МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ПОЛТАВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. ЮРІЯ КОНДРАТЮКА

УДК 519.854 ДРНТІ ~~271~~.47.19.25

Т.М.Барболіна, О.О.Ємець

ПРО ОДИН З АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА РОЗМІЩЕННЯХ З ДОДАТКОВИМИ УМОВАМИ

Деп. у ДНТБ України 29.01.2001

Автори _____________ Т.М. Барболіна
_____________ О.О.Ємець

Полтава - 2000

Проблема вибору одного з можливих варіантів дій вимагає, як правило, розв'язування оптимізаційних задач. Широкий клас практичних задач може бути формалізований та розв'язаний на основі загальних моделей та методів евклідової комбінаторної оптимізації, зокрема, оптимізації на розміщеннях. Дана робота присвячена розробці обґрунтуванню алгоритму розв'язування задачі евклідової комбінаторної оптимізації на розміщеннях

Дамо означення необхідних далі понять та введемо деякі позначення.

Під ***мультимножиною***, як і в [1], розумітимемо сукупність елементів, серед яких можуть бути й однакові. Всяку мультимножину G можна задати її ***основою*** $S(G)$, під якою розуміють множину різних елементів мультимножини, та ***кратністю*** – числом повторень кожного елемента основи цієї мультимножини.

Нехай $G=\{g_1,g_2,\dots,g_\eta\}$ – мультимножина з основою $S(G)=\{e_1, e_2,\dots,e_n\}$, кратність елемента e_i позначимо η_i. Не порушуючи загальності подальших міркувань, можна вважати, що $0<e_1<e_2<\dots<e_n$ і $0<g_1\le g_2\le\dots\le g_\eta$. Позначимо множину n перших натуральних чисел J_n.

Розглянемо k-вибірки вигляду

$$e=\left(g_{i_1},g_{i_2},\dots,g_{i_k}\right) \tag{1}$$

з мультимножини G, $g_{i_j}\in G$, $i_j\neq i_t\ \forall i_j, i_t\in J_\eta$, $\forall j,t\in J_k$.

Сукупність усіх упорядкованих k-вибірок вигляду (1) з мультимножини G називають ***загальною множиною розміщень*** $A^k_{\eta n}(G)$ [2]. Можна розглядати елементи $A^k_{\eta n}(G)$ як точки R^k, встановивши взаємно однозначну відповідність f між множиною $A^k_{\eta n}(G)$ та підмножиною $E^k_{\eta n}(G)$ арифметичного k-вимірного евклідового простору за таким правилом: для вибірки $e=\left(g_{i_1},g_{i_2},\dots,g_{i_k}\right)\in A^k_{\eta n}(G)$ та її образу $x=f(e)$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_k)\in E^k_{\eta n}(G)$ маємо $x_j=g_{i_j}$ $\forall j\in J_k$ [3].

У подальшому використовуватимуться також термінологія методів відсікання дискретної оптимізації.

Нехай необхідно розв'язати лінійну задачу оптимізації на розміщеннях, тобто знайти пару <C(x*),x*> таку, що

$$C(x^*)=\underset{x\in R^k}{extr}\sum_{j=1}^{k}c_jx_j\,; \tag{2}$$

$$x^*=arg\,\underset{x\in R^k}{extr}\sum_{j=1}^{k}c_jx_j\,, \tag{3}$$

$$x\in E^k_{\eta n}(G) \tag{4}$$

при додаткових обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \le b_i,\ i \in J_m\,, \tag{5}$$

де c_j, a_{ij}, $b_i \in R^k$ – задані числа.

Як відомо [3], задача (2)-(3)

$$x \in \operatorname{conv} E^k_{\eta\, n}(G)$$

де під $conv E^k_{\eta\, n}(G)$ розуміємо опуклу оболонку множини $E^k_{\eta\, n}(G)$, еквівалентна задачі (2)-(4), оскільки вершини многогранника належать множині розміщень.

