

Національна академія наук України
Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Українська Асоціація з автоматичного керування
Національний комітет Росії з автоматичного управління
Інститут кібернетики НАН України
Інститут космічних досліджень НАН і ДКА України
Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій
і систем НАН і МОН України
Московський державний університет імені М.В. Ломоносова
Національний університет "Львівська політехніка"

АВТОМАТИКА / AUTOMATICS – 2011

**XVIII Міжнародна конференція
з автоматичного управління**

Матеріали конференції

28–30 вересня 2011 року

Львів

Львів
Видавництво Львівської політехніки
2011

Застосування прямого методу відсікання для задач комбінаторної оптимізації на розміщеннях

О. О. Ємець¹, Є. М. Ємець², Ю. Ф. Олексійчук³

Анотація – The direct method of cutting off for solving combinatorial optimization problems on arrangements is proposed in this abstracts. This method allows to receive the admissible decision on each step.

Ключові слова – Прямий метод відсікання, розміщення, комбінаторна оптимізація.

I. ВСТУП

Задачі комбінаторної оптимізації виникають при розв'язуванні багатьох практичних задач [1-6]

Точні методи розв'язування комбінаторних та дискретних задач оптимізації можна умовно розділити на дві групи: методи відсікання та комбінаторні. Головна ідея більшості методів відсікання полягає у тому, що розв'язується деяка релаксована задача, що утворюється з вихідної відкиданням частини обмежень, а потім знаходиться розв'язок вихідної задачі.

Для методів комбінаторного відсікання однією з проблем є проблема використання опису комбінаторних многогранників у вигляді лінійних обмежень, кількість яких зростає експоненціально з ростом кількості елементів комбінаторних множин. Цю проблему можна вирішити, якщо будувати лише частину комбінаторних обмежень, як, наприклад, у методі послідовного приєднання обмежень [1], або не будувати їх взагалі.

В доповіді розглядається прямий метод відсікання для комбінаторних задач оптимізації на розміщеннях, в якому не будується лінійна оболонка комбінаторної множини розміщень, що суттєво зменшує розмірність симплекс-таблиць. Цей метод використовує ідеї прямого алгоритму цілочислового програмування [7].

II. МНОЖИНА ПОЛІРОЗМІЩЕНЬ

Нехай J_n — множина n перших натуральних чисел, тобто $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Під мультимножиною

$$G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\} \quad (1)$$

будемо розуміти сукупність елементів, серед яких можуть бути й однакові (нерозрізніми). [1]

Будь-яку мультимножину A можна представити її основою $S(A)$, тобто множиною всіх її різних елементів, та первинною специфікацією — списком кратностей елементів основи мультимножини.

Розглянемо k -вибірку з мультимножини G такого вигляду:

$$g = (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_k}), \quad (2)$$

де $g_{i_j} \in G$, $i_j \neq i_t \quad \forall i_j, i_t \in J_n \quad \forall j, t \in J_k$.

Множину $A_{\eta n}^k(G)$, елементами якої є різні упорядковані k -вибірки вигляду (1) з мультимножини G називають [1, 4] евклідовою комбінаторною множиною на розміщеннях.

Відображення

$$\varphi: A_{\eta n}^k \rightarrow E_f \subset R^k \quad (3)$$

називають зануренням $A_{\eta n}^k$ в арифметичний евклідовий простір, якщо між $A_{\eta n}^k$ та E_φ існує взаємно однозначна відповідність, встановлена правилом: для

$$g = (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_k}) \in A_{\eta n}^k, \quad (4)$$

$$x = \varphi(g),$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in E_\varphi$$

маємо $x_j = g_{i_j} \quad \forall j \in J_k$.

Позначимо занурену евклідову комбінаторну множину полірозміщень $E_{\eta n}^k(G)$ або просто $E_{\eta n}^k$.

III. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Знайти упорядковану пару $\langle x^*, f(x^*) \rangle$:

$$f^* = f(x^*) = \max_{x \in E_{\eta n}^k} f(x), \quad (5)$$

$$x^* = \arg \max_{x \in E_{\eta n}^k} f(x)$$

за лінійних обмежень:

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} x_j \leq a_{i0}, \quad (i=1, 2, \dots, t), \quad (6)$$

де $E_{\eta n}^k$ — евклідова множина розміщень [1, 4], елементами якої є цілі числа, $f(x)$ — лінійна функція.

IV. АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Крок 0. Побудуємо симплекс-таблицю відповідної задачі лінійного програмування (без урахування комбінаторних умов). До симплекс-таблиці приєднується рядок (далі L -рядок), який відповідає обмеженню, що виражає верхню границю небазисних змінних

$$x_L + \sum_{j \in J} x_j = a_{L0}, \quad (7)$$

де J — множина небазисних змінних,

¹ Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Ковалів, 3, Полтава, 36014, УКРАЇНА, E-mail: contacts@informatics.org.ua

² Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Ковалів, 3, Полтава, 36014, УКРАЇНА, E-mail: yemetsli@mail.ru

³ Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Ковалів, 3, Полтава, 36014, УКРАЇНА, E-mail: olexijchuk@gmail.com

$$a_{L0} = \sum_{i=1}^k \bar{x}_i, \quad (8)$$

де $\bar{x}_i$ — максимально можливе або більше, ніж максимально можливе, значення змінної x_i , за умови задачі (5)-(6).

