптимальний розв'язок двоїстої задачі за формулою $Y^* = C_б B^{-1}$, оскільки компоненти цього розв'язку збігаються з відповідними елементами $(m+1)$-го рядка останньої симплекс-таблиці стовпців базисних векторів першої симплекс-таблиці, якщо відповідний коефіцієнт $c_j = 0$, і дорівнюють сумі відповідного елемента цього рядка і c_j, якщо $c_j \neq 0$. Тобто $y^*_{j_i} = \Delta_j + c_j, \forall j$, $\forall j$.

Викладене має місце і для симетричної пари двоїстих задач. При цьому, оскільки система обмежень прямої задачі містить нерівності вигляду «≤», то компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі збігаються з відповідними числами $(m+1)$-го рядка останньої симплекс-таблиці. Вказані числа стоять в стовпцях векторів, що відповідають додатковим змінним.

Зауваження. Номер *j* у y^*_j визначається за місцем одиниці в $P_{i_1}, ..., P_{i_m}$. (Одиниця на першому місці – стовпець дає y^*_1, на другому – y^*_2 і т. д.).

Приклад. Знайти максимум функції $F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 +$ $+x_4 + (-Mx_7)$
за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 + (x_7) = 10; \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, (x_7) \geq 0.$$

За розв'язком прямої отримати розв'язок двоїстої. Зауважимо, що в умові записана вихідна задача (що не містить x_7) та розширена для неї (з x_7 в дужках).

Складемо двоїсту задачу до вихідної:

$$F^* = 24y_1 + 22y_2 + 10y_3 \to min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \ge 2; \\ y_1 + 2y_2 - y_3 \ge -3; \\ -2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \ge 6; \\ y_1 \ge 1; \\ y_2 \ge 0; \\ -y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо пряму задачу (розширену) методом штучного базису, не викреслюючи стовпці штучного базису (табл. 1).

Зауваження. З метою використання розв'язку прямої задачі для розв'язування двоїстої до неї всі стовпці штучних змінних дораховують до останньої симплекс-таблиці (не виключають їх із таблиць при виході штучної змінної з базису). У якості A_1 для штучних змінних беруть не $-M$, а 0.

Таблиця 1

i	Базис	$C_б$	P_0	2	–3	6	1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_4	1	24	2	1	–2	1	0	0	0
2	P_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0
3	P_7	$-M$	10	1	–1	2	0	0	–1	1
4			24	0	4	–8	0	0	0	0
5			–10	–1	1	–2	0	0	1	0
1	P_4	1	34	3	0	0	1	0	–1	1
2	P_5	0	2	–1	4	0	0	1	2	–2
3	P_3	6	5	1/2	–1/2	1	0	0	–1/2	1/2
4			64	4	0	0	0	0	–4	4
1	P_4	1	35	5/2	2	0	1	1/2	0	0
2	P_6	0	1	–1/2	2	0	0	1/2	1	–1
3	P_3	6	11/2	1/4	1/2	1	0	1/4	0	0
4			68	2	8	0	0	2	0	0

Визначаємо: $y_1{*} = \Delta_4 + c_4 = 0 + 1 = 1;$ $y_2{*} = \Delta_5 + c_5 = 2 + 0 = 2;$ $y_3{*} = \Delta_7 + c_7 = 0 + 0 = 0$ ($c_7 = 0$ у вихідній задачі). Отже,

$$F^*_{min} = 24y_1^* + 22y_2^* + 10y_3^* = 24 + 44 = 68 = F_{max}.$$

2. Приклад економічної інтерпретації

Розглянемо економічну інтепретацію двоїстих задач на прикладі.

Задача. Для виробництва трьох видів виробів *A, B, C* використовується три різних види сировини. Кожен вид сировини може бути використати у кількості, відповідно, не більше 180, 210, 244 кг. Норми витрат кожного виду сировини на одиницю продукції даного виду і вартість одиниці продукції кожного виду наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на одиницю продукції		
	A	*B*	*C*
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Вартість одиниці продукції, грн	10	14	12

Знайти план випуску продукції, за якого забезпечуються його максимальна вартість, і ***оцінити кожен із видів сировини, які використовуються для виробництва продукції. Оцінки***, що приписуються кожному з видів сировини, ***повинні*** бути такими, ***щоб оцінка всієї сировини, яка використовується, була мінімальною, а сумарна оцінка сировини, що використовується на виробництво одиниці продукції кожного виду – не менше вартості одиниці продукції даного виду.***

Розв'язок.

Нехай x_1 – кількість виробів *A,* що виробляється;

x_2 – кількість виробів *B,* що виробляється;

x_3 – кількість виробів *C,* що виробляється.

Для визначення оптимального плану виробництва треба максимізувати

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \qquad (1)$$

при умовах

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210, \\ 1x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244, \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0. \qquad (3)$$

Припишемо кожному виду сировини ***двоїсту оцінку:*** y_1, y_2, y_3 (***вартісну оцінку одиниці ресурсу***). Тоді загальна оцінка сировини, що використовується на виробництво продукції, становить

$$F^* = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \to min. \qquad (4)$$

Згідно умовам, двоїсті оцінки повинні бути такими, щоб загальна оцінка сировини, що ***використовується на виробництво одиниці продукції кожного виду була не менше вартості одиниці продукції даного виду, тобто*** y_1, y_2, y_3 по-винні задовольняти такій системі нерівностей

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 10, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 14, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 12, \end{cases} \qquad (5)$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0. \qquad (6)$$

Як видно, задачі (1)–(3); (4)–(6) утворюють двоїсту симетричну пару задач.

Розв’яжемо (1)–(3). Її розв’язок наведено в табл. 3.

Таблиця 3

i	Базис	$C_б$	P_0	10	14	12	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	14	82	19/8	1	0	5/8	0	–1/8
2	P_5	0	80	23/8	0	0	1/8	1	–5/8
3	P_3	12	16	–3/4	0	1	–1/4	0	¼
			1 340	57/4	0	0	23/4=5,75	0	5/4=1,25

З табл. 3 видно: оптимальний план виробництва виробів є такий, при якому $x_2 = 82; x_3 = 16.$ При цьому залишається невикористаним 80 кг сировини II виду, а загальна вартість виробів дорівнює 1 340 грн. З табл. 3 видно, що оптимальним розв'язком двоїстої задачі є $y_1^* = 23/4; \ y_2^* = 0; \ y_3^* = 5/4.$

Змінні y_1^* та y_3^* позначають умовні двоїсті оцінки одиниці сировини, відповідно I та III видів. Ці оцінки ненульові, а сировина I та III видів повністю використовується при оптимальному плані виробництва продукції. Двоїста оцінка одиниці сировини II виду дорівнює нулю. Ця сировина не повністю використовується при оптимальному плані виробництва.

Отже, додатню двоїсту оцінку мають лише ті види сировини, які повністю використовуються при оптимальному плані виробництва виробів. Тому ***двоїсті оцінки визначають дефіцитність сировини,*** що використовується підприємством. Більше того, ***величина*** даної ***двоїстої оцінки*** показує, ***на скільки зростає максимальне значення*** цільової функції ***прямої задачі*** при збільшенні кількості сировини відповідного виду ***на 1 кг.*** Так збільшення кількості сировини I виду на 1 кг приведе до того, що з'явиться можливість знайти новий оптимальний план виробництва виробів, при якому загальна вартість продукції, що виготовляється, зросте ***на 5,75 грн.*** і стане рівною 1 340 + 5,75 = = 1 345,75 грн. При цьому числа, що стоять у стовпці вектора P_4 табл. 3, показують, що вказане збільшення загальної вартості продукції, що виробляється, ***може бути досягнуте*** за рахунок ***збільшення випуску*** виробу В на ***5/8*** одиниць і скорочення випуску виробу С на ***1/4 одиниці.***

Унаслідок цього використання сировини ІІ виду зменшиться ***на 1/8 кг.*** Аналогічно ***збільшення сировини ІІІ виду на 1 кг*** дозволяє знайти новий оптимальний план виробництва виробів, при якому ***загальна вартість продукції, що виготовляється, зростає на 1,25 грн*** і складає 1 340 + 1,25 = 1 341,25 грн. Це буде досягнуто в результаті ***збільшення випуску*** виробів ***С на 1/4 одиниці*** і ***зменшення виготовлення виробів В на 1/8 одиниці,*** причому обсяг сировини ***ІІ виду,*** що ***використовується, зросте на 5/8 кг.***

Обчислимо мінімальне значення цільової функції двоїстої задачі

$$F^*_{min} = 180 \cdot 23/4 + 210 \cdot 0 + 244 \cdot (5/4) = 1\,340,$$

бачимо, що воно збігається з максимальним значенням цільової функції вихідної задачі.

Під час підстановки оптимальних двоїстих оцінок у систему обмежень двоїстої задачі одержуємо:

$$\begin{cases} 23 + 5/4 > 10, \\ 23/2 + 5/2 = 14, \\ 23/4 + 25/4 = 12. \end{cases}$$

Перше обмеження двоїстої задачі виконується як ***строга нерівність.*** Це ***означає,*** що ***двоїста оцінка сировини, що використовується на виробництво одного виробу виду А, вище вартості цього виробу*** і, отже, ***випускати виріб А невигідно.*** Його виробництво не передбачено оптимальним планом прямої задачі. Друге та третє обмеження двоїстої задачі виконується як ***рівність.*** Це означає, що сумарні двоїсті оцінки сировини, яка використовується для виробництва одиниці відповідно виробів В та С, ***дорівнюють в точності їх вартості.*** Тому ***випускати*** ці два види продукції згідно двоїстих оцінок економічно ***доцільно.*** Їх виробництво і передбачено оптимальним планом прямої задачі.

Лекція 15. Двоїстий симплекс-метод

1. Алгоритм двоїстого симплекс-методу

Двоїстий симплекс-метод, як і симплекс-метод, використовується під час знаходження розв'язку задач ЛП, записаної в канонічній формі, для якої серед векторів P_j, складених із коефіцієнтів при невідомих в системі рівнянь, є m штук вигляду

$$P_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Разом із тим двоїстий симплекс-метод можна застосовувати при розв'язку задач ЛП, вільні члени системи рівняння якої можуть ***бути будь-якими (за знаком)*** числами (під час розв'язку симплекс-методом ці числа вважались невід'ємними). Таку задачу й розглянемо, попередньо припустивши, що

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \ P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

тобто розглянемо задачу: знайти максимальне значення функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2}$$

за умов

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_mP_m + x_{m+1}P_{m+1} + \ldots + x_nP_n = P_0; \tag{3}$$

$$x_j \geq 0, \ \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{4}$$

де $P_1,...,P_m$ представлено як (15.1), а

$$P_{m+1}=\begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix};...;\ P_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots\ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix};\ P_0=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

і серед чисел b_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ є ***від'ємні.***

У цьому випадку $X=\left(b_1,b_2,...,b_m;0,...,0\right)$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (3). Однак цей розв'язок ***не є допустимим*** розв'язком (планом) задачі (2)–(4), оскільки серед його компонент ***є від'ємні*** числа (тобто не виконується умова (4)).

Оскільки вектори $P_1,...,P_m$ мають вигляд (1), кожний з векторів P_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів $P_1,...,P_m$. Таким чином, можна знайти

$$\Delta_j=z_j-c_j=\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij}-c_j\quad\left(j=\overline{1,n}\right).$$

Означення. Розв'язок $\left(b_1,b_2,...,b_m;0,...,0\right)$ системи лінійних рівнянь (15.3), що визначається базисом $P_1,P_2,\ldots,P_m$, називається ***псевдодопустимим розв'язком (псевдопланом)*** задачі (2)–(4), ***якщо*** $\Delta_j\geq 0$ для будь-якого *j* $\left(j=\overline{1,n}\right)$.

Теорема 1. Якщо у псевдодопустимому розв'язку (псевдоплані) $X=\left(b_1,b_2,...,b_m;0,...,0\right)$, що визначається базисом $P_1,...,P_m$ є принаймні одне ***від'ємне*** $b_1<0,\ i=1,2,...,m,$ таке, що всі $a_{ij}\geq 0$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$, то задача (2)–(4) зовсім не має допустимих розв'язків *(не має планів)*.

Теорема 2. Якщо в псевдодопустимому розв'язку (псевдоплані) $X=\left(b_1,b_2,...,b_m;0,...,0\right)$, який визначається базисом $P_1,...,P_m$ ***є від'ємні числа*** $b_1<0;\ i=1,2,...,m,$ такі, що для будь-якого з них існують ***числа*** $a_{ij} < 0$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$, то можна перейти до нового псевдодопустимого розв'язку (псевдоплану), при якому значення цільової функції задачі (2)–(4) не збільшиться.

Сформульовані теореми дають основу для побудови алгоритму двоїстого симплекс-методу для задачі (2)–(4). Нехай $X = \left(b_1, b_2, ..., b_m; 0, ..., 0\right)$ – псевдодопустимий розв'язок (псевдоплан). Складаємо симплекс-таблицю, у якій деякі елементи стовпця вектора P_0 є ***від'ємними числами. Якщо*** таких чисел ***немає,*** то в симплекс-таблиці записано ***оптимальний розв'язок*** (план) задачі (2)–(4), оскільки по припущенню всі $\Delta_j \geq 0$ (це фактично є перевіркою критерію оптимальності).

Тому для визначення оптимального розвязку (плану) задачі за умови, що він існує, потрібно переходити від однієї симплекс-таблиці до іншої доти, поки із стовпця вектора P_0 не будуть виключені від'ємні елементи. При цьому весь час повинні зоставатися невід'ємними всі елементи $\left(m+1\right)$-го рядка, тобто $z_j - c_j \geq 0$ для будь-якого $\left(j = \overline{1,n}\right)$.

Таким чином, після складання симплекс-таблиці перевіряють, чи є у стовпці вектора P_0 від'ємні числа. Якщо їх немає, то знайдено оптимальний розв'язок (план) вихідної задачі. Якщо ж вони є (що ми і припускаємо), то вибирається ***найбільше за абсолютною величиною від'ємне число.*** Якщо таких чисел кілька, беруть будь-яке з них: нехай це число b_l. Вибір цього числа визначає вектор, що виключається з базису, тобто в даному випадку з базису виводиться вектор P_1. Щоб визначити, який вектор потрібно ввести в базис, знаходимо $\min\limits_{1 \leq j \leq n, a_{lj} < 0} \left(-\dfrac{\Delta_j}{a_{lj}} \right)$.