Накладання додаткових обмежень (5) призводить до того, що не обов'язково всі вершини допустимої області задачі (2)-(5) належать множині розміщень. Сформулюємо допоміжну задачу, що є релаксацією задачі (2)–(5): знайти пару <C(x*),x*> таку, що виконуються умови (2), (3) та умова

$$x_j \in S(G)\ \forall j \in J_k \tag{6}$$

при додаткових обмеженнях (5) і нерівностях, що задають опуклу оболонку множини розміщень

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j \le \sum_{i\in\omega} x_i \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta-j+1}\ \forall \omega \subset J_k\,. \tag{7}$$

Розв'язання такої задачі можна здійснити за допомогою алгоритму Дальтона-Ллевеліна [5].

Очевидно, що коли кратності всіх елементів мультимножини не менші вимірності простору, то задача (2)-(3), (6)-(7), (5) еквівалентна задачі (2)-(5).

У загальному випадку, коли кратності деяких елементів мультимножини менші розмірності k евклідового простору, порушується еквівалентність задач (2)-(3), (6)-(7), (5) та (2)-(5), оскільки розв'язком першої з них може бути точка, всі компоненти якої належать мультимножині, але число координат, рівних деякому елементу e_i, перевищує кратність η_i цього елемента у мультимножині.

Введемо у розгляд мультимножину G' таку, що $S(G)=S(G')$ і кратності всіх елементів G' дорівнюють вимірності простору k; кількість елементів мультимножини G' позначимо η'. Замінимо в задачі (2)-(5) умову (4) наступною:

$$x \in E^k_{\eta' n}(G'). \tag{8}$$

Розв'яжемо задачу (2)-(3), (8), (5) (для цього достатньо розв'язати допоміжну задачу, що є її релаксацією). Нехай $x^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_k^*)$ – точка, що задовольняє (3) у цій задачі і α_{ij}–елементи симплекс-таблиці, відповідної точці x^*;J – множина номерів небазисних векторів Очевидно, що при $x^* \in E^k_{\eta\, n}(G)$ розв'язано і задачу (2)-(5).

В іншому разі побудуємо відсікання. Будемо по аналогії з дискретною оптимізацією називати в задачах комбінаторної оптимізації ***правильним відсіканням*** таку лінійну нерівність, яку довільна точка допустимої комбінаторної множини задовольняє, а точка x^* – не задовольняє.

Нехай $x^*_{t_1} = x^*_{t_2} = \ldots = x^*_{t_p} = e_i$, причому $p > \eta_i$. Якщо в точці x^* така умова виконується для кількох елементів основи мультимножини, то для побудови правильного відсікання вибираємо найменше за номером.

Для всіх $s \in \{t_1, t_2, \ldots, t_p\}$, $r \in J$ обчислимо

$$\gamma_r^s = \begin{cases} \alpha_{sr}, \text{ якщо } \alpha_{sr} \geq 0; \\ \dfrac{e_i - e_{i-1}}{e_{i+1} - e_i}(-\alpha_{sr}), \text{ якщо } \alpha_{sr} < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Далі для кожної змінної x_r, $r \in J$ знайдемо таке γ_r, що

$$\gamma_r = \max_{s \in \{t_1, \ldots, t_p\}} \{\gamma_r^s\}. \tag{10}$$

Покладемо

$$\gamma_0 = e_i - e_{i-1}. \tag{11}$$

Додамо до системи обмежень задачі (2)-(3), (8), (5) нерівність

$$\sum_{r \in J} \gamma_r x_r \geq \gamma_0. \tag{12}$$

Легко бачити, що точка x^* не задовольняє це обмеження. Дійсно,

$$\sum_{r \in J} \gamma_r x_r = \sum_{r \in J} \gamma_r \cdot 0 = 0 < \gamma_0 = e_i - e_{i-1}.$$

Перевіримо, чи всі допустимі точки з множини $E^k_{\eta n}(G)$ задовольняють нерівність (12). З симплекс-таблиці, що відповідає точці $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*)$, випливає, що для будь-якої координати точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in E^k_{\eta n}(G)$, яка задовольняє (5), справедлива така рівність:

$$x_s = \alpha_{s0} + \sum_{r \in J} \alpha_{sr}(-x_r) = \alpha_{s0} + \sum_{r \in J} (-\alpha_{sr}) x_r.$$

Якщо $s \in \{t_1, t_2, \ldots, t_p\}$, то останню рівність можна записати у вигляді:

$$x_s = e_i + \sum_{r \in J} \alpha_{sr}(-x_r) = e_i + \sum_{r \in J} (-\alpha_{sr}) x_r. \tag{13}$$

