**УДК 519.6:539.3**

# ЧИСЕЛЬНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТЕРМІЧНОГО ОПОРУ ДЛЯ СКЛАДЕНОГО ЦИЛІНДРУ

***А. А. Аралова****, к. ф.-м. н*
*Інститут кібернетики НАН України*
*aaaralova@gmail.com*

*У статті розглянуто чисельну ідентифікацію термічного опору для термопружного деформування довгої складеної циліндричної оболонки.*

*Aralova A. A. The numerical identification of a thermal resistance for composite cylinders. In this paper, we address problems of numerical identification of a thermal resistance for a long drawn thermoelastic deformation of the cylindrical shell.*

*Ключові слова:* ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН, ГРАДІЄНТНІ МЕТОДИ, ЦИЛІНДРИЧНІ ТІЛА.
*Keywords:* THERMOELASTIC STATE, GRADIENT METHODS, CYLINDRICAL BODY.

$$-\left\{(\lambda+2\mu)\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right)-\left(\lambda+2\mu\right)\frac{y}{r}-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha r\frac{dT}{dr}\right\}=0,\ r\in\Omega;$$

$$\sigma_r\Big|_{r=r_i}=-p_i,\ \ i=1,2;\ \ -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rk\frac{dT}{dr}\right)=\bar{f},\ \ r\in\Omega;$$

$$-k\frac{dT}{dr}\bigg|_{r=r_1}=-\alpha_1 T+\beta_1,\qquad k\frac{dT}{dr}\bigg|_{r=r_2}=-\alpha_2 T+\beta_2;$$

$$\left[y\right]=0,\ \left[\sigma_r\left(y\right)\right]=0,\ \left[k\frac{dT}{dr}\right]=0,\ \left\{k\frac{dT}{dr}\right\}^{\pm}=u\left[T\right];$$

(1)

Розглянемо довгу товсту циліндричну оболонку. З урахуванням симетрії, слідуючи [1, 2], її термопружний стан описується крайовою задачею (1), де $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, $\Omega_1=\left(r_1,\xi\right)$, $\Omega_2=\left(\xi,r_2\right)$, $0<r_1<\xi<r_2<\infty$, $r_1,r_2=const>0$ – радіуси, відповідно, внутрішньої і зовнішньої кругових поверхонь; *r* –

радіальна координата циліндричної системи координат; а компонента тензора напруги має вид $\sigma_r(y,T)=(\lambda+2\mu)\varepsilon_r(y)+\lambda\varepsilon_\varphi-(3\lambda+2\mu)\alpha T$, де $\lambda$, $\mu$ - постійні Ляме; $y=y(r)$ - зміщення в радіальному напрямку; $\alpha=const>0$ – коефіцієнт температурного розширення, $\beta_1$, $\beta_2=const$, $\alpha_1=const>0$, $p_i=const$, $i=1,2$; $T=T(r)$ – температура, $k$ – коефіцієнт теплопровідності, $u=const$ вважаємо невідомим.

Вважаємо, що на внутрішній поверхні циліндра відомо зміщення

$$y(d_i)=f_i,\quad i=\overline{1,N}. \qquad (2)$$

Отримано задачу (1), (2), що складається у визначенні дійсного числа $u\in U=R=(-\infty,+\infty)$, при якому перша компонента $y=y(u)$ розв'язку $(y(r),T(r))$ задачі (1) задовольняє рівності (2). Виходячи з [3], при кожному фіксованому $u\in U$, замість класичного розв'язку крайової задачі (1) будемо використовувати її узагальнене рішення, тобто вектор-функцію $(y,T)\in H=W_2^1(r_1,r_2)\times W_2^1(r_1,r_2)$, яка $\forall z=(z_1(r),z_2(r))\in H_0=H$ задовольняє системі нерівностей

$$a(y,z_1)=l(T;z_1),\quad a_1(T,z_2)=l_1(u;z_2), \qquad (3)$$

$$a(y,w)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i} r\left((\lambda+2\mu)\left(\frac{dy}{dr}\frac{dw}{dr}+\frac{y}{r}\frac{w}{r}\right)+\lambda\left(\frac{y}{r}\frac{dw}{dr}+\frac{dy}{dr}\frac{w}{r}\right)\right)dr,$$

$$l(T;w)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\left(r(3\lambda+2\mu)\alpha T\left(\frac{dw}{dr}+\frac{w}{r}\right)\right)dr+r_1p_1w(r_1)-r_2p_2w(r_2),$$

$$a_1(u;T,w)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i} r\,k\frac{dT}{dr}\frac{dw}{dr}dr+u[T][w]+\alpha_1 r_1T(r_1)w(r_1)+$$

$$+\alpha_2 r_2T(r_2)w(r_2),\ l_1(w)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i} r\,\overline{f}\,wdr+r_1\beta_1w(r_1)+\beta_2r_2w(r_2). \qquad (4)$$