Нехай це мінімальне значення приймається при $j = r$, тоді в базис уводять вектор P_r. Число a_{lr} є ***розв'язальним*** елементом. Перехід до нової симплекс-таблиці проводять за звичайними правилами симплексного методу. Ітераційний процес продовжують доти, ***поки у*** стовпці вектора P_0 ***не буде більше від'єм-***

них чисел. При цьому знаходять оптимальний план вихідної задачі, а отже, і двоїстої. Якщо на деякому кроці виявиться, що в i-му рядку симплекс-таблиці у стовпці вектора P_0 стоїть ***від'ємне*** число b_i, ***а серед інших елементів цього рядка немає від'ємних, то вихідна задача не має розв'язку.***

Отже, розв'язування задачі (2)–(4) двоїстим симплекс-методом включає такі етапи:

1. Знаходять псевдодопустимий розв'язок (псевдоплан) задачі.
2. Перевіряють цей псевдодопустимий розв'язок (псевдоплан) на оптимальність. Якщо псевдоплан оптимальний, то знайдено розв'язок задачі. В іншому разі або встановлюють нерозв'язність задачі, або переходять до нового псевдоплану.
3. Вибирають розв'язальний рядок за допомогою визначення найбільшого за абсолютною величиною від'ємного числа стовпця вектора P_0 і розв'язальний стовпець за допомогою знаходження найменшого за абсолютною величиною відношення елементів $(m+1)$-го рядка до відповідних від'ємних елементів розв'язального рядка.
4. Знаходять новий псевдоплан, перераховуючи таблицю за правилами симплекс-методу, і повторюють усі дії, починаючи з етапу 2.

2. Приклад

Задача. Знайти максимальне значення функції $F = x_1 + x_2 + 2x_3$ за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Розв'язок. Запишемо вихідну задачу ЛП у вигляді канонічної форми задачі ЛП: знайти максимум функції $F = x_1 + x_2 + 2x_3$ за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ +x_1 - x_2 - x_4 = +4, \\ +x_1 + 2x_2 - x_5 = +6, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, ..., x_5 \geq 0.$$

Помножимо друге та третє рівняння системи обмежень останньої задачі на –1 і перейдемо до такої задачі: знайти максимум функції

$$F = x_1 + x_2 + 2x_3 \tag{5}$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -6, \end{cases} \tag{6}$$
$$x_1, x_2, ..., x_5 \geq 0. \tag{7}$$

Виберемо за базис P_3, P_4, P_5 і складемо симплекс-таблицю до вихідної задачі (5)–(7).

Таблиця 1

i	Базис	$C_б$	P_0	1	1	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	2	8	1	1	1	0	0
2	P_4	0	–4	–1	1	0	1	0
3	P_5	0	–6/ 3	–1/ 1/2	–2/ 1	0/ 0	0/ 0	1/ –1/2 ←
4			16	1	1	0	0	0
$-\frac{\Delta_j}{a_{3j}}$ $(a_{3j} < 0)$				–1/–1=1	1/2 ↑			

З табл. 1 видно, що $F^* = 16$. Оскільки у стовпці вектора P_0 таблиці 1 є два від'ємні числа (–4 та –6), а в 4-му рядку від'ємних чисел немає, то у відповідності з алгоритмом двоїстого симплекс-методу переходимо до нової симплекс-таблиці (це можливо, так як в рядках векторів P_4, P_5 є від'ємні числа. Якщо хоча б в одному з цих двох рядків вони були відсутні, то задача була б не-розв'язаною). Вектор, що виводиться з базису, визначається найбільшим за абсолютною величиною від'ємним числом, що стоїть у стовпці вектора P_0. У даному випадку це число –6. Тобто з базису виключаємо вектор P_5. Щоб визначити, який з векторів вводимо в базис, знаходимо $\min\limits_j\left(-1/(-1); -1/(-2)\right)=1/2$.

Значить, в базис вводимо вектор P_2. Переходимо до нової симплекс-таблиці (табл. 2).

Таблиця 2

i	Базис	$C_б$	P_0	1	1	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	2	5	1/2	0	1	0	1/2
2	P_4	0	–7	–3/2	0	0	1	1/2←
3	P_2	1	3	1/2	1	0	0	–1/2
4			13	1/2	0	0	0	1/2
				↑				

З табл. 2 видно, що P_4 виводимо, а P_1 вводимо до базису. Табл. 3 дає розвязок задачі. Одержуємо: $X^* = (14/3, 2/3, 8/3, 0, 0)$; $F_{max} = 32/3$.

Таблиця 3

i	Базис	$C_б$	P_0	1	1	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	2	8/3	0	0	1	1/3	2/3
2	P_1	1	14/3	1	0	0	–2/3	–1/3
3	P_2	1	2/3	0	1	0	1/3	–1/3
4			32/3	0	0	0	1/3	2/3

ТЕСТИ ДО ЛЕКЦІЙ

Тести до лекцій 1–2

1. Яка за наведених задач оптимізації належить до задач лінійного програмування?

A. $f\left(x_1; x_2\right) = 2x_1 + x_2^2 \to max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 4; \\ 2x_1 - 3x_2 \le 5; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

B. $f\left(x_1; x_2\right) = 3x_1 - 4x_2 \to max;$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 6; \\ -x_1 + 2x_2 \le 4; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

C. $f\left(x_1; x_2\right) = 3x_1^2 + x_2^2 \to max;$

$$\begin{cases} 4x_1^2 - 5x_2 \le 7; \\ x_1 + x_2^3 \le 8; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

D. $f\left(x_1; x_2\right) = 5x_1 + 3x_2 \to max;$

$$\begin{cases} 2x_1^2 - 3x_2 \le 4; \\ x_1 + 5x_2^2 \le 6; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

2. Якщо серед коефіцієнтів цільової функції та (або) обмежувальних умов є випадкові величини, то задача належить до:

A. дробово-лінійної оптимізації;
B. комбінаторної оптимізації;
C. динамічної оптимізації;
D. стохастичної оптимізації.

3. Принцип Белмана лежить в основі методів розв'язання задач:

A. дробово-лінійного програмування;

B. комбінаторної оптимізації;

C. динамічного програмування;

D. стохастичної оптимізації.

4. У якій із наведених задач оптимізації мінімізують цільову функцію?

A. задача завантаження верстатів;

B. задача виробничого планування;

C. задача про оптимальну суміш;

D. задача вибору портфеля цінних паперів.

5. Яка за наведених задач оптимізації належить до моделей транспортного типу?

A. задача вибору плану обслуговування клієнтів фінансового ринку;

B. задача вибору портфеля цінних паперів;

C. задача про оптимальну суміш;

D. задача виробничого планування.

6. Яку економічну задачу відображає наведена математична модель за певної інтерпретації параметрів?

Цільова функція: $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$

за умов: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ \ \forall i \in J_m; \ \ x_j \ge 0, \ \ \forall j \in J_n.$

A. задача завантаження верстатів;

B. задача виробничого планування;

C. транспортна задача;

D. задача вибору плану обслуговування клієнтів фінансового ринку.

7. Яка з моделей описує таку задачу?

Задача. Виробляється продукція видів А та В, використовується два види сировини (I, II). Норми витрат сировини (у кг на *одиницю продукції), запас сировини (в кг) та прибуток (у грн за одиницю продукції) наведено в таблиці. Скласти модель знаходження плану виробництва, за якого прибуток буде максимальним.*

Сировина	Норми витрат		Запас сировини
	продукція А	продукція В	
I	1	2	10
II	3	1	20
Прибуток	1	2	

A.

$x_1 + 2x_2 \to max;$

$x_1 + 2x_2 \geq 10;$

$3x_1 + x_2 \geq 20;$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$

B.

$x_1 + 2x_2 \to max;$

$x_1 + 2x_2 \leq 10;$

$3x_1 + x_2 \leq 20;$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$

C.

$x_1 + 2x_2 \to max;$

$Nx_1 + 2x_2 \leq 10;$

$3x_1 + Nx_2 \leq 20;$

D.

$10y_1 + 20y_2 \to min;$

$y_1 + 3y_2 \geq 1;$

$2y_1 + y_2 \geq 2;$

$y_1 \geq 0; y_2 \geq 0.$

Тести до лекцій 3–4

1. У якій формі записана наведена задача ЛП?

$z = 5x_1 + 3x_2 + x_3 \to max;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4; \\ x_1 + x_3 = 6; \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

A. у загальній формі;
B. у стандартній формі;
C. у канонічній формі;
D. у симетричній формі.

2. Які з перетворень треба виконати, щоб привести наведену задачу ЛП до стандартного виду?

$z = 2x_1 + 3x_2 \to max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 8; \\ 3x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

A. помножити коефіцієнти цільової функції на (–1);
B. обмеження-нерівності перетворити в обмеження-рівняння;
C. замінити змінні x_1 і x_2 різницею двох невід'ємних змінних;
D. замінити змінну x_2 різницею двох невід'ємних змінних.

3. Напівпростором у R^n називається множина точок $x = \left(x_1, ..., x_n\right)$, які задовольняють умову:

A. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b,\ \ a_j, b = const\left(j = \overline{1,n}\right);$

B. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b,\ \ a_j, b = const\left(j = \overline{1,n}\right);$

C. $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j > b,\ \ a_j, b = const\left(j = \overline{1,n}\right);$

D. $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1,\ \ a_j, b = const\left(j = \overline{1,n}\right).$

4. Які координати має напрямний вектор цільової функції наведеної задачі?

$3x_1 - 5x_2 \to max;$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 4; \\ 5x_1 - 2x_3 \le 6; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

A. $\vec{c} = (1;\, 5);$

B. $\vec{c} = (5;-2);$

C. $\vec{c} = (4;\, 6);$

D. $\vec{c} = (3;-5).$

5. Яка форма задачі лінійного програмування (ЗЛП) є канонічною?

A.

$x_1 + x_2 \to max;$

$x_1 + 2x_2 = 6;$

$3x_1 + x_2 = 4;$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0;$

B.

$x_1 + x_2 \to min;$

$x_1 + 2x_2 = 6;$

$3x_1 + x_2 = 4;$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0;$

C.

$x_1 + x_2 \to max;$

$x_1 + 2x_2 = 6;$

$3x_1 + x_2 = 4;$

$x_1 \ge 0;$

D.

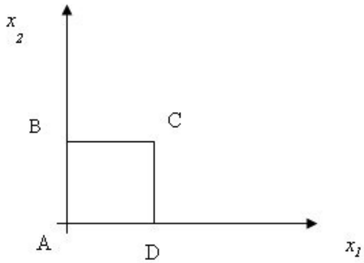
$x_1 + x_2 \to max;$

$x_1 + 2x_2 \le 6;$

$3x_1 + x_2 \le 4;$

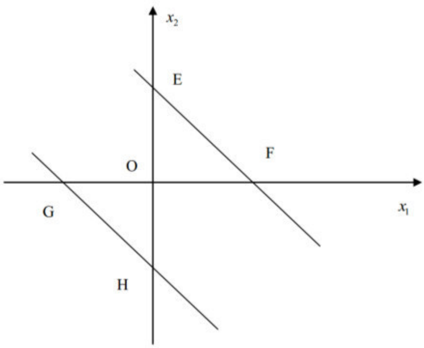
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

6. У якій точці області ABCD досягається максимум функції $-5x_1 + 4x_2$?



Відповідь: A; B; C; D.

7. Яка півплощина описується нерівністю за відповідних значень координат точки E, F, G, H?



A. над прямою EF;
B. під прямою EF;
C. над прямою GH;
D. під прямою GH.

8. Щоб перейти до канонічної форми в задачі

$x_1 \to max;$

$x_1 + x_2 \le 5;$

$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0;$

треба:

A. нічого не робити;

B. змінити цільову функцію на мінімум;

C. перетворити нерівність на $x_1 + x_2 + x_3 = 5;\ \ x_3 \geq 0;$

D. перетворити нерівність на $x_1 + x_2 - x_3 = 5;\ \ x_3 \geq 0;$

E. зробити в задачі заміну $x_2 = x_3 - x_4;\ \ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$

Тести до лекцій 5–6

1. Многогранною областю називається:

A. об'єднання скінченої кількості напівпросторів;

B. переріз скінченої кількості напівпросторів;

C. об'єднання нескінченої кількості напівпросторів;

D. переріз нескінченої кількості напівпросторів.

2. Допустима множина розв'язків задачі ЛП порожня, якщо система обмежень:

A. визначена;

B. несумісна;

C. сумісна.

3. Яка система не визначає многогранної області?

A. $x_1 \ge 0;$

B.

$x_1 + x_2 \ge 1;$

$x_1 + x_2 \le 5;$

$x_1 \ge 0;$

$x_2 \ge 0;$

C.

$x_1^2 + x_2^2 \ge 1;$

$x_1^2 + x_2^2 \le 5;$

$x_1 \ge 0;$

$x_2 \ge 0;$

D.

$x_1 + x_2 + x_3 \ge 1;$

$x_1 + x_2 + x_3 \le 5;$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6.$

4. Яка система визначає многогранну область?

A.

$sin\, x_1 + sin\, x_2 \le 1;$

$x_1 \ge 0;$

$x_2 \ge 0;$

B.

$2x_1 + x_2 \le 3;$

$x_1 + 3x_2 \ge 6;$

$x_1 \ge 0;$

$x_2 \ge 0;$

C.

$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \le 4;$

$x_1^2 + x_2^2 \ge 1;$

$x_1 \ge 0;$

$x_2 \ge 0;$

D.

$x_1 + 2x_2^2 \le 1;$

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 5;$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$

5. *Яка система визначає многогранник?*

A. $x_1 \ge 0;$

B. $x_1 + x_2 \ge 1;$
$x_1 + x_2 \le 5;$
$x_1 \ge 0;$
$x_2 \ge 0;$

C. $x_1^2 + x_2^2 \ge 1;$
$x_1^2 + x_2^2 \le 5;$
$x_1 \ge 0;$
$x_2 \ge 0;$

D. $x_1 + x_2 + x_3 \ge 1;$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 5;$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6;$

6. *Яка система визначає многогранник у R^2?*

A. $x_1 \ge 0;$

B. $x_1 + x_2 \ge 1;$
$x_1 + x_2 \le 4;$

C. $0 \le x_1 \le 1;$

D. $0 \le x_1 \le 1;$
$0 \le x_2 \le 1.$

7. *Яка система визначає многогранник у R^2?*

A. $0 \le x_1 \le 1;$
$x_1 + x_2 \le 1;$
$x_1 \ge 0;$

B. $0 \le x_1 \le 1;$
$x_1 + x_2 \ge 1;$ 7
$x_1 \ge 0;$

C. $0 \le x_1 \le 1;$
$1 \le x_2 \ge 2;$

D. $x_1 + x_2 \le 2;$
$x_1 + x_2 \le 1;$
$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

Тести до лекцій 7–8

1. У чому полягає перехід від заданої до еквівалентної системи?

1) у виключенні з усіх рівнянь, крім l-го, змінної x_k*;*

2) у множення l-го рівняння на α_{ik}/α_{lk} *і віднімання цього результату з i-го рівняння;*

3) у додаванні l-го рівняння на α_{ik}/α_{lk}.