Крок 1. Перевірити умову оптимальності для розв'язку задачі лінійного програмування (ЗЛП): якщо оцінки $x_{0j} \geq 0 \quad \forall j$, то розв'язок оптимальний, зупинка; інакше — перехід до кроку 2.

Крок 2. Вибрати напрямний стовпець з номером σ , що задовольняє умовам $a_{L\sigma} > 0$ і $r_\sigma < r_j$ для всіх $j \neq \sigma$, $j \in J$ при $a_{L\sigma} > 0$, де

$$r_j = \left(\frac{a_{0j}}{a_{Lj}}, \frac{a_{1j}}{a_{Lj}}, \dots, \frac{a_{nj}}{a_{Lj}} \right). \quad (9)$$

Крок 3. Вибрати номер твірного рядка v , за яким буде будуватися відсікання, із множини

$$V(s) = \left\{ i \mid 0 \leq \left[\frac{a_{i0}}{a_{i\sigma}} \right] \leq \Theta_\sigma \right\}, \quad (10)$$

де

$$\Theta_\sigma = \min_{a_{i0} > 0} \frac{a_{i0}}{a_{i\sigma}}, \quad (11)$$

$[a]$ — ціла частина a , за наступними правилами:

А) Нехай $V_t(\sigma)$ — множина $V(\sigma)$, що відповідає t -й симплекс-таблиці. Якщо $V_t(\sigma)$ містить більше одного елемента:

$$V_t(\sigma) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}, \quad (12)$$

то вибираємо рядок v_α , що в послідовності $V_1(\sigma)$, $V_2(\sigma)$, ..., $V_t(\sigma)$ з'явився раніше (не пізніше) інших $v_j \in V_t(\sigma)$ і зберігався до $V_t(\sigma)$. Перейти до Б)

Б) Послідовно вибирати рядок v , взятий в А), поки $v \in V(\sigma)$. Якщо $v \notin V(\sigma)$, перейти до А).

Крок 4. Додати в симплекс-таблицю відсікання

$$x_{m+1} = \left[\frac{a_{v0}}{a_{v\sigma}} \right] + \sum_{j \in J} \left[\frac{a_{vj}}{a_{v\sigma}} \right] (-x_j) \quad (13)$$

і перевірити, чи задовольняє наступний допустимий розв'язок нової ЗЛП комбінаторним обмеженням ($x \in E_{\pi n}^k$). Якщо так — перейти до кроку 7. Інакше — покласти $d=1$, перейти до кроку 5.

Крок 5. Замінити відсікання (13) наступним

$$x_{m+1} = \left(\left[\frac{a_{v0}}{a_{v\sigma}} \right] - d \right) + \sum_{j \in J} \left(\left[\frac{a_{vj}}{a_{v\sigma}} \right] - d + q \right) (-x_j), \quad (14)$$

де $q=1$, якщо

$$\left\{ \frac{a_{v0}}{a_{v\sigma}} \right\} < \left\{ \frac{a_{vj}}{a_{v\sigma}} \right\}, \quad (15)$$

інакше $q=0$. Перейти до кроку 6.

Крок 6. Перевірити, чи задовольняє наступний допустимий розв'язок ЗЛП комбінаторним обмеженням. Якщо так — перейти до кроку 7. Інакше — збільшити d на одиницю, перейти до кроку 5.

Крок 7. Провести симплекс-перетворення, де розв'язувальним стовпцем є стовпець з номером σ , а розв'язувальним рядком — додане відсікання.

Крок 8. Викреслити рядок, що відповідає введеному відсіканню із симплекс-таблиці. Перейти до кроку 1.

V. ВИСНОВОК

В даній роботі запропонований прямий метод відсікання для розв'язування умовних комбінаторних задач оптимізації на розміщеннях. Перевагою методу є те, що на кожному кроці ми мали допустимий розв'язок вихідної задачі (5)-(6).

Напрямяком подальших досліджень може бути отримання теоретичної оцінки складності алгоритму та його модифікація для інших класів комбінаторних задач.

СПИСОК ПОСИЛАНЬ

- [1] Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — К.: ІСДО, 1993. — 188 с.
- [2] Стоян Ю. Г., Ємець О. О., Ємець Є. М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с.
- [3] Сергієнко І. В., Каспшицька М. Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — К.: Наук. думка, 1981. — 288 с.
- [4] Ємець О. А., Барболина Т. Н. Комбинаторная оптимизация на размещении — К.: Наук. думка, 2008. — 159 с.
- [5] Ємець О. О., Колечкіна Л. М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. — К., Наук. думка, 2005. — 117 с.
- [6] Ємець О. О., Роскладка О. В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. — 129 с.
- [7] Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. — М.: Мир, 1974. — 519 с.