Функціонал-нев'язки приймає вигляд

$$J(u)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(y(d_i)-f_i\right)^2. \qquad (5)$$

Замість задачі (1), (2), розв'язуємо задачу (3), (4), (5), що полягає у визначенні елемента $u$, який мінімізує на $U$

функціонал (5) при обмеженнях (4). Задачу (5), (3) будемо розвязувати за допомогою градієнтних методів [4], де ($n+1$)-е наближення $u_{n+1}$ розв'язку $u \in U$ знаходиться за формулою

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n \,, n = 0,1,\cdots,n^* \,, \qquad (6)$$

починаючи з деякого наближення $u_0 \in U$, а напрям спуску $p_n$ та коефіцієнт $\beta_n$ для методу мінімальних похибок визначаємо за допомогою виразів $p_n = J'_{u_n}$, $\beta_n = \dfrac{\|e_n\|^2}{\left\|J'_{u_n}\right\|^2}$. Виходячи з [3, 5] для визначення ($n+1$)-го наближення $u_{n+1}$ розв'язку $u \in U$ задачі (5), (7) введемо в розгляд спряжену задачу

$$-\frac{d}{dr}\left(r\,k\,\frac{d\psi}{dr}\right) - r\left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha\left(\frac{dp}{dr} + \frac{p}{r}\right) = 0, \;\; r \in \Omega_d;$$

$$-k\frac{d\psi}{dr}\bigg|_{r=r_1} = -\alpha_1\psi\left(r_1\right), \;\; k\frac{d\psi}{dr}\bigg|_{r=r_2} = -\alpha_2\psi\left(r_2\right); \;\; \left[p\right]\big|_{r=\xi} = 0,$$

$$\left[\sigma_r\left(p\right)\right]\big|_{r=\xi} = 0, \;\; \left[u\frac{d\psi}{dr}\right]\bigg|_{r=\xi} = 0, \;\; \left\{u\frac{d\psi}{dr}\right\}^{\pm} = u\left[\psi\right]\big|_{r=\xi},$$

$$\left[p\right]\big|_{r=d_i} = 0, \;\left[\sigma_r\left(p\right)\right]\big|_{r=d_i} = -\frac{1}{d_i}\left(y\left(u;d_i\right) - f_i\right), \;\; i = \overline{1,N},$$

При кожному $u = u_n$ для наближення $(y_1^N, T_1^N) \in H_1^N \times H_1^N$ розв'язку $(y,T) \in H \times H$ задачі (3) справедлива оцінка

$$\left\|y(u_n) - y_1^N(u_n)\right\|_{W_2^1(r_1,r_2)} \le Ch, \quad \left\|T(u_n) - T_1^N(u_n)\right\|_{W_2^1(r_1,r_2)} \le C_1 h, \quad (7)$$

де $C, C_1 = const$, $h = \max\limits_i h_i$, $h_i = r^{i+1} - r^i$.

## *Література*


1. Коваленко А. Д. Термоупрогость. – Киев: Вища школа, 1975. – 216 с.
2. Мотовилевец И. А., Козлов В. И. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 1. Термоупругость. – Киев: Наук. Думка, 1987. – 264с.
3. Сергиенко И. В., Дейнека В. С. Идентификация термонапряженного состояния составного цилиндра по

известным смещениям // Проблемы управления и информатики. – 2009. – №5. – С. 25 –52.

4. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288с.

5. Сергиенко И. В., Дейнека В. С. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. – Киев: Наук. Думка, 2009. – 640 с.

6. Дейнека В. С. Вычислительные алгоритмы повышенного порядка точности для условно-корректной задачи термоупругости // Компьютерная математика. – 2007. – №1. – С. 3-12.