А. правильно тільки 1;
Б. правильно тільки 2;
С. правильно тільки 3;
D. правильно 1, 2;
Е. усе правильно.

2. Яка умова повинна виконуватися, щоб канонічна система задачі лінійного програмування визначала вершину многогранника розв'язків?

А. $\theta = \dfrac{\beta_l}{\alpha_{lk}} \geq 0;\ \ \beta_i - \dfrac{\beta_l}{\alpha_{lk}}\alpha_{ik} \geq 0;$

В. $\theta = \dfrac{\beta_l}{\alpha_{lk}} \leq 0;\ \ \beta_i - \dfrac{\beta_l}{\alpha_{lk}}\alpha_{ik} \leq 0;$

С. $\theta = \dfrac{\beta_l}{\alpha_{lk}} \geq 0;\ \ \beta_i - \dfrac{\beta_l}{\alpha_{lk}}\alpha_{ik} \leq 0;$

D. $\theta = \dfrac{\beta_l}{\alpha_{lk}} \leq 0;\ \ \beta_i - \dfrac{\beta_l}{\alpha_{lk}}\alpha_{ik} \geq 0.$

3. У співвідношеннях $z_k = \sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_{ik},$, $\Delta_k = z_k - c_k$, *який параметр є відносною оцінкою:*

А. Δ_k;
В. z_k;
С. c_k.

Тести до лекції 9

1. Який елемент є розв'язальним у симплекс методі в наступній симплекс-таблиці?

i	Базис	$C_б$	P_0	–4	5	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	6	1	1	1	0
2	P_4	0	1	2	3	0	1
3			0	4	–5	0	0

A. В стопці P_1 в рядку 1;

B. В стопці P_1 в рядку 2;

C. В стопці P_2 в рядку 1;

D. В стопці P_2 в рядку 2.

2. Як перераховується елемент 1 у клітині симплекс таблиці? У схемі р.е. – розв'язальний елемент.

№ 1	...	№ 2
...		...
№ 3 / № 3'	...	р. е.

A. № 1+№ 2*№ 3;
B. № 1–№ 2*№ 3;
C. № 1+№ 2*№ 3';
D. № 1–№ 2*№ 3'.

3. У якій симплекс-таблиці виконується критерій оптимальності?

A.

i	Базис	$C_б$	P_0				
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_2		18	1	1	–1	0
2	P_4		8	2	0	3	1
3			–24	11	0	1	0

B.

i	Базис	$C_б$	P_0				
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_2		28	–1	1	–1	0
2	P_4		18	2	0	3	1
3			–124	–12	0	1	0

C.

i	Базис	$C_б$	P_0				
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_2		18	1	1	–1	0
2	P_4		6	–2	0	2	1
3			35	–1	0	1	0

D.

i	Базис	$C_б$	P_0				
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_2		8	–1	1	1	0
2	P_4		16	–2	0	–2	1
3			24	–1	0	1	0

4. У якій симплекс-таблиці виконується критерій необмеженості цільової функції?

A.

i	Базис	$C_б$	P_0				
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_1		8	1	1	3	0
2	P_4		12	0	2	–1	1
3			24	0	14	2	0

B.

i	Базис	$C_б$	P_0				
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_1		28	1	1	3	0
2	P_4		18	0	2	–1	1
3			124	0	–15	2	0

C.

i	Базис	$C_б$	P_0				
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_1		8	1	1	–1	0
2	P_4		6	0	–2	2	1
3			35	0	–1	1	0

D.

i	Базис	$C_б$	P_0				
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_1		8	1	–1	1	0
2	P_4		16	0	–2	2	1
3			24	0	–1	1	0

5. Яку із ЗЛП можна розв'язувати симплекс-методом одразу (без перетворень)?

A.

$$x_1 + x_2 \to min;$$
$$x_1 + x_2 \le 1;$$
$$2x_1 - x_2 \le 1;$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$$

B.

$$x_1 + x_2 \to max;$$
$$x_1 + x_2 = 1;$$
$$2x_1 - x_2 = 1;$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$$

C.

$$x_1 + x_2 \to max;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = -1;$$
$$2x_1 - x_2 + x_4 = 1;$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0;$$

D.

$$-x_1 - x_2 \to max;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1;$$
$$2x_1 - x_2 + x_4 = 1;$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

6. Як у симплекс-методі перераховується напрямний рядок у такій таблиці:

i	Базис	$C_б$	P_0				
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_1		1	1	2	0	1
2	P_3		2	0	1	1	4
3				0	–1	0	–5

A.

i	Базис	$C_б$	P_0				
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_2		1/2	1/2	1	0	1/2
2	P_3						
3							

B.

i	Базис	$C_б$	P_0				
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_4		1	1	2	0	1
2	P_3						
3							

C.

i	Базис	$C_б$	P_0				
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_1						
2	P_2		2	0	1	1	4
3							

D.

i	Базис	$C_б$	P_0				
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_1						
2	P_4		1/2	0	1/4	1/4	1
3							

Тести до лекції 10

1. *Яка задача є розширеною в М-методі для ЗЛП*

$x_1 + 2x_2 \to max;$

$x_1 + 2x_2 = 5;$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6;$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0?$

A.

$x_1 + 2x_2 + x_4 \to max;$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 5;$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6;$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0;$

B.

$x_1 + 2x_2 - x_4 \to max;$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 5;$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6;$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0;$

C.

$x_1 + 2x_2 - Mx_4 \to max;$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 5;$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6;$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0;$

D.

$x_1 + 2x_2 - Mx_4 \to min;$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 5;$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6;$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0.$

2. *Який вигляд мають два останні рядки в першій симплекс-таблиці М – методу для ЗЛП:*

$x_1 + x_2 - Mx_5 \to max;$

$x_1 + x_2 + x_3 = 5;$

$2x_1 - 3x_2 - x_4 + x_5 = 1;$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$

A.

i	Базис	$C_б$	P_0	1				
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3		5	1	1	1	0	0
2	P_5		1	2	–3	0	–1	1
3			–1	–2	2	0	1	0

B.

i	Базис	$C_б$	P_0	1				
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3		5	1	1	1	0	0
2	P_5		1	2	–3	0	–1	1
3			0	–1	–1	0	0	0
			–1	–2	3	0	1	0

C.

i	Базис	$C_б$	P_0	1				
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3		5	1	1	1	0	0
2	P_5		1	2	–3	0	–1	1
3			–1	–2	–3	0	1	0
			0	–1	–1	0	0	0

D.

i	Базис	$C_б$	P_0	1				
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3		5	1	1	1	0	0
2	P_5		1	2	–3	0	–1	1
3			–2	–3	2	0	1	0

3. Яку ЗЛП можна розв'язувати М-методом, не перетворюючи, тільки склавши до неї розширену?

A.

$x_1 + x_2 \to min;$

$x_1 + x_2 \le 1;$

$2x_1 - x_2 \le 1;$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

B.

$x_1 + x_2 \to max;$

$x_1 + x_2 = 1;$

$2x_1 - x_2 = 1;$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

C.

$x_1 + x_2 \to max;$

$x_1 + x_2 + x_3 = -1;$

$2x_1 - x_2 + x_4 = 1;$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0;$

D.

$-x_1 - x_2 \to max;$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1;$

$2x_1 - x_2 + x_4 = 1;$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

4. Куди заносяться коефіцієнти при М складанні симплекс-таблиці в М-методі:

А. в $(m+2)$-й рядок;

Б. в $(m+1)$-й рядок;

С. в m-й рядок;

D. в $(m-1)$-й рядок.

5. Виродженим розв'язком називають:

А. у якого більш ніж $n-m$ елементів дорівнюють нулю;
В. у якого більш ніж $n-m$ елементів більше нуля;
С. у якого більш ніж $n-m$ елементів менше нуля.

6. Розв'язування розширеної задачі в М-методі проводять:

А. двоїстим симплекс-методом;
В. симплекс-методом;
С. методом Гаусса;
D. методом потенціалів.

Тести до лекцій 11–12

1. За якою формулою обраховується вектор $\boldsymbol{\Omega}$ *?*

A. $\Omega = C_б B^{-1}$;

B. $\Omega = C_б B$;

C. $\Omega = C_б P_j$;

D. $\Omega = P_j B^{-1}$.

2. За допомогою розв'язального елемента $\beta_{i_r s}$ *(напрямний рядок r; напрямний стовпець s) переобчислюють:*

A. тільки коефіцієнт цільової функції біля змінної x_j;

B. тільки значення оцінок Δ_j;

C. тільки координати вектора Ω;

D. основну таблицю МСМ.

3. Задача вважається нерозв'язною, якщо:

A. усі $\beta_{i_k s} \le 0,\ k = 1,2,...,m$;

B. усі $\beta_{i_k s} \ge 0,\ k = 1,2,...,m$;

C. усі $\beta_{i_k s} = 1,\ k = 1,2,...,m$;

D. усі $\beta_{i_k s} \ne 1,\ k = 1,2,...,m$.

4. Розв'язок уважається оптимальним, якщо:

A. $x_j = b_i$;

B. $\beta_{i_k s} \ge 0$;

C. $\Delta_j \ge 0$;

D. $b_i > 0$.

5. За якою з нижче представлених формул обчислюються значення оцінок?

A. $\Delta_j = C_б B^{-1} P_j - c_j$;

B. $\Delta_j = C_б B^{-1}$;

C. $\Delta_j = B^{-1}P_j$;

D. $\Delta_j = C_б B^{-1} - c_j$.

6. В основну таблицю МСМ записують стовпці A_i, які беруться з матриці:

A. P_j;

B. B^{-1};

C. $C_б$;

D. Ω.

7. Про що свідчить наявність $\beta_{i_k s} > 0$?

A. про перехід до нового базисного розв'язку та знаходження $\boldsymbol{\Theta}$;

B. про нерозв'язність задачі;

C. про оптимальний розв'язок;

D. про канонічність форми задачі.

8. B^{-1} – це:

A. вектор матриці P_j;

B. допоміжна діагональ матриці B;

C. обернена матриця до матриці B;

D. визначник матриці B.

9. Як знаходиться напрямний стовпець?

A. обирається найбільше за модулем від'ємне $\Delta_j^{(k)}$;

B. обирається найменше за модулем від'ємне $\Delta_j^{(k)}$;

C. обирається найбільше додатнє $\Delta_j^{(k)}$;

D. обирається найменше додатнє $\Delta_j^{(k)}$.

Тести до лекцій 13–14

1. Який вигляд має двоїста задача до даної прямої ЗЛП:

$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to max;$

$2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5;$

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 6;$

$-3x_1 + x_2 - 5x_3 \le 3;$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0?$

A.

$5y_1 + 6y_2 + 3y_3 \to min;$

$2y_1 + y_2 - 3y_3 \ge 1;$

$-y_1 + 2y_2 + y_3 \ge -3;$

$2y_1 - y_2 - 5y_3 = 2;$

$y_1 \ge 0, y_3 \ge 0;$

B.

$5y_1 + 6y_2 + 3y_3 \to min;$

$2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1;$

$-y_1 + 2y_2 - y_3 \ge -3;$

$2y_1 - y_2 + 5y_3 = 2;$

$y_1 \ge 0, y_3 \ge 0;$

C.

$5y_1 + 6y_2 - 3y_3 \to min;$

$2y_1 + Ny_2 - 3y_3 \ge 1;$

$-y_1 + 2y_2 + y_3 = -3;$

$2y_1 - y_2 - 5y_3 \ge 2;$

$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0;$

D.

$5y_1 + 6y_2 + 3y_3 \to min;$

$2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1;$

$-y_1 + 2y_2 - y_3 = -3;$

$2y_1 - y_2 + 5y_3 \ge 2;$

$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0;$

2. Який розв’язок має двоїста ЗЛП, якщо пряма ЗЛП та її остання симплекс-таблиця мають такий вигляд.

$x_1 - x_2 + x_3 \to max;$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5;$

$-x_1 + 3x_2 + x_4 = 6;$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0; x_4 \ge 0.$

i	Базис	$C_б$	P_0	1	–1	1	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	1	1	1	0	5	–1
2	P_5	–1	1	0	1	7	2
3			0	0	0	2	3

A. $y_1 = 0; y_2 = 0;\ F^*_{min} = 0;$

B. $y_1 = 2; y_2 = 3;\ F^*_{min} = 0;$

C. $y_1 = 3; y_2 = 3;\ F^*_{min} = 0;$

D. $y_1 = 1; y_2 = -1;\ F^*_{min} = 0.$

3. Кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність деяку іншу задачу лінійного програмування, яку називають:

A. простою;
B. двоїстою (або спряженою);
C. складною.

4. Двоїсті задачі відносно до загальної задачі ЛП (яку називають прямою) полягають у знаходженні:

A. максимального значення функції;
B. від'ємного значення функції;
C. будь-якого значення функції.

5. Двоїсті пари задач лінійного програмування поділяються на:

A. симетричні й несиметричні;
B. рівномірні й нерівномірні;
C. прості та складні.

6. Цільова функція двоїстої задачі, якщо у прямій задачі на максимум є умова $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ \left(i = \overline{1,m}\right),\quad x_j \geq 0,\quad j = \overline{1,n},$ *матиме вигляд:*

A. $F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max;$

B. $F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min;$

C. $F^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to max;$

D. $F^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min.$

7. За умов $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$, $\left(j = \overline{1,n}\right)$, *двоїстої задачі на мінімум: цільова функція прямої задачі матиме вигляд:*

A. $F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max;$

B. $F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min;$

C. $F^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to max;$

D. $F^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min.$

8. Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то й інша має оптимальний розв'язок, при цьому значення цільових функцій за їх оптимальних розв'язків між собою співвідносяться так:

A. $F_{max} > F^*_{min};$

B. $F_{max} = F^*_{min};$

C. $F_{max} < F^*_{min}.$

Тести до лекції 15

1. Яку із ЗЛП можна розв'язувати двоїстим симплекс-методом (без перетворень)?

A.

$$x_1 + x_2 \to min;$$
$$-x_1 + x_2 \le -N;$$
$$2x_1 - x_2 \le 1;$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$$

B.

$$x_1 + x_2 \to max;$$
$$-x_1 + x_2 = -1;$$
$$2x_1 - x_2 = 1;$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$$

C.

$$x_1 + x_2 \to max;$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = -1;$$
$$2x_1 - x_2 + x_4 = 1;$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0;$$

D.

$$-x_1 - x_2 \to max;$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = -1;$$
$$2x_1 - x_2 + x_4 = 1;$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

2. У якій із симплекс-таблиць виконується критерій не існування розв'язку (у двоїстому симплекс методі)?

