Волинський математичний вісник

Випуск 7

2000

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в галузі теоретичної і прикладної математики, інформатики та механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

The "Volyn Mathematical Bulletin" publishes the rezults of investigation of the theoretical and applied mathematics, informatics and mechanics. It is good for science workers, teachers of higher schools, post graduates and senior years students of the mechanics and mathematics specialities.

Заснований у 1994 році. Свідоцтво про реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.1995р.

Редакційна колегія :

Бейко І. В.
Боднар Д. І.
Бомба А. Я. (*відповідальний редактор*)
Бурак Я. Й.
Войтович М. М.
Гаращенко Ф. Г.
Задерей П. В.
Каштан С. С. (*технічний секретар*)
Ковтунець В. В.
Кратко М. І.
Мельник В. М.
Попов Б. О.
Прикарпатський А. К.
Пташник Б. Й.
Савула Я. Г.
Скопецький В. В. (*головний редактор*)
Сяський А. О.
Сяський В. А. (*секретар*)
Шинкаренко Г. А.
Янчук П. С.
Ясній П. В.

Editorial board :

Beyko I. V.
Bodnar D. I.
Bomba A. Ya. (*editor*)
Burak Ya. Y.
Voytovych M. M.
Garashchenko F. G.
Zaderej P. V.
Kashtan S. S. (*secretary*)
Kovtunets V. V.
Kratko M. I.
Melnyk V. M.
Popov B. O.
Prykarpatsky A. K.
Ptashnyk B. Y.
Savula Ya. G.
Skopetsky V. V. (*Editor-in-Chief*)
Syasky A. O.
Syasky V. A. (*secretary*)
Shynkarenko G. A.
Yanchuk P. S.
Yasniy P. V.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Українського математичного товариства, Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С.Підстригача. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

Адреса редакції : 33000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31, Рівненський державний гуманітарний університет, Кафедра інформатики та прикладної математики.
Тел.: (8+0362) 260-444 .

ISBN 966 - 7281 - 02 – 8

© Українське математичне товариство, 2000
© РДГУ, 2000

Зміст

Баб'юк М.П. ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є НА ДВОСКЛАДОВІЙ ДЕКАРТОВІЙ ОСІ ІЗ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ В УМОВАХ СПРЯЖЕННЯ 5

Бернакевич І.Є., Вагін П.П., Шинкаренко Г.А. АНАЛІЗ ЗСУВНИХ ОБОЛОНОК З ДЕФОРМІВНОЮ НОРМАЛЛЮ: АКУСТИКА ВЗАЄМОДІЇ З ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ 11

Бомба А.Я. ПРО МЕТОД СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ В ШАРУВАТИХ СЕРЕДОВИЩАХ 17

Величко І.Г. ПЛОСКА ЗАДАЧА ПРО ОДНОСТОРОННІЙ КОНТАКТ ГЛАДКОГО ШАРУ З ШАРУВАТИМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМ ПІВПРОСТОРОМ 22

Волошина Т.В., Рудик О.В. АЛГОРИТМ МАТЕМАТИКО-АНАМОРФОВАНОГО МОДЕЛЮВАННЯ У ТЕМАТИЧНОМУ КАРТУВАННІ 30

Ворошик Н.Й. ПРЯМІ ТЕОРЕМИ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ РОЗВ'ЯЗКАМИ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ 35

Грицак П., Коссак О.С. ТЕПЛООБМІН В КАНАЛІ ПРИ ГІДРАВЛІЧНО СТАБІЛІЗОВАНОМУ ПОТОЦІ НЕНЬЮТОНІВСЬКОЇ РІДИНИ 38

Дейнека В.С., Баран І.О. СХЕМИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЗАДАЧ З ВЛАСНИМИ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ДЖЕРАЛАМИ 43

Дейнека В.С., Калинюк Н.А. ЧИСЕЛЬНА ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ ТА КОЕФІЦІЄНТАМИ ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ЧАСОВОЇ ЗМІННОЇ 48