Введемо такі позначення:

- множину номерів тих небазисних векторів, для яких відповідний елемент α_{sr} симплекс-таблиці невід'ємний, позначимо
$$J^- = \{r \mid r \in J, -\alpha_{sr} \leq 0\};$$
- множину номерів тих небазисних векторів, для яких відповідний елемент α_{sr} симплекс-таблиці від'ємний, позначимо
$$J^+ = \{r \mid r \in J, -\alpha_{sr} > 0\};$$
- суми вигляду $\sum(-\alpha_{sr})x_r$ для $r \in J^-$ та $r \in J^+$ позначимо відповідно S^- і S^+, тобто
$$S^- = \sum_{r \in J^-} (-\alpha_{sr}) x_r; \qquad S^+ = \sum_{r \in J^+} (-\alpha_{sr}) x_r.$$

Легко бачити, що $S^- \leq 0$, $S^+ \geq 0$.

Враховуючи введені позначення, рівність (13) можна записати у вигляді:

$$x_s = e_i + S^- + S^+.$$

Оскільки точка x належить допустимій області, то принаймні для одного $s \in \{t_1, t_2, \ldots, t_p\}$ має місце нерівність $x_s \neq e_i$ і можливі два випадки:

1) $x_s \geq e_{i+1}$;

2) $x_s \leq e_{i-1}$.

Розглянемо перший випадок: $x_s \geq e_{i+1}$. Тоді

$$e_i + S^- + S^+ \geq e_{i+1};$$

$$S^- + S^+ \geq e_{i+1} - e_i.$$

Оскільки $S^- \leq 0$, то $S^+ \geq e_{i+1} - e_i$. Отже,

$$\frac{e_i - e_{i-1}}{e_{i+1} - e_i} S^+ \geq \frac{e_i - e_{i-1}}{e_{i+1} - e_i}\left(e_{i+1} - e_i\right);$$

$$\frac{e_i - e_{i-1}}{e_{i+1} - e_i} S^+ \geq e_i - e_{i-1}.$$

Тоді

$$\frac{e_i - e_{i-1}}{e_{i+1} - e_i} S^+ - S^- \geq e_i - e_{i-1}. \qquad (14)$$

У другому випадку $x_s \leq e_{i-1}$, звідки $e_i + S^- + S^+ \leq e_{i-1}$;

$$-(S^- + S^+) \geq e_i - e_{i-1},$$

тобто

$$-S^- \geq e_i - e_{i-1}.$$

Оскільки $\frac{e_i - e_{i-1}}{e_{i+1} - e_i} S^+ \geq 0$, то

$$\frac{e_i - e_{i-1}}{e_{i+1} - e_i} S^+ - S^- \geq e_i - e_{i-1}. \qquad (14)$$

Нерівність (14) перетворимо таким чином:

$$\sum_{r \in J^+} \frac{e_i - e_{i-1}}{e_{i+1} - e_i}\left(-\alpha_{sr}\right)x_r - \sum_{r \in J^-}\left(-\alpha_{sr}\right)x_r \geq e_i - e_{i-1};$$

$$\sum_{r \in J^+} \frac{e_i - e_{i-1}}{e_{i+1} - e_i}\left(-\alpha_{sr}\right)x_r + \sum_{r \in J^-}\alpha_{sr}x_r \geq e_i - e_{i-1};$$

$$\sum_{r \in J^+}\gamma_r^s x_r + \sum_{r \in J^-}\gamma_r^s x_r \geq e_i - e_{i-1};$$

$$\sum_{r \in J}\gamma_r^s x_r \geq e_i - e_{i-1}.$$

Але $\forall r \in J \left(\gamma_r \geq \gamma_r^s\right)$. Отже,

$$\sum_{r \in J}\gamma_r x_r \geq \sum_{r \in J}\gamma_r^s x_r \geq e_i - e_{i-1}.$$

Це означає, що довільна допустима точка задачі (2)-(5) задовольняє умову (12). Враховуючи, що точка x^*, як показано вище, цю нерівність не задовольняє, то (12) є правильним відсіканням. Отже, доведено таку теорему:

Теорема 1. Нехай $x^*=(x_1^*, x_2^*,\dots, x_k^*)$ – точка, що дає розв'язок задачі (2)-(3), (8), (5), причому $x^*_{t_1} = x^*_{t_2} = \dots = x^*_{t_p} = e_i$, $p>\eta_i$. Тоді нерівність (12), де коефіцієнти обчислюються за формулами (9)-(11), задає правильне відсікання.