A.

i	Базис	$C_б$	P_0	–1	–1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	1	1	1	1	0
2	P_4	0	–1	2	3	0	1
3			0	1	1	0	0

B.

i	Базис	$C_б$	P_0	–1	–1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	1	1	1	1	0
2	P_4	0	1	–2	3	0	1
3			0	1	1	0	0

C.

i	Базис	$C_б$	P_0	–1	–1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	1	–1	1	1	0
2	P_4	0	–1	–2	–3	0	1
3			0	1	1	0	0

D.

i	Базис	$C_б$	P_0	–1	–1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	–1	–1	1	1	0
2	P_4	0	–1	–2	–3	0	1
3			0	1	1	0	0

3. Який елемент симплекс-таблиці є розв'язальним у двоїстому симплекс-методі?

i	Базис	$C_б$	P_0	–6	–1	1	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	4	–1	–2	1	0
2	P_4	0	–5	–3	–1	0	1
3				6	1	0	0

A. у стопці P_1 в рядку 1;
B. у стопці P_1 в рядку 2;
C. у стопці P_2 в рядку 1;
D. у стопці P_2 в рядку 2.

4. Двоїстий симплекс-метод використовується для розв'язання:

A. задач лінійного програмування;
B. задач нелінійного програмування;
C. задач динамічного програмування.

5. Двоїстий симплекс-метод можна застосовувати під час розв'язку задач, коли вільні члени системи рівнянь можуть бути:

A. тільки додатними;
B. тільки від'ємними;
C. коли є хоч один від'ємний.

6. Якщо серед елементів стовпця P_0 рядків $1 \div m$ у симплекс-таблиці двоїстого симплекс-методу відсутні від'ємні числа, то можна вважати, що розв'язок:

A. є допустимим розв'язком;
B. не є допустимим розв'язком;
C. є оптимальним розв'язком.

7. Розв'язок називається псевдодопустимим розв'язком, якщо крім виконання всіх інших необхідних умов:

A. $\Delta_j = 0$;

B. $\Delta_j \le 0$;

C. $\Delta_j = 1$;

D. $\Delta_j \ge 0$.

8. Для переходу до нового псевдодопустимого розв'язку потрібно, щоб:

A. у псевдодопустимому розв'язку $X = (b_1, b_2, ..., b_m; 0, ..., 0)$, який визначається базисом $P_1, ..., P_m$ є від'ємні числа $b_i < 0, i = 1, 2, ..., m,$ такі, що для будь-якого з них існує число $a_{ij} \ge 0\left(j = \overline{1, n}\right)$;

B. у псевдодопустимому розв'язку $X = (b_1, b_2, ..., b_m; 0, ..., 0)$, який визначається базисом $P_1, ..., P_m$ є від'ємні числа $b_i < 0, i = 1, 2, ..., m,$ такі, що для будь-якого з них існує число $a_{ij} \le 0\left(j = \overline{1, n}\right)$;

C. у псевдодопустимому розв'язку $X = (b_1, b_2, ..., b_m; 0, ..., 0)$, який визначається базисом $P_1, ..., P_m$ є додатні числа $b_i > 0, i = 1, 2, ..., m,$ такі, що для будь-якого з них існує число $a_{ij} \ge 0\left(j = \overline{1, n}\right)$;

D. у псевдодопустимому розв'язку $X = (b_1, b_2, ..., b_m; 0, ..., 0)$, який визначається базисом $P_1, ..., P_m$ є додатні числа $b_i > 0, i = 1, 2, ..., m,$ такі, що для будь-якого з них існує число $a_{ij} \le 0\left(j = \overline{1, n}\right)$.

9. Як зміниться значення цільової функції, якщо перейти до нового псевдодопустимого розв'язку?

A. не збільшиться;

B. не зменшиться.

10. У двоїстому симплекс-методі, у симплекс-таблиці записано оптимальний розв'язок, якщо:

A. усі елементи стовпця P_0 (рядки $1 \div m$) від'ємні;

B. усі елементи стовпця P_0 (рядки $1 \div m$) додатні;

C. стовпець P_0 містить хоча б один від'ємний елемент у рядках $1 \div m$;

D. стовпець P_0 містить хоча б один додатній елемент у рядках $1 \div m$.

11. Якщо у стовпці P_0 в рядках $1 \div m$ існують від'ємні числа, то для перерахування симплекс-таблиці вибирається:

A. найбільше за абсолютною величиною від'ємне число;
B. найменше за абсолютною величиною від'ємне число;
C. найбільше за абсолютною величиною додатнє число;
D. найменше за абсолютною величиною додатнє число.

12. Якщо у стовпці P_0 (в рядках $1 \div m$) існує кілька від'ємних чисел, то для перерахунку використовується будь-яке з них. Вибір цього числа b_l визначає вектор P_l, що включається з базису. Щоб визначити, який вектор потрібно включити в базис, потрібно знайти:

A. $\min\limits_{a_{lj}<0}\left(-\dfrac{\Delta_j}{a_{lj}}\right)$;　　B. $\min\limits_{a_{ik}>0}\left(\dfrac{b_i}{a_{ik}}\right)$;

C. $\max\limits_{a_{lj}<0}\left(-\dfrac{\Delta_j}{a_{lj}}\right)$;　　D. $\max\limits_{a_{ik}>0}\left(\dfrac{b_i}{a_{ik}}\right)$.

13. Якщо на деякому кроці двоїстого симплекс-методу виявляється, що в i-му рядку ($i = 1,2,...,m$) симплекс-таблиці у стовпці вектора P_0 стоїть від'ємне число b_i, а серед інших елементів цього рядка у стовпцях $P_1,...,P_m$ не має від'ємних, то якою є вихідна задача:

A. розв'язана;

B. не має розв'язків;

C. потребує подальшого розв'язку.

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА 1
(варіанти для першої групи)

Варіант 1–1

1. Скласти математичну модель задачі.

На меблевій фабриці із стандартних листів фанери необхідно вирізати деталі трьох видів у кількостях, відповідно рівних 24, 31 та 18 шт. Кожний лист фанери може бути розрізаний на деталі двома способами. Кількість деталей, яку отримуємо при даному способі розкрою наведено в таблиці. У ній же вказана величина відходів, які отримуємо в разі даного способу розкрою одного листа фанери.

Вид деталі	Кількість деталей (шт.) під час розкрою способом	
	1	2
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина відходів (см^2)	12	16

Визначити, скільки листів фанери та яким способом слід розкроїти так, що було отримано не менше потрібної кількості деталей за мінімальних відходів.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 4x_1 - 3x_2 \to min$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 - x_2 \ge -1 \\ \frac{1}{3}x_1 - x_2 \le 1 \\ x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв’язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 3x_1 - x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 3x_1 + 8x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 9 \\ 3x_1 + 6x_2 \le 5 \\ 7x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -\frac{3}{2}x_1 - \frac{7}{4}x_2 + \frac{5}{2}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 \le 6 \\ -x_1 + 4x_2 + 4x_3 \le 19 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 \le -8 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 5x_1 + x_2 + 6x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 36 \\ x_1 + 3x_2 \ge 15 \\ -x_1 + 2x_2 \le 22 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -x_1 - 10x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 2x_5 = -1 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_4 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 1–2

1. Скласти математичну модель задачі.

На тварино-фермі можуть вирощуватись чорно-бурі лисиці та песці. Для забезпечення нормальних умов їх вирощування використовується три види кормів. Кількість корму кожного виду, який повинні щоденно отримувати лисиці та песці, наведено в таблиці. У ній також указані загальна кількість корму кожного виду, який може бути використаний тварино-фермою, та прибуток від реалізації однієї шкурки лисиці й песця.

Вид корму	Кількість одиниць корму, який щоденно повинні отримувати		Загальна кількість кормів
	лисиця	песець	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації однієї шкурки (грн)	16	12	

Визначити, скільки лисиць і песців слід вирощувати на тварино-фермі, щоб прибуток від реалізації їх шкурок був максимальним.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$F = 4x_1 - 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \le 1 \\ -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \ge -1 \\ x_1 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$F = -x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \le 1 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \le 1 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = 5x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \le 10 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 9 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$F = -\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{5}{2}x_3 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 \le -1 \\ x_1 - x_2 = -3 \\ 3x_2 + 4x_3 \le 17 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 5x_1 + 4x_2 - x_3 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 = 52 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 40 \\ 2x_1 - 6x_2 \leq 32 \\ x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -2x_2 - 4x_4 \to max$$

$$\begin{cases} -6x_1 + 3x_2 = -1 \\ -3x_2 + x_3 - 3x_4 = -2 \\ 6x_2 + 12x_4 + x_5 = -2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 1–3

1. Скласти математичну модель задачі.

Для виготовлення різних виробів А, В та С підприємство використовує три різних види сировини. Норми розходів сировини на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу А, В та С, а також загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана підприємством, наведені в таблиці.

Вид сировини	Норми затрат сировини (кг) на один виріб			Загальна кількість сировини (кг)
	А	В	С	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Ціна одного виробу (грн)	9	10	16	

Вироби А, В та С можуть вироблятися в будь-яких співвідношеннях, але виробництво обмежене виділеною підприємству сировиною кожного виду.

Скласти план виробництва виробів, за якого загальна вартість усієї виробленої підприємством продукції була б максимальною.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + x_2 \geq -1 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 3x_1 + 3x_2 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_2 \geq -1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 2x_1 + 8x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 10 \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 7 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -\frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{5}{4}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 1 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 \le -1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 2x_1 - x_2 + 8x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \le 54 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 12 \\ 3x_1 - x_2 = 33 \\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -x_1 - 7x_2 - x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -1 \\ 4x_1 - 32x_3 + 4x_4 = -7 \\ 8x_3 - 16x_4 + 4x_5 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 1–4

1. Скласти математичну модель задачі.

Для підтримання нормальної життєдіяльності людині щоденно необхідно вживати не менше 118 г білків, 56 г жирів, 500 г вуглеводів, 8 г мінеральних солей. Кількість поживних речовин, що містяться в 1 кг кожного виду продуктів, які споживаються людино, а також ціна 1 кг кожного з цих продуктів приведені в таблиці:

Поживні речовини	Вміст (г) поживних речовин в 1 кг продуктів						
	м'ясо	риба	молоко	масло	сир	крупа	картопля
Білки	180	190	30	10	260	130	21
Жири	20	3	40	865	310	30	2
Вуглеводи	–	–	50	6	20	650	200
Мінеральні солі	9	10	7	12	60	20	10
Ціна 1 кг продукту (грн)	1,8	1,0	0,28	3,4	209	0,5	0,1

Скласти денний раціон, що містить не менше мінімальної добової норми потреби людини в необхідних поживних речовинах за мінімальної загальної вартості продуктів, що споживаються.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 4x_1 - 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + x_2 \geq -1 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ -x_2 \geq -3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 2x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \leq 1 \\ -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 9x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 6 \\ 7x_1 + x_2 \le 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -4x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 \le -5 \\ -4x_1 + x_2 \le 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 10 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 4x_1 + x_2 - 2x_3 \to min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 34 \\ 8x_3 = 16 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 14 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -1/2x_2 - 1/3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_3 - 5x_4 = -2 \\ 20x_2 + 5x_3 - 25x_4 = -1 \\ 15x_3 - 30x_4 + 10x_5 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 1–5

1. Скласти математичну модель задачі.

Стальні дроти довжиною 110 см необхідно розрізати на деталі довжиною 45, 35 та 50 см. Необхідна кількість деталей даного виду становить відповідно 40, 30 та 20 шт. Можливі варіанти розрізу та величина відходів при кожному з них наведені в таблиці:

Довжина деталей, см	Варіант розрізу					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	–	–	–
35	–	1	–	3	1	–
50	–	–	1	–	1	2
Величина відходів, см	20	30	15	5	25	10

Визначити, скільки дротин по кожному з можливих варіантів слід розрізати, щоб отримати не менше потрібної кількості деталей кожного виду при мінімальних відходах.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 4x_1 - 2x_2 \to min$$

$$\begin{cases} -5x_1 - 8x_2 \ge -40 \\ \dfrac{1}{4}x_1 + x_2 \ge -1 \\ x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв’язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 2x_1 + x_2 \to min$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}x_1 - x_2 \ge -1 \\ \dfrac{1}{3}x_1 - x_2 \le 1 \\ x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 6x_1 + 5x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 4x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 \le 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 \le -9 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 \le 10 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 7x_1 - x_2 + 5x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ x_1 + 2x_2 \ge 9 \\ -3x_1 + x_2 \le 22 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -1 - 3x_1 - x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 2x_2 - 18x_4 = -1 \\ 12x_1 + 6x_3 - 18x_4 = -1 \\ 3x_1 - 6x_4 + 3x_5 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 1–6

1. Скласти математичну модель задачі.

З відходів виробництва підприємство може організувати випуск чотирьох видів продукції. Для цього воно планує використовувати два типи взаємозамінного обладнання. Кількість виробів кожного виду, який може бути виготовлений на відповідному обладнанні протягом 1 год, а також витрати, пов'язані з виробництвом одного виробу, наведені в таблиці:

Тип обладнання	Кількість виробів, що виготовляються протягом 1 год, виду				Витрати (грн), пов'язані з виробництвом протягом 1 год виробів виду			
	1	2	3	4	1	2	3	4
I	8	7	4	5	2,7	2,6	2,7	2,4
II	9	8	6	4	2,6	2,7	2,6	2,5

Обладнання I типу підприємство може використовувати не більше 80 год, а обладнання II типу – не більше 60 год.

Ураховуючи, що підприємству слід виготовити вироби кожного виду відповідно не менше 240, 160, 150 та 220 од., визначити, протягом якого часу та на якому обладнанні слід виготовити кожний із виробів так, щоб отримати не менше потрібної кількості виробів за мінімальних затрат на їх виробництво.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 2x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq -1 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 - 3x_2 \geq -3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$F = 4x_1 - 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 - x_2 \geq -1 \\ \frac{1}{3}x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = 2x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 4x_1 + x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$F = -x_1 + 2x_2 + x_3 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 9 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$F = 6x_1 + 3x_2 - x_3 \to min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 - 9x_3 \geq 50 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = -1/2x_1 - x_5 \to max$

$$\begin{cases} 21x_1 + 7x_3 - 28x_5 = -1 \\ 28x_1 + 7x_2 - 49x_5 = -2 \\ 14x_1 + 28x_4 - 49x_5 = -5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 1–7

1. Скласти математичну модель задачі.

Із трьох видів сировини необхідно скласти суміш, у склад якої повинно входити не менше 26 од. хімічної речовини А, 30 од. – речовини В та 24 од. – речовини С. Кількість одиниць хімічної речовини, що міститься в 1кг сировини кожного виду, вказано в таблиці. У ній же наведена ціна 1кг сировини кожного виду.

Речовина	Кількість одиниць речовини, що міститься в 1 кг сировини виду			
	1	2	3	4
A	1	1	–	4
B	2	–	3	5
C	1	2	4	6
Ціна 1 кг сировини, грн	5	6	7	4

Скласти суміш, що містить не менше потрібної кількості речовини даного виду та має мінімальну вартість.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$F = x_1 - x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 4x_1 - 3x_2 \to min$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \le 1 \\ \frac{1}{3}x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 20 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -2x_1 - 2x_2 - \frac{4}{3}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10 \\ -4x_1 - 4x_2 - 4x_3 \le -20 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 8x_1 + x_2 - 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 42 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \ge 10 \\ 2x_1 + 3x_2 = 34 \\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв’язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -1/2x_2 - 3x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_4 = -1 \\ 5x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ -10x_2 + x_4 + x_5 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 1–8

1. Скласти математичну модель задачі.

Для виробництва продукції трьох видів A, B та C використовуються три різні види сировини. Кожний із видів сировини може бути використаний в обсязі, відповідно не більшому, ніж 180, 210 та 236 кг. Норми затрат кожного з видів сировини на одиницю продукції даного виду та ціна одиниці продукції кожного виду наведені в таблиці.

Вид сировини	Норми затрат сировини (кг) на одиницю продукції		
	виріб A	виріб B	виріб C
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Ціна одиниці продукції (грн)	10	14	12

Визначити план випуску продукції, за якого загальна вартість усієї виробленої продукції була б максимальною.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 4x_1 - 3x_2 \to min$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \leq 1 \\ -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв’язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + x_2 \geq -1 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Розв’язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. Розв’язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = \frac{6}{5}x_1 + \frac{6}{5}x_2 - \frac{12}{5}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 - x_3 \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6. Розв’язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = -2x_1 - 4x_2 + 7x_3 \to min$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_3 = 9 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 16 \\ x_1, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -x_1 - 1/4x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 32x_4 + 4x_5 = -3 \\ -4x_1 + 4x_2 + 4x_4 = -2 \\ -8x_1 + 4x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 1–9

1. Скласти математичну модель задачі.

Для нормального проходження технологічного процесу в одному з цехів кондитерської фабрики потрібні цукор, патока, горіхи, олія, какао, місячна норма споживання яких повинна бути не меншою, відповідно, ніж 110, 100, 60, 20, 25, з яких виробляють горіхову карамель трьох видів *B1, B2, B3*. У таблиці даний вміст кожного продукту в кожному з видів карамелей в кг на 1 кг.

Продукти	Вміст продуктів у карамелі виду		
	B1	B2	B3
Цукор	0,6	0,6	0,65
Патока	0,3	0,35	0,13
Горіхи	0,1	0,1	0,2
Олія	0,05	0,06	0,07
Какао	0,05	0,04	0
Ціна 1 кг карамелей	3,50	4,00	4,00

Визначити оптимальну, з точки зору максимізації сумарної вартості виробленої продукції, структуру виробництва даної продукції.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$F = 3x_1 - x_2 \rightarrow max$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \geq -4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ \quad\quad x_2 \leq 4 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$F = 4x_1 - 2x_2 \rightarrow max$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{4}x_1 - x_2 \leq 1 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ \quad\quad x_2 \leq 3 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + 3x_2 \leq 17 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$F = 3x_2 - x_3 \rightarrow max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 \leq -2 \\ 3x_2 - x_3 \leq 2 \\ -2x_2 - x_3 \leq -3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$F = -x_1 + 6x_2 + 2x_3 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \le 4 \\ -x_1 + 4x_2 = 22 \\ 2x_1 + x_3 \ge 8 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = -1/2x_3 - x_4 \to max$

$$\begin{cases} 2x_3 - 8x_4 + 2x_5 = -1 \\ 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_3 - 6x_4 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 1–10

1. Скласти математичну модель задачі.

На чотирьох верстатах виготовляють продукцію трьох видів. Відомі час обробки деталей на кожному верстаті, час роботи верстатів протягом одного циклу виробництва та прибуток від реалізації кожної деталі. Скільки треба виготовляти деталей кожного виду, щоб прибуток від реалізації механізму, що складається із двох деталей *A*, трьох деталей *B* і деталі *C*, був максимальним.

Верстати	Час роботи верстата за цикл виробництва	Норми використання ресурсів		
		A	B	C
I	16	1	2	3
II	26	2	3	5
III	10	1	1	0
IV	24	3	1	2
Прибуток від реалізації		4	6	7

Визначити оптимальну, з точки зору максимізації прибутку, структуру виробництва даної продукції.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$F = -x_1 + 2x_2 \rightarrow max$

$$\begin{cases} -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \le 1 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \le 1 \\ -\frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2}x_2 \ge -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$F = 4x_1 - 2x_2 \rightarrow min$

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \le 40 \\ -\frac{1}{4}x_1 - x_2 \le 1 \\ x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 9 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{10}{3}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 4x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 13 \\ 4x_1 + x_2 \le 17 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = -x_1 + 6x_2 - 2x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 42 \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 12 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -1/3x_1 - 1/2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 2x_5 = -3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_4 = -5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 1–11

1. Скласти математичну модель задачі.

Для нормальної життєдіяльності людині треба споживати щодоби 10 г. вітаміну A, 15 г вітаміну C і 3 г вітаміну B. Потрібно також, щоб у раціоні вміст білків, жирів та вуглеводів був не менше 200, 100, 300 г відповідно. Вміст даних речовин у грамах на 1 кг продуктів наведено в таблиці.

	Білки	Жири	Вуглев.	Віт. A	Віт. B	Віт. C	Кільк. ккал
Хліб	5	15	100	0,1	0,05	0,02	200
Молоко	80	50	60	0,9	0,07	3,0	120
М'ясо	150	100	80	5,0	0,10	5,0	2 000
Овочі	10	30	150	0,05	0,01	7,0	150
Яйця	120	10	70	2,5	0,10	2,0	2 600

Скласти раціон, який задовольняє всі ці вимоги з продуктів, які є в наявності, щоб кількість кілокалорій була мінімальною.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 6x_1 - x_2 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 2 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 2x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq -1 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 - 3x_2 \geq -3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 9 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F=-\frac{7}{8}x_1+\frac{1}{2}x_2-x_3\to max$$

$$\begin{cases}-x_1-x_2-x_3\le -3\\ -x_1+2x_2-x_3\le 0\\ 2x_2-x_3\le 2\\ x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$$

6. Розв’язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F=x_1+2x_2+7x_3\to min$$

$$\begin{cases}3x_1+6x_2=46\\ -x_1+2x_2-x_3\ge 33\\ x_1+3x_2\le 7\\ x_2,x_3\ge 0\end{cases}$$

8. Розв’язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F=-x_2-10x_4\to max$$

$$\begin{cases}2x_1-2x_2-2x_4=-1\\ -2x_2+2x_4+x_5=-2\\ -4x_2+x_3+2x_4=-1\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0\end{cases}$$

Варіант 1–12

1. Скласти математичну модель задачі.

Учнівській бригаді виділили під посів культур *A* і *B* дві ділянки землі площею 8 і 9 га. Середня врожайність із першої ділянки культури *A* – 16 ц з га, культури *B* – 35 ц з га, з другої ділянки – культури *A* – 14 ц з га, культури *B* – 30 ц з га. Від реалізації 1 ц культури *A* одержують 2,5 грн, культури *B* – 1,4 грн. Скільки гектарів і на яких ділянках потрібно відвести під кожну культуру, щоб прибуток від реалізації був максимальним, якщо за планом мають зібрати не менше 150 ц культури *A* і 220 ц культури *B*?

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = x_1 - x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв’язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = x_1 - x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв’язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 19 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв’язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ -4x_1 + x_2 - 4x_3 \le -4 \\ -2x_1 - 3x_3 \le -6 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв’язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 2x_1 - 6x_2 + 6x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 20 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \ge 13 \\ -x_1 + 4x_2 = 17 \\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв’язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -4x_3 - 2x_4 \to max$$

$$\begin{cases} -6x_2 + 3x_4 = -1 \\ -3x_3 - 3x_4 + x_5 = -2 \\ x_1 - 12x_3 + 6x_4 = -2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 1–13

1. Скласти математичну модель задачі.

Завод освоїв випуск додаткової продукції видів B_1, B_2, B_3, для виробництва якої потрібна сировина чотирьох видів A_1, A_2, A_3, A_4, споживання якої повинно коливатись у заданому діапазоні. Визначити кількість продукції, яку треба виготовити, щоб її вартість була максимальною.

Сировина	Щомісячне споживання сировини від a до b		Витрати на одиницю продукції		
	a	b	B_1	B_2	B_3
A_1	1 500	1 550	2	4	8
A_2	800	825	2	2	6
A_3	300	350	0	1	2
A_4	0	200	1	0	0
Ціна одиниці продукції			100	120	500

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$F = 3x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ -2x_1 - 5x_2 \ge -1 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$F = 4x_1 - 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \le 1 \\ \frac{1}{3}x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = 4x_1 + 6x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 13 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 13 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$F = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 4x_3 \le 3 \\ 2x_1 + x_3 \le 10 \\ -2x_2 \le -2 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв’язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$F = 4x_1 - x_2 + 5x_3 \to min$

$$\begin{cases} -8x_1 + 5x_2 \le 48 \\ 9x_3 = 27 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 31 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв’язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = -x_2 - 7x_4 - x_5 \to max$

$$\begin{cases} -2x_3 - 2x_4 - 2x_5 = -1 \\ 4x_2 + 4x_3 - 32x_5 = -7 \\ -4x_1 - 16x_3 + 8x_5 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 1–14

1. Скласти математичну модель задачі.

Із двох видів бензину складають суміші *A* і *B*. Суміш *A* містить 60 % бензину *I* і 40 % бензину *II*; суміш *B* містить 80 % бензину *I* і 20% бензину *II*. Ціна 1 кг суміші *A* – 30 коп., суміші *B* – 40 коп. Скласти план утворення сумішей, якщо в наявності є 50 т бензину *I* і 80 т бензину *II*, за якого може бути отриманий максимальний прибуток, за умови, що бензин *I* повинен бути повністю використаний.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$F = x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ -x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 - 3x_2 \ge -3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$F = 3x_1 - x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \geq -4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = 3x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$F = x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{7}{4}x_3 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 \leq -1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 4x_3 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$F = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to max$

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 7x_3 \leq 44 \\ 7x_1 + 2x_2 = 56 \\ 6x_1 - x_3 \geq 38 \\ x_1, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -1/2x_4 - 1/3x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 5x_2 - 5x_3 - 5x_5 = -2 \\ -25x_3 + 20x_4 + 5x_5 = -1 \\ 10x_1 - 30x_3 + 15x_5 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 1–15

1. Скласти математичну модель задачі.

Швейна майстерня виготовляє жіночі костюми, плаття та спідниці із тканин трьох видів *A*, *B*, *C*.

Тканини	Наявність тканини в м^2	Витрати на одиницю продукції		
		костюми	плаття	спідниці
A	100	2,5	2,0	0,8
B	80	0,2	0,3	0,2
C	150	1,0	0,8	0,7
Ціна одиниці продукції		100	80	40

Як спланувати виробництво, щоб продукції можна було реалізувати на максимальну суму, якщо відомо, що спідниць продається втричі більше, ніж костюмів, а платтів – удвічі більше?

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 3x_1 - x_2 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \geq -4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F=-x_1+2x_2\to max$$

$$\begin{cases} -x_1-\frac{1}{2}x_2\le 1 \\ \frac{1}{4}x_1+\frac{1}{5}x_2\le 1 \\ \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2\le 1 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F=4x_1+3x_2\to max$$

$$\begin{cases} 3x_1+x_2\le 10 \\ 2x_1+x_2\le 10 \\ x_1+x_2\le 4 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F=\frac{7}{9}x_1+\frac{19}{9}x_2+2x_3\to max$$

$$\begin{cases} -x_1-x_2+2x_3=0 \\ 2x_2+4x_3\le 8 \\ 2x_1+3x_2\le 6 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F=-7x_1+x_2+9x_3\to max$$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-11x_3=38 \\ 2x_1+7x_2\ge 31 \\ x_1+4x_2\le 58 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = -1/3x_2 - x_3 \to max$

$$\begin{cases} 12x_2 - 18x_3 + 6x_4 = -1 \\ 12x_2 - 18x_3 + 6x_5 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 1–16

1. Скласти математичну модель задачі.

Підприємство має три види устаткування, на якому можна виробляти продукцію 4-х видів, збут якої необмежений, тому підприємство само планує асортимент і величину випуску продукції. Сировина також може постачатися в необмеженій кількості. У таблиці наведений місячний фонд часу використання кожного виду устаткування, витрати часу на одиницю виробу й величину прибутку від реалізації одиниці продукції кожного виду. Треба знайти план випуску продукції, щоб щомісячний прибуток був максимальний.

	Місячний фонд вик. часу	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	120	1	0	3	6
A_2	230	2	3	2	0
A_3	220	2	5	1	7
Прибуток за одиницю виробу		45	50	20	60

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$F = -x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 1 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \leq 1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2} \geq -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 5x_1 + 5x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 15; \\ x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_2 \leq 8; \\ x_1 - 2x_2 \geq -2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 5x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 13 \\ 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{7}{3}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 0 \\ x_1 - 3x_3 \leq -2 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 2x_1 + 5x_2 - x_3 \to min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 9x_2 = 13 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 41 \\ 2x_1 + x_2 \leq 18 \\ x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -x_1 - 1/2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -28x_1 + 4x_2 + 7x_5 = -1 \\ -49x_1 + 28x_2 + 7x_4 = -2 \\ -49x_1 + 14x_2 + 28x_3 = -5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 1–17

1. Скласти математичну модель задачі.

Комерційна фірма рекламує свою продукцію, використовуючи місцеві радіо- та телевізійну мережі. Витрати на рекламу в бюджеті фірми становлять 10 000 дол. на місяць. Хвилина радіореклами коштує фірмі 5 дол., а телереклами – 90 дол. Фірма має намір використовувати радіорекламу принаймні вдвічі частіше, ніж рекламу на телебаченні. Досвід показав: обсяг збуту, що його забезпечує 1 хв телереклами, у 30 разів перевищує обсяг збуту, що його забезпечує 1 хв радіореклами.

Визначити оптимальний розподіл коштів, які щомісяця мають витрачатися на рекламу, за якого обсяг збуту продукції фірми буде найбільшим.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 3x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_2 \geq -1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = x_1 - x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -\frac{19}{7}x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{9}{7}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 \le -2 \\ -4x_1 + x_3 \le -8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = x_1 - 3x_2 + 8x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 11 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 37 \\ x_1 - 8x_2 = 14 \\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -3x_3 - 1/2x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 5x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -1 \\ -2x_3 + 5x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 + x_3 - 10x_4 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 1–18

1. Скласти математичну модель задачі.