Таким чином, для розв'язування задачі евклідової комбінаторної оптимізації на розміщеннях вигляду (2)-(5) можна запропонувати такий **алгоритм:**

1. Розв'язуємо задачу (2)-(3), (8), (5) (для цього розв'язуємо допоміжну задачу (2)-(3), (6)-(7), (5), що є її релаксацією, методом Дальтона-Ллевеліна).
2. Нехай $x^*=(x_1^*, x_2^*,\dots, x_k^*)$ дає розв'язок задачі (2)-(3), (6)-(7), (5), а отже, і задачі (2)-(3), (8), (5). Якщо $x^* \in E^k_{\eta n}(G)$, то розв'язано і вихідну задачу (2)-(5). В іншому випадку виберемо найменше i, для якого виконується умова: знайдуться t_1, t_2, …, t_p такі, що $x^*_{t_1} = x^*_{t_2} = \dots = x^*_{t_p} = e_i$, причому $p>\eta_i$.
3. Обчислюємо γ_r для всіх $r\in J$, покладаючи $e_0=0$, $e_{n+1}=e_n+1$, та γ_0 за формулами (9)-(11).
4. Додаємо до системи обмежень задачі (2)-(3), (8), (5) нерівність (12).
5. Розв'язуємо одержану задачу. Повертаємося на крок 2.

Зауваження. Очевидно, що коли $\forall i\in J_n$ $\eta_i \geq k$, то запропонований алгоритм збігається із алгоритмом Дальтона-Ллевеліна.

Теорема 2. Нехай цільова функція

$$C(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i \qquad (15)$$

задовольняє умову дискретності (тобто коефіцієнти c_i належать деякій дискретній множині). Тоді запропонований алгоритм завершує роботу за скінченну кількість кроків.

Доведення

Нехай після розв'язок задачі (2)-(3), (8), (5) є також розв'язком задачі (2)-(5). Тоді алгоритм збігається з алгоритмом Дальтона-Ллевеліна, причому цільова функція задовольняє умову дискретності. Оскільки допустима множина задачі (2)-(5) містить скінченну кількість точок, то цільова функція (15) є обмеженою на цій множині. Це означає, що обмеженою знизу є як функція (15), так і функція

$$C(x) = -\sum_{i=1}^{k} c_i x_i$$

Отже, виконуються умови скінченності алгоритму Дальтона-Ллевеліна [5] як у випадку мінімізації, так і у випадку максимізації. Тому і вихідний алгоритм завершує роботу за скінченну кількість кроків.

В іншому разі, коли одержаний розв'язок не є елементом множини $E^k_{\eta n}(\mathrm{G})$, то необхідна побудова відсікань. Оскільки мультимножина G та множина $E^k_{\eta n}(G)$ скінченні, то кількість таких відсікань скінчена. До того ж, внаслідок правильності відсікань цільова функція обмежена на допустимій множині. Таким чином, при жодній ітерації не порушуються умови скінченності для наступної допоміжної задачі, і таких ітерацій скінчена кількість. Отже, алгоритм скінчений. Теорему доведено.

Таким чином, запропонований алгоритм дозволяє одержати розв'язок задачі евклідової комбінаторної оптимізації виду (2)-(5). Потребують подальшого дослідження питання складності даного алгоритму.

Література

1. Баранов В.И., Стечкин Б.С. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложение.–М.:Наука, 1989.– 160с.
2. Стоян Ю.Г. Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств. – Харьков, 1980.–22с.
3. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації.–К.:ІСДО, 1993.–188с.
4. Линейное и нелинейное программирование./ Ляшенко И.Н., Карагодова Е.А., Черникова Н.В., Шор Н.З./ Под общ. ред. И.Н. Ляшенко. –К.:Вища школа, 1965.– 372с.
5. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование.– М.:Наука,1969.–368с.