Невелике сільськогосподарське підприємство спеціалізується на вирощуванні овочів, зокрема капусти та томатів, використовуючи для цього мінеральні добрива (фосфорні та калійні). Норми внесення мінеральних добрив під кожну культуру та запас добрив у господарстві наведено в таблиці:

Мінеральні добрива	Норма внесення добрива, кг діючої речовини/га		Запас добрив, кг
	капуста	томати	
Фосфорні	150	400	6 000
Калійні	500	300	9 000

Під вирощування овочів відведено земельну ділянку площею 20 га. Очікуваний прибуток господарства від реалізації 1 ц капусти становить 10 ум. од., 1 ц томатів – 20 ум. од. Середня врожайність капусти в господарстві дорівнює 300 ц/га, а томатів – 200 ц/га.

Визначити такий варіант розміщення культур на земельній ділянці, який максимізує прибуток господарства за умови, що витрати мінеральних добрив не перевищують максимально можливого запасу.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = x_1 - x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ -2x_1 - 5x_2 \ge -1 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 3x_1 + x_2 \le 7 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -x_1 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -4 \\ 2x_1 + 2x_3 = 8 \\ -4x_1 - 4x_2 + x_3 \le -12 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 3x_1 - 7x_2 + 6x_3 \to min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 56 \\ 9x_3 = 46 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 11 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -x_2 - 1/4x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 32x_3 = -3 \\ -4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -2 \\ -8x_2 + 4x_3 + 4x_5 = -5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 1–19

1. Складти математичну модель задачі.

Фірма виготовляє два види продукції A та B, використовуючи для цього два види сировини, добовий запас якої не перевищує відповідно 210 та 240 ум. од. Витрати сировини для виготовлення одиниці продукції кожного виду подано таблицею:

Сировина	Норма витрат сировини, ум. од., для виготовлення продукції	
	A	B
1	2	5
2	3	4

Відділ збуту фірми вважає, що виробництво продукції B має становити не більш як 65 % загального обсягу реалізації продукції обох видів. Ціна одиниці продукції A та B дорівнює відповідно 10 та 40 дол.

Визначити оптимальний план виробництва продукції, який максимізує дохід фірми.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$F = 3x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 \geq -10 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$F = x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ -x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 - 3x_2 \geq -3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$F = -\frac{1}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_3 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 \leq -3 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$F = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 9x_3 \le 33 \\ 8x_1 + x_2 = 47 \\ x_1 - 6x_3 \ge 29 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = -x_3 - 1/2x_5 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 - 8x_3 + 2x_5 = -1 \\ 2x_3 + 6x_4 - 4x_5 = -3 \\ 2x_2 - 6x_3 + 2x_5 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 1–20

1. Скласти математичну модель задачі.

Фірма виготовляє деталі до автомобілів, ринок збуту яких практично необмежений. Будь-яка деталь має пройти послідовну обробку на трьох верстатах, час використання кожного з яких становить 10 год/добу. Тривалість обробки, хв, однієї деталі на кожному верстаті наведено в таблиці:

Деталь	Тривалість обробки деталі, хв, за верстатами		
	1	2	3
А	10	6	8
В	5	20	15

Прибуток від оптової реалізації однієї деталі кожного виду становить відповідно 20 та 30 дол.

Визначити оптимальні добові обсяги виробництва деталей кожного виду, що максимізують її прибуток.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$F = x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ -x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 - 3x_2 \ge -3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$F = 3x_1 - x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \ge -4 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ 2x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 + 4x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$F = x_1 + x_2 - 2x_3 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \le -3 \\ x_2 - x_3 \le -2 \\ -2x_2 - 2x_3 \le -4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$F = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \to max$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 48 \\ 3x_1 - x_2 \ge 15 \\ 2x_1 + 8x_2 \le 43 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = -1/3x_2 - 1/2x_4 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_4 = -3 \\ 2x_2 - 4x_4 + 2x_5 = -1 \\ -2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 1–21

1. Скласти математичну модель задачі.

Підприємство виготовляє письмові столи типів А та В. Для одного столу типу А необхідно 2 м^2 деревини, а для столу типу В – 3 м^2. Підприємство може отримати до 1 200 м^2 деревини за тиждень. Для виготовлення одного столу типу А потрібно 12 хв роботи обладнання, а для моделі В – 30 хв. Обладнання може використовуватися 160 год на тиждень. Оцінено, що за тиждень може бути реалізовано до 550 столів.

Відомо, що прибуток від реалізації одного письмового столу типу А становить 30 дол., а типу В – 40 дол. Скільки столів кожного типу необхідно виготовляти за тиждень?

Визначити оптимальну, з точки зору максимізації прибутку, структуру виготовлення письмових столів типів А та В.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$F = 3x_1 - x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \geq -4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$F = -x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 1 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \leq 1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geq -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 16 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$F = \frac{17}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_3 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \leq 14 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq -13 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$F = -2x_1 + 2x_2 - x_3 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 16 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 46 \\ 2x_1 - x_2 \leq 48 \\ x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = -10x_1 - x_5 \to max$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_4 - 2x_5 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_5 = -2 \\ 2x_1 + x_3 - 4x_5 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 1–22

1. Скласти математичну модель задачі.

Підприємство електронної промисловості виготовляє дві моделі радіоприймачів, причому кожна модель складається на окремій технологічній лінії. Добовий обсяг виробництва першої лінії становить 60 од., а другої – 70 од. На один радіоприймач першої моделі витрачається 10 однотипних елементів електронних схем, а на радіоприймач другої – 8. Максимальний добовий запас елементів, що використовуються у виробництві, становить 1 000 од. Прибуток від реалізації одного радіоприймача першої та другої моделі дорівнює відповідно 35 та 25 дол.

Визначити оптимальні обсяги виробництва радіоприймачів обох моделей.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = -x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \le 1 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \le 1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \ge -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 3x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_2 \ge -1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{7}{4}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 6 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = x_1 - 4x_2 + 3x_3 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 17 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 23 \\ x_1 + x_2 = 11 \\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -2x_1 - 4x_3 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_5 = -1 \\ -3x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 6x_1 + 12x_3 + x_4 = -2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 1–23

1. Скласти математичну модель задачі.

Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі А, В та С використовує три види основної сировини: цукровий пісок, патоку та фруктове пюре. Норми затрат сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі даного виду наведені в таблиці.

У ній також указано загальну кількість сировини кожного виду, яка може бути використана фабрикою, а також наведений прибуток від реалізації 1 т карамелі даного виду.

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1 т карамелі			Загальна кількість сировини (т)
	А	В	С	
Цукровий пісок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктове пюре	–	0,1	0,1	120
Прибуток від реалізації 1 т продукції (грн)	108	112	126	

Знайти план виробництва карамелі, що забезпечує максимальний прибуток від її реалізації.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 3x_1 + 3x_2 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_2 \ge -1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = x_1 - x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -\frac{8}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{16}{5}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 4x_3 \le 10 \\ -4x_1 \le -4 \\ -x_1 + 4x_2 + 4x_3 \le 15 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв’язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = x_1 + 3x_2 - 3x_3 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 9 \\ 7x_3 = 16 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 33 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв’язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -7x_1 - x_2 - x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ -32x_2 + 4x_3 + 4x_5 = -7 \\ 8x_2 - 16x_3 + 4x_4 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 1–24

1. Скласти математичну модель задачі.

Під час годування тварин кожна тварина щоденно повинна отримати не менше 60 од. поживної речовини А, не менше 50 од. поживної речовини В та не менше 12 од. речовини С. Указані поживні речовини містять три види кормів. Вміст одиниць поживних речовин в 1 кг кожного з видів корму наведено в таблиці:

Поживні речовини	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму виду		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Скласти денний раціон, що забезпечує отримання необхідної кількості поживних речовин при мінімальних грошових затратах, якщо ціна 1кг корму I виду становить 9 грн, корму II виду – 12 грн та корму III виду – 10 грн.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 2x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \le 1 \\ -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \ge -1 \\ \qquad x_1 \le 5 \\ \quad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ \qquad x_2 \le 1 \\ \quad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 4x_1 + 5x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 5x_1 + x_2 \le 13 \\ x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = \frac{5}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 - \frac{5}{4}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \le 24 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le -11 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 5x_1 - 7x_2 + 2x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 \le 22 \\ -3x_1 + 5x_2 = 53 \\ 2x_1 - x_3 \ge 16 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -1/2x_1 - 1/3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -5x_2 - 5x_3 + 5x_5 = -2 \\ 20x_1 + 5x_2 - 25x_3 = -1 \\ 15x_2 - 30x_3 + 10x_4 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 1–25

1. Скласти математичну модель задачі.

Для виробництва столів та шаф меблева фабрика використовує необхідні ресурси. Норми затрат ресурсів на один виріб даного виду, прибуток від реалізації одного виробу та загальна кількість наявних ресурсів кожного виду наведені в таблиці:

Ресурси	Норми затрат ресурсів на один виріб		Загальна кількість ресурсів
	стіл	шафа	
Деревина (м^3); I виду	0,2	0,1	40
II виду	0,1	0,3	60
Трудомісткість (людино-год)	1,2	1,5	371,4
Прибуток від реалізації одного виробу (грн)	6	8	

Визначити, скільки столів і шаф слід виготовити, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 4x_1 - 3x_2 \to min$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \le 1 \\ -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \ge -1 \\ x_1 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = x_1 + 2x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ -x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 11 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -\frac{7}{9}x_1 + \frac{13}{9}x_2 + \frac{4}{3}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 16 \\ -4x_1 + x_3 \le -3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = -5x_1 + 2x_2 + x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ -2x_1 + 3x_2 \ge 19 \\ x_1 + 6x_2 \le 17 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -x_3 - 1/3x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 18x_3 + 12x_5 = -1 \\ 6x_2 - 18x_3 + 12x_5 = -1 \\ -6x_3 + 3x_4 + 3x_5 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА 1
(варіанти для другої групи)

Варіант 2–1

1. Скласти математичну модель задачі.

Підприємство електронної промисловості виготовляє дві моделі радіоприймачів, причому кожна модель складається на окремій технологічній лінії. Добовий обсяг виробництва першої лінії становить 60, а другої – 70 од. На один радіоприймач першої моделі витрачається 10 однотипних елементів електронних схем, а на радіоприймач другої – 8. Максимальний добовий запас елементів, що використовуються у виробництві, становить 1 000 од. Прибуток від реалізації одного радіоприймача першої та другої моделі дорівнює відповідно 35 та 25 дол.

Визначити оптимальні обсяги виробництва радіоприймачів обох моделей.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 3x_1 - x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \geq -4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 3x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_2 \geq -1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 4x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -\frac{11}{5}x_1 - \frac{7}{5}x_2 + \frac{6}{5}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ -x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ -4x_1 - 2x_2 \leq -4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 3x_1 + x_2 + 6x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 22 \\ x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 4x_1 + x_2 \leq 36 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 - 3x_2 + x_4 = -6 \\ -5x_1 - x_2 + x_5 = -10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 2–2

1. Скласти математичну модель задачі.

Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі А, В та С використовує три види основної сировини: цукровий пісок, патоку та фруктове пюре. Норми затрат сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі даного виду наведені в таблиці.

У ній також вказано загальну кількість сировини кожного виду, яка може бути використана фабрикою, а також наведений прибуток від реалізації 1 т карамелі даного виду.

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1 т карамелі			Загальна кількість сировини (т)
	А	В	С	
Цукровий пісок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктове пюре	–	0,1	0,1	120
Прибуток від реалізації 1 т продукції (грн)	108	112	126	

Знайти план виробництва карамелі, що забезпечує максимальний прибуток від її реалізації.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$F = -x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \le 1 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \le 1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \ge -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$F = x_1 - x_2 \to min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 5x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$F = -x_1 + \frac{7}{5}x_2 + \frac{13}{5}x_3 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 \le -2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9 \\ x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 2x_1 - 2x_2 + x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \le 32 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 18 \\ x_1 - 9x_2 = 33 \\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -2x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ -4x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–3

1. Скласти математичну модель задачі.

При годуванні тварин кожна тварина щоденно повинна отримати не менше 60 од. поживної речовини А, не менше 50 од. поживної речовини В та не менше 12 од. речовини С. Указані поживні речовини містять три види кормів. Вміст одиниць поживних речовин в 1 кг кожного з видів корму наведено в таблиці:

Поживні речовини	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму виду		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Скласти денний раціон, що забезпечує отримання необхідної кількості поживних речовин за мінімальних грошових затрат, якщо ціна 1 кг корму I виду становить 9 грн, корму II виду – 12 грн та корму III виду – 10 грн.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$F = 3x_1 + 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_2 \ge -1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$F = 3x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 5x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$F = -3x_1 + x_2 - 3x_3 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -4x_1 - 2x_3 \le -8 \\ -3x_1 + x_2 - 3x_3 \le -9 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 44 \\ 2x_3 = 16 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 8 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -2x_1 - x_3 + x_4 = -4 \\ -4x_1 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–4

1. Скласти математичну модель задачі.

Для виробництва столів і шаф меблева фабрика використовує необхідні ресурси. Норми затрат ресурсів на один виріб даного виду, прибуток від реалізації одного виробу й загальна кількість наявних ресурсів кожного виду приведені в таблиці:

Ресурси	Норми затрат ресурсів на один виріб		Загальна кількість ресурсів
	стіл	шафа	
Деревина (м^3): I виду	0,2	0,1	40
II виду	0,1	0,3	60
Трудомісткість (людино-год)	1,2	1,5	371,4
Прибуток від реалізації одного виробу (грн)	6	8	

Визначити, скільки столів і шаф слід виготовити, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 2x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x_1 + x_2 \le 1 \\ -\dfrac{1}{3}x_1 + x_2 \ge -1 \\ \qquad x_1 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = x_1 + 2x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ -x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 4x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 8 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 7 \\ x_1 + 6x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -x_1 - \frac{8}{7}x_2 + \frac{13}{7}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = -4 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 \le 4 \\ -x_1 + 3x_3 \le 12 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 44 \\ 2x_3 = 16 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 8 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -3x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ -x_2 - 5x_3 + x_5 = -10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–5

1. Скласти математичну модель задачі.

На меблевій фабриці із стандартних листів фанери необхідно вирізати деталі трьох видів у кількостях, відповідно рівних 24, 31 та 18 шт. Кожний лист фанери може бути розрізаний на деталі двома способами. Кількість деталей, яку отримуємо за даного способу розкрою, наведено в таблиці. У ній же вказана величина відходів, які отримуємо за даного способу розкрою одного листа фанери.

Вид деталі	Кількість деталей (шт.) у разі розкрою способом	
	1	2
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина відходів (см^2)	12	16

Визначити, скільки листів фанери та яким способом слід розкроїти так, що було отримано не менше потрібної кількості деталей за мінімальних відходів.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$F = 4x_1 - 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \le 1 \\ -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \ge -1 \\ x_1 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$F = 3x_1 - x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = 4x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 8 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 7 \\ x_1 + 6x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -\frac{5}{6}x_1 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -1 \\ 3x_3 = 3 \\ -x_1 - 4x_2 - x_3 \le -5 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 7x_1 - 2x_2 + 11x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 48 \\ x_1 + 6x_2 \ge 28 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -3x_1 - x_3 + x_4 = -6 \\ -x_1 - 5x_3 + x_5 = -10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–6

1. Скласти математичну модель задачі.

На тваринній фермі можуть вирощуватись чорно-бурі лисиці та песці. Для забезпечення нормальних умов їх вирощування використовується три види кормів. Кількість корму кожного виду, який повинні щоденно отримувати лисиці та песці, наведено в таблиці. У ній також указані загальна кількість корму кожного виду, який може бути використаний тваринній фермою, та прибуток від реалізації однієї шкурки лисиці й песця.

Вид корму	Кількість одиниць корму, який щоденно повинні отримувати		Загальна кількість кормів
	лисиця	песець	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації однієї шкурки (грн)	16	12	

Визначити, скільки лисиць і песців слід вирощувати на тваринній фермі, щоб прибуток від реалізації їх шкурок був максимальним.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 4x_1 - 3x_2 \to min$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 - x_2 \geq -1 \\ \frac{1}{3}x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = -x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 1 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \leq 1 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 4x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 5 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -2x_1 - x_2 + \frac{2}{3}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 4x_3 \le 14 \\ -3x_1 - 3x_2 \le -6 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 \le -9 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 8x_1 + 6x_2 - x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 30 \\ 6x_1 - x_2 + x_3 \ge 12 \\ 5x_1 + 3x_2 = 45 \\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 2x_1 + x_2 + x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ -x_2 - 2x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–7

1. Скласти математичну модель задачі.

Для виготовлення різних виробів A, B та C підприємство використовує три різних види сировини. Норми розходів сировини на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу A, B та C, а також загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана підприємством, наведені в таблиці.

Вид сировини	Норми затрат сировини (кг) на один виріб			Загальна кількість сировини (кг)
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Ціна одного виробу (грн)	9	10	16	

Вироби A, B та C можуть вироблятися в будь-яких співвідношеннях, але виробництво обмежене виділеною підприємству сировиною кожного виду.

Скласти план виробництва виробів, за якого загальна вартість усієї виробленої підприємством продукції була б максимальною.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 4x_1 - 3x_2 \to min$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \le 1 \\ -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \ge -1 \\ x_1 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 3x_1 + 3x_2 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_2 \ge -1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 4x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 5 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -\frac{3}{4}x_1 - \frac{7}{4}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ -3x_2 - x_3 \le -3 \\ -4x_2 \le 0 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 8x_1 + 6x_2 - x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 30 \\ 6x_1 - x_2 + x_3 \ge 12 \\ 5x_1 + 3x_2 = 45 \\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = -5/2x_1 - 7/4x_2 - 3/4x_3 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -3 \\ -4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_5 = -6 \\ -4x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_6 = -12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 2–8

1. Скласти математичну модель задачі.

Для підтримання нормальної життєдіяльності людині щоденно необхідно вживати не менше 118 г білків, 56 г жирів, 500 г вуглеводів, 8 г мінеральних солей. Кількість поживних речовин, які містяться в 1 кг кожного виду продуктів, що споживаються людиною, а також ціна 1 кг кожного з цих продуктів приведені в таблиці.

Поживні речовини	Вміст (г) поживних речовин в 1 кг продуктів						
	м'ясо	риба	молоко	масло	сир	крупа	картопля
Білки	180	190	30	10	260	130	21
Жири	20	3	40	865	310	30	2
Вуглеводи	–	–	50	6	20	650	200
Мінеральні солі	9	10	7	12	60	20	10
Ціна 1 кг продукту (грн)	1,8	1,0	0,28	3,4	209	0,5	0,1

Скласти денний раціон, що містить не менше мінімальної добової норми потреби людини в необхідних поживних речовинах за мінімальної загальної вартості продуктів, що споживаються.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$F = x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + x_2 \ge -1 \\ 5x_1 + 8x_2 \le 40 \\ x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$F = 2x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \le 1 \\ -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \ge -1 \\ x_1 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = 4x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + 6x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$F = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ -3x_1 - 4x_3 \le -16 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 6 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв’язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = -4x_1 + 5x_2 + x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 \le 55 \\ -x_1 + 3x_2 = 16 \\ x_1 + x_3 \ge 13 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв’язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -2x_1 - 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ -2x_1 - 3x_3 + x_5 = -2 \\ 2x_2 + x_6 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–9

1. Складти математичну модель задачі.

Стальні дроти довжиною 110см необхідно розрізати на деталі довжиною 45, 35 та 50 см. Необхідна кількість деталей даного виду становить відповідно 40, 30 та 20 шт. Можливі варіанти розрізу та величина відходів по кожному з них наведені в таблиці.

Довжина деталей, см	Варіант розрізу					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	–	–	–
35	–	1	–	3	1	–
50	–	–	1	–	1	2
Величина відходів, см	20	30	15	5	25	10

Визначити, скільки дротин за кожним із можливих варіантів слід розрізати, щоб отримати не менше потрібної кількості деталей кожного виду за мінімальних відходів.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 4x_1 - 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + x_2 \geq -1 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ -x_2 \geq -3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 2x_1 + x_2 \to min$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 - x_2 \geq -1 \\ \frac{1}{3}x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 5x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 14 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = x_1 - 4x_2 - 4x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 0 \\ x_1 - 4x_2 - 4x_3 \leq -5 \\ -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \leq -15 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = x_1 + 8x_2 - x_3 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 40 \\ 2x_1 + x_2 \geq 14 \\ x_1 + 9x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -13/5x_1 - 1/5x_2 - x_3 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 - 2x_3 + x_5 = -8 \\ -3x_1 - 4x_2 - x_3 + x_6 = -11 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 2–10

1. Складти математичну модель задачі.

З відходів виробництва підприємство може організувати випуск чотирьох видів продукції. Для цього воно планує використовувати два типи взаємозамінного обладнання. Кількість виробів кожного виду, який може бути виготовлений на відповідному обладнанні протягом 1 год, а також витрати, пов'язані з виробництвом одного виробу, наведені в таблиці.

Тип обладнання	Кількість виробів, що виготовляються протягом 1 год, виду				Витрати (грн), пов'язані з виробництвом протягом 1 год виробів виду			
	1	2	3	4	1	2	3	4
I	8	7	4	5	2,7	2,6	2,7	2,4
II	9	8	6	4	2,6	2,7	2,6	2,5

Обладнання I типу підприємство може використовувати не більше 80 год, а обладнання II типу – не більше 60 год.

Враховуючи, що підприємству слід виготовити вироби кожного виду відповідно не менше 240, 160, 150 та 220 од., визначити, протягом якого часу та на якому обладнанні слід виготовити кожний із виробів так, щоб отримати не менше потрібної кількості виробів за мінімальних затрат на їх виробництво.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 4x_1 - 2x_2 \to min$$

$$\begin{cases} -5x_1 - 8x_2 \geq -40 \\ \frac{1}{4}x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 4x_1 - 3x_2 \to min$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 - x_2 \geq -1 \\ \frac{1}{3}x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 5x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 14 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$F = -x_1 - x_2 + 3x_3 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 \le 8 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$F = x_1 + 8x_2 - x_3 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 40 \\ 2x_1 + x_2 \ge 14 \\ x_1 + 9x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = -x_1 - x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 = -3 \\ x_1 - 4x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–11

1. Складти математичну модель задачі.

Із трьох видів сировини необхідно скласти суміш, у склад якої повинно входити не менше 26 од. хімічної речовини А, 30 од. – речовини В та 24 од. – речовини С. Кількість одиниць хімічної речовини, що міститься в 1кг сировини кожного виду, указано в таблиці. У ній же наведена ціна 1кг сировини кожного виду.

Речовина	Кількість одиниць речовини, що міститься в 1кг сировини виду			
	1	2	3	4
A	1	1	–	4
B	2	–	3	5
C	1	2	4	6
Ціна 1 кг сировини, грн	5	6	7	4

Скласти суміш, що містить не менше потрібної кількості речовини даного виду та має мінімальну вартість.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq -1 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 - 3x_2 \geq -3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 4x_1 - 3x_2 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \leq 1 \\ \frac{1}{3}x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 9 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$F = -x_2 + x_3 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ -x_2 - 4x_3 \le -12 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \le 11 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$F = x_1 - 3x_2 + x_3 \to max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 \ge 22 \\ x_1 - 4x_2 = 26 \\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = -3/2x_1 - 11/6x_2 - 8/3x_3 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_4 = -4 \\ -4x_1 - 2x_2 + x_5 = -10 \\ -x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_6 = -7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–12

1. Скласти математичну модель задачі.

Для виробництва продукції трьох видів А, В та С використовуються три різні види сировини. Кожний із видів сировини може бути використаний в обсязі, відповідно не більшому, ніж 180, 210 та 236 кг. Норми затрат кожного з видів сировини на одиницю продукції даного виду та ціна одиниці продукції кожного виду наведені в таблиці.

Вид сировини	Норми затрат сировини (кг) на одиницю продукції		
	виріб А	виріб В	виріб С
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Ціна одиниці продукції (грн)	10	14	12

Визначити план випуску продукції, за якого загальна вартість усієї виробленої продукції була б максимальною.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = x_1 - x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + x_2 \ge -1 \\ 5x_1 + 8x_2 \le 40 \\ x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 8 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв’язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -x_1 + 2x_2 + \frac{11}{5}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 \le -3 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 12 \\ 3x_2 - x_3 \le 9 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв’язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = x_1 - 3x_2 + x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 \ge 22 \\ x_1 - 4x_2 = 26 \\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв’язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -5/3x_1 - 5/3x_2 - 2x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = -5 \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -10 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–13

1. Скласти математичну модель задачі.

Для нормального проходження технологічного процесу в одному з цехів кондитерської фабрики потрібні цукор, патока, горіхи, олія, какао, місячна норма споживання яких повинна бути не меншою, відповідно, ніж 110, 100, 60, 20, 25, з яких виробляють горіхову карамель трьох видів *B1, B2, B3*. У таблиці даний вміст кожного продукту в кожному з видів карамелей у кг на 1 кг.

Продукти	Вміст продуктів у карамелі виду		
	B1	B2	B3
Цукор	0,6	0,6	0,65
Патока	0,3	0,35	0,13
Горіхи	0,1	0,1	0,2
Олія	0,05	0,06	0,07
Какао	0,05	0,04	0
Ціна 1 кг карамелей	3,50	4,00	4,00

Визначити оптимальну, з точки зору максимізації сумарної вартості виробленої продукції, структуру виробництва даної продукції.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 4x_1 - 3x_2 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x_1 + x_2 \le 1 \\ -\dfrac{1}{3}x_1 + x_2 \ge -1 \\ x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 4x_1 - 2x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{4}x_1 - x_2 \le 1 \\ 5x_1 + 8x_2 \le 40 \\ x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 8 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -\frac{8}{7}x_1 - \frac{10}{7}x_2 - \frac{16}{7}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = -5 \\ x_1 - x_2 - x_3 \le -4 \\ -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 \le -16 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 8x_1 - 2x_2 + x_3 \to min$$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 \le 33 \\ 3x_3 = 27 \\ x_1 - 8x_2 + 6x_3 \ge 22 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -13/7x_1 - 22/7x_2 - 8/7x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_5 = -2 \\ -4x_1 - 4x_2 + x_3 + x_6 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–14

1. Скласти математичну модель задачі.

На чотирьох верстатах виготовляють продукцію трьох видів. Відомі час обробки деталей на кожному верстаті, час роботи верстатів протягом одного циклу виробництва та прибуток від реалізації кожної деталі. Скільки треба виготовляти деталей кожного виду, щоб прибуток від реалізації механізму, що складається із двох деталей *A*, трьох деталей *B* і деталі *C*, був максимальним?

Верстати	Час роботи верст. за цикл виробництва	Норми використання ресурсів		
		A	B	C
I	16	1	2	3
II	26	2	3	5
III	10	1	1	0
IV	24	3	1	2
Прибуток від реалізації		4	6	7

Визначити оптимальну, з точки зору максимізації прибутку, структуру виробництва даної продукції.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 3x_1 - x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \geq -4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 4x_1 - 2x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ -\frac{1}{4}x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Розв’язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = 7x_1 + 8x_2 \to max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 16 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 13 \\ 5x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв’язати задачу лінійного програмування М-методом.

$F = 4x_1 - x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 \le -9 \\ 4x_1 - x_2 \le 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 13 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв’язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$F = 3x_1 + 3x_2 + x_3 \to max$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 5x_3 \le 55 \\ x_1 + 8x_2 = 14 \\ 7x_1 - 4x_3 \ge 38 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв’язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = -7/6x_1 - 8/3x_2 - 1/2x3 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 - 3x_2 + x_5 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_6 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–15

1. Скласти математичну модель задачі.

Для нормальної життєдіяльності людині треба споживати щодоби 10 г. вітаміну А, 15 г вітаміну С і 3 г вітаміну В. Потрібно також, щоб в раціоні вміст білків, жирів і вуглеводів був не менше 200, 100, 300 г відповідно. Вміст даних речовин у грамах на 1 кг продуктів наведено в таблиці.

	Білки	Жири	Вуглев.	Віт. А	Віт. В	Віт. С	Кільк. ккал
Хліб	5	15	100	0,1	0,05	0,02	200
Молоко	80	50	60	0,9	0,07	3,0	120
М'ясо	150	100	80	5,0	0,10	5,0	2 000
Овочі	10	30	150	0,05	0,01	7,0	150
Яйця	120	10	70	2,5	0,10	2,0	2 600

Скласти раціон, який задовольняє всі ці вимоги із продуктів, які є в наявності, щоб кількість кілокалорій була мінімальною.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = -x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 \le 1 \\ \dfrac{1}{4}x_1 + \dfrac{1}{5}x_2 \le 1 \\ -\dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 \ge -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 2x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge -1 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 - 3x_2 \ge -3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 6x_1 + 7x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 8x_2 \le 18 \\ 4x_1 + 6x_2 \le 15 \\ 7x_1 + 5x_2 \le 12 \\ \quad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -\frac{16}{7}x_1 - \frac{3}{7}x_2 - \frac{6}{7}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -4x_1 - 3x_2 - 3x_3 \le -14 \\ 3x_2 + 2x_3 \le 5 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 7x_1 + x_2 + 12x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + x_3 = 37 \\ \quad 8x_1 + x_2 \ge 26 \\ \quad x_1 + 3x_2 \le 46 \\ \quad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -1/2x_1 - 13/8x_2 - 3/2x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_4 = -3 \\ -3x_2 - 3x_3 + x_5 = -3 \\ -x_1 + x_6 = -3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–16

1. Скласти математичну модель задачі.

Учнівській бригаді виділили під посів культур *A* і *B* дві ділянки землі площею 8 і 9 га. Середня врожайність із першої ділянки культури *A* – 16 ц з га, культури *B* – 35 ц з га, із другої ділянки – культури *A* – 14 ц з га, культури *B* – 30 ц з га. Від реалізації 1 ц культури *A* одержують 2,5 грн, культури *B* – 1,4 грн. Скільки гектарів і на яких ділянках потрібно відвести під кожну культуру, щоб прибуток від реалізації був максимальним, якщо за планом мають зібрати не менше 150 ц культури *A* і 220 ц культури *B*?

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$F = 6x_1 - x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 2 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв’язати графічно задачу лінійного програмування.

$F = x_1 - x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Розв’язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = 5x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -\frac{3}{2}x_1 - \frac{5}{6}x_2 + \frac{11}{6}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 \le 1 \\ -3x_1 - x_3 \le -1 \\ -2x_1 - x_2 \le -2 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 2x_1 + 5x_2 - x_3 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 = 48 \\ -x_1 + 4x_2 - 5x_3 \ge 35 \\ x_1 + 5x_2 \le 8 \\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -6/5x_1 - 8/5x_2 - 3/5x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -4 \\ -2x_2 - 2x_3 + x_6 = -8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–17

1. Скласти математичну модель задачі.

Завод освоїв випуск додаткової продукції видів B_1, B_2, B_3, для виробництва якої потрібна сировина чотирьох видів A_1, A_2, A_3, A_4, споживання якої повинно коливатись у заданому діапазоні. Визначити кількість продукції, яку треба виготовити, щоб її вартість була максимальною.

Сировина	Щомісячне споживання сировини від *a* до *b*		Витрати на одиницю продукції		
	a	*b*	B_1	B_2	B_3
A_1	1 500	1 550	2	4	8
A_2	800	825	2	2	6
A_3	300	350	0	1	2
A_4	0	200	1	0	0
Ціна одиниці продукції			100	120	500

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = x_1 - x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 4x_1 - 3x_2 \to min$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \le 1 \\ \frac{1}{3}x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 2x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 9 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -\frac{4}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 \le 8 \\ -2x_1 - 3x_2 \le 0 \\ -x_1 - x_3 \le -4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 3x_1 - 5x_2 + x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 9 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 45 \\ x_1 - 5x_2 = 12 \\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -17/5x_1 - 13/5x_2 - 9/5x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ -4x_1 - 4x_2 + x_5 = -12 \\ -4x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_6 = -19 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–18

1. Скласти математичну модель задачі.

Із двох видів бензину складають суміші *A* і *B*. Суміш *A* містить 60 % бензину *I* і 40 % бензину *II*; суміш *B* містить 80 % бензину *I* і 20 % бензину *II*. Ціна 1 кг суміші *A* – 30 коп., суміші *B* – 40 коп. Скласти план утворення сумішей, якщо в наявності є 50 т бензину *I* і 80 т бензину *II*, за якого може бути отриманий максимальний прибуток, за умови, що бензин *I* повинен бути повністю використаний.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ -2x_1 - 5x_2 \ge -1 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 3x_1 - x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \ge -4 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 2x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 15 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -3x_2 - 4x_3 \le -16 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 16 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв’язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$F = x_1 + 6x_2 + 6x_3 \to min$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 56 \\ 5x_3 = 75 \\ -6x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 34 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв’язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = -1/5x_1 - 4/5x_3 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ -x_1 + 4x_2 + x_5 = 14 \\ -x_2 - x_3 + x_6 = -5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–19

1. Скласти математичну модель задачі.

Швейна майстерня виготовляє жіночі костюми, плаття та спідниці із тканин трьох видів *A*, *B*, *C*.

Тканини	Наявність тканини в м^2	Витрати на одиницю продукції		
		костюми	плаття	спідниці
A	100	2,5	2,0	0,8
B	80	0,2	0,3	0,2
C	150	1,0	0,8	0,7
Ціна одиниці продукції		100	80	40

Як спланувати виробництво, щоб продукції можна було реалізувати на максимальну суму, якщо відомо, що спідниць продається втричі більше, ніж костюмів, а платтів – удвічі більше.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ -x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 - 3x_2 \ge -3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = -x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \le 1 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \le 1 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 2x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 16 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 14 \\ 6x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{4}x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = -3 \\ -2x_1 - 4x_2 \le -6 \\ x_1 = 3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = x_1 - 4x_2 + 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 9x_3 \le 28 \\ 10x_1 + 2x_2 = 45 \\ 2x_1 + x_3 \ge 22 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -23/9x_1 - 11/9x_2 - 2x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ -4x_1 - x_2 - 4x_3 + x_5 = -4 \\ -3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_6 = -2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–20

1. Скласти математичну модель задачі.

Підприємство має три види устаткування, на якому можна виробляти продукцію 4-х видів, збут якої необмежений, тому підприємство само планує асортимент і величину випуску продукції. Сировина також може постачатися в необмеженій кількості. У таблиці наведений місячний фонд часу використання кожного виду устаткування, витрати часу на одиницю виробу й величину прибутку від реалізації одиниці продукції кожного виду. Треба знайти план випуску продукції, щоб щомісячний прибуток був максимальний.

Устаткування	Місячний фонд вик. часу	Види продукції			
		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	120	1	0	3	6
A_2	230	2	3	2	0
A_3	220	2	5	1	7
Прибуток за одиницю виробу		45	50	20	60

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 3x_1 - x_2 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \ge -4 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 5x_1 + 5x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \ge 15 \\ x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_2 \le 8 \\ x_1 - 2x_2 \ge -2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 3x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 10 \\ 5x_1 + 5x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -x_1 + \frac{1}{6}x_2 - 2x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 \le -6 \\ x_1 - x_3 \le 2 \\ -4x_1 + x_2 - 4x_3 \le -4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв’язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 45 \\ 3x_1 + x_2 \ge 56 \\ 4x_1 + 8x_2 \le 47 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв’язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -4/3x_1 - 1/3x_2 - 5/3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -5 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_6 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–21

1. Скласти математичну модель задачі.

Комерційна фірма рекламує свою продукцію, використовуючи місцеві радіо- та телевізійну мережі. Витрати на рекламу в бюджеті фірми становлять 10 000 дол. на місяць. Хвилина радіореклами коштує фірмі 5 дол., а телереклами – 90 дол. Фірма має намір використовувати радіорекламу принаймні вдвічі частіше, ніж рекламу на телебаченні. Досвід показав: обсяг збуту, що його забезпечує 1 хв телереклами, у 30 разів перевищує обсяг збуту, що його забезпечує 1 хв радіореклами.

Визначити оптимальний розподіл коштів, які щомісяця мають витрачатися на рекламу, за якого обсяг збуту продукції фірми буде найбільшим.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$F = -x_1 + 2x_2 \rightarrow min$

$$\begin{cases} -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \le 1 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \le 1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2} \ge -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$F = x_1 - x_2 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \le 9 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$F = \frac{1}{8}x_1 - \frac{11}{4}x_3 \rightarrow max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 \le 1 \\ -x_2 - 2x_3 \le -1 \\ -3x_1 - x_2 \le -1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$F = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 \ge 29 \\ 2x_1 - 6x_2 \le 36 \\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = -x_4 - 1/2x_5 \to max$

$$\begin{cases} 7x_2 - 28x_4 + 21x_5 = -1 \\ 7x_1 - 49x_4 + 28x_5 = -2 \\ 28x_3 - 49x_4 + 14x_5 = -5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–22

1. Скласти математичну модель задачі.

Невелике сільськогосподарське підприємство спеціалізується на вирощуванні овочів, зокрема капусти та томатів, використовуючи для цього мінеральні добрива (фосфорні та калійні). Норми внесення мінеральних добрив під кожну культуру та запас добрив у господарстві наведено в таблиці.

Мінеральні добрива	Норма внесення добрива, кг діючої речовини/га		Запас добрив, кг
	капуста	томати	
Фосфорні	150	400	6 000
Калійні	500	300	9 000

Під вирощування овочів відведено земельну ділянку площею 20 га. Очікуваний прибуток господарства від реалізації 1 ц капусти становить 10 ум. од., 1 ц томатів – 20 ум. од. Середня врожайність капусти в господарстві дорівнює 300 ц/га, а томатів – 200 ц/га.

Визначити такий варіант розміщення культур на земельній ділянці, який максимізує прибуток господарства за умови, що витрати мінеральних добрив не перевищують максимально можливого запасу.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = 3x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{1}{5}x_2 \ge -1 \\ \dfrac{1}{3}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв’язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ -2x_1 - 5x_2 \ge -1 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв’язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 3x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 15 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв’язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = \frac{1}{3}x_1 + \frac{16}{9}x_2 - \frac{5}{9}x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \le 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \le 10 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + 6x_2 + x_3 \ge 18 \\ 4x_1 + x_2 = 16 \\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -1/2x_1 - 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -5x_1 - 4x_3 + 5x_5 = -1 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ -10x_1 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–23

1. Скласти математичну модель задачі.

Фірма виготовляє два види продукції А та В, використовуючи для цього два види сировини, добовий запас якої не перевищує відповідно 210 та 240 ум. од. Витрати сировини для виготовлення одиниці продукції кожного виду подано таблицею.

Сировина	Норма витрат сировини, ум. од., для виготовлення продукції	
	A	B
1	2	5
2	3	4

Відділ збуту фірми вважає, що виробництво продукції B має становити не більш як 65 % загального обсягу реалізації продукції обох видів. Ціна одиниці продукції A та B дорівнює відповідно 10 та 40 дол.

Визначити оптимальний план виробництва продукції, який максимізує дохід фірми.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = x_1 - x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ -x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 - 3x_2 \ge -3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 6x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 7 \\ x_1 + 5x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв’язати задачу лінійного програмування М-методом.

$F = -x_1 + x_2 - 2x_3 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \le 0 \\ -4x_1 + x_2 - 3x_3 \le -4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв’язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$F = 7x_1 + 2x_2 - x_3 \to min$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 42 \\ 7x_3 = 28 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 \ge 6 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв’язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = -1/4x_3 - x_5 \to max$

$$\begin{cases} -32x_3 + 4x_4 + 4x_5 = -3 \\ 4x_1 + 4x_3 - 4x_5 = -2 \\ 4x_2 + 4x_3 - 8x_5 = -5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–24

1. Скласти математичну модель задачі.

Фірма виготовляє деталі до автомобілів, ринок збуту яких практично необмежений. Будь-яка деталь має пройти послідовну обробку на трьох верстатах, час використання кожного з яких становить 10 год/добу. Тривалість обробки, хв, однієї деталі на кожному верстаті наведено в таблиці.

Деталь	Тривалість обробки деталі, хв, за верстатами		
	1	2	3
A	10	6	8
B	5	20	15

Прибуток від оптової реалізації однієї деталі кожного виду становить відповідно 20 та 30 дол.

Визначити оптимальні добові обсяги виробництва деталей кожного виду, що максимізують її прибуток.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$F = 3x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 \geq -10 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$F = 3x_1 - x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \geq -4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$F = 5x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 9 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -\frac{1}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ -3x_1 - x_2 \le -6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 + 7x_3 \le 22 \\ 3x_1 + 5x_2 = 22 \\ 2x_1 - 3x_3 \ge 32 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -1/2x_2 - x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -1 \\ 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_2 - 6x_3 + 2x_5 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2–25

1. Скласти математичну модель задачі.

Підприємство виготовляє письмові столи типів А та В. Для одного столу типу А необхідно 2 м^2 деревини, а для столу типу В – 3 м^2. Підприємство може отримати до 1 200 м^2 деревини за тиждень. Для виготовлення одного столу типу А потрібно 12 хв роботи обладнання, а для моделі В – 30 хв. Обладнання може використовуватися 160 год на тиждень. Оцінено, що за тиждень може бути реалізовано до 550 столів.

Відомо, що прибуток від реалізації одного письмового столу типу А становить 30 дол., а типу В – 40 дол. Скільки столів кожного типу необхідно виготовляти за тиждень?

Визначити оптимальну, з точки зору максимізації прибутку, структуру виготовлення письмових столів типів А та В.

2. Звести дану задачу лінійного програмування до канонічної та симетричної форми.

$$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ -x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 - 3x_2 \ge -3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування.

$$F = -x_1 + 2x_2 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \le 1 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \le 1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \ge -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = 7x_1 + 2x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 7 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 6 \\ 3x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

$$F = -x_1 - \frac{2}{5}x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 15 \\ -x_1 + 2x_2 \le -2 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу лінійного програмування (п. 4).

7. Скласти двоїсту задачу до даної.

$$F = 5x_1 + x_2 + 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 15 \\ 2x_1 + 6x_2 \le 14 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування.

$$F = -1/2x_1 - 1/3x_5 \to max]$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_4 - 4x_5 = -3 \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_5 = -1 \\ -2x_1 + 2x_3 - 2x_5 = -5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

Варіанти РГР складено доцентом кафедри ММСІ Парфьоновою Т. О., к. ф.-м. н.

Курс лекцій складено на основі джерел [2–4].

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ємець О. О. Методи оптимізації та дослідження операцій [Електронний ресурс] : навч.-метод. посіб. за кредитно-модульною організацією навчального процесу / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова. – Полтава : ПУЕТ, 2013. – Спосіб доступу: локальна мережа ПУЕТ. http://elib.puet.edu.ua/action.php?kt_path_info=lm.web.view&fDocumentId=670571. – Назва з екрана.
2. Математические методы исследования операцій / Ю. М. Ермольев, И. И. Ляшко, В. С. Михалевич, В. И. Тюптя. – Київ : Вища школа, 1979. – 312 с.
3. Линейное и нелинейное программирование / под ред. И. Н. Ляшенко. – Київ : Вища школа, 1975. – 372 с.
4. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. – Москва : Высш. школа, 1986. – 319 с.
5. Ємець О. О. Методи оптимізації та дослідження операцій : метод. рек. щодо виконання курсового проекту студентами напряму підготовки «Інформатика» / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 87 с.

ЗМІСТ

Наукове видання

ЄМЕЦЬ Олег Олексійович

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Частина 1

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Головний редактор *М. П. Гречук*
Редагування *В. Л. Яременко*
Комп'ютерне верстання *О. С. Корніліч*

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 14,2.
Зам. № 059/1059

Видавець і виготовлювач
Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«Полтавський університет економіки і торгівлі»,
к. 115, вул. Коваля, 3, м. Полтава, 36014; ☎(0532) 50-24-81

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 3827 від 08.07.2010 р.