Дейнека В.С., Смик М.В. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ СХЕМИ ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ З РОЗРИВНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ ТА РОЗРИВНИМИ НАПРУЖЕННЯМИ 55

Дейнека О.Ю. ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ТЕЛЕГРАФНИХ РІВНЯНЬ 61

Ємець О.О., Ємець Є.М. ОЦІНКИ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ МІНІМУМУ СИЛЬНО ОПУКЛОЇ ФУНКЦІЇ ПРИ ЇЇ МІНІМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ 67

Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. МОДЕЛЮВАННЯ ДЕЯКИХ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЙНИМИ ЗАДАЧАМИ З ДРОБОВО-ЛІНІЙНОЮ ФУНКЦІЄЮ ЦІЛІ НА ПЕРЕСТАВЛЕННЯХ 70

Каштан С.С. ПРО МЕТОД СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОБЕРНЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ З ОСОБЛИВОСТЯМИ 78

Кундрат М.М. РОЗВИТОК СМУГИ КОВЗАННЯ БІЛЯ ВЕРШИНИ ВКЛЮЧЕННЯ НА МЕЖІ РОЗДІЛУ РІЗНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ 87

Лаушник О.І. ТОЧНІСТЬ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЗАЛЕЖНИХ ВІД x^p 95

Левченко О.М., Шинкаренко Г.А. ВИЗНАЧЕННЯ ВЕЛИЧИНИ ДЕННОГО НАКОПИЧЕННЯ СОНЯЧНОЇ ЕНЕРГІЇ НА ДІЛЯНКАХ РЕАЛЬНОЇ МІСЦЕВОСТІ 101

Ляшенко Б.М. ЛІНІЇ РІВНЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ СПРОЩЕНОГО РІВНЯННЯ БАЛОННОЇ НЕСТІЙКОСТІ ПЛАЗМИ 106

Нгуен Суан Тхао О СВЕРТКАХ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ФУНКЦИЕЙ МАКДОНАЛЬДА В ЯДРАХ 111

УДК 519.85

Ємець О.О., Ємець Є.М.

ОЦІНКИ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ МІНІМУМУ СИЛЬНО ОПУКЛОЇ ФУНКЦІЇ ПРИ ЇЇ МІНІМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ

Розглядається задача мінімізації на множині розміщень сильно опуклої функції. Одержані оцінки та достатні умови мінімуму цільової функції цієї задачі.

В роботі використовуються означення і позначення з [1]. Позначимо $J_k=\{1,2,...,k\}$, $J_k^0=J_k\cup\varnothing$, де k - задане натуральне число. Розглянемо задачу мінімізації сильно опуклої функції $\psi(x)$, $x=(x_1,...,x_k)\in R^k$ на евклідовій комбінаторній множині розміщень $E_{\eta n}^k(G)$. Потрібно знайти упорядковану пару $<\psi(x^*),x^*>$, таку що $\psi(x^*)=\min\limits_{x\in E_{\eta n}^k(G)}\psi(x)$; $x^*=\arg\min\limits_{x\in E_{\eta n}^k(G)}\psi(x)$. Доведемо теорему, яка встановлює оцінку та дає достатні умови мінімуму для цільової функції в поставленій задачі безумовної оптимізації на розміщеннях.

Теорема. Якщо $\varepsilon\geq 0$; $\alpha\in(0,1)$, а $\psi(x)$ – сильно опукла функція з параметром сильної опуклості $\rho>0$, що задана в R^k; $E_{\eta n}^k(G)$ – загальна множина розміщень, то:

1) $\forall y\in R^k$ виконується нерівність

$$\min_{x\in E_{\eta n}^k(G)}\psi(x)\geq\psi(y)-(p(y),y)-\varepsilon\alpha^{-1}+(1-\alpha)\rho(\sum_{i=1}^k g_i^2+\sum_{i=1}^k y_i^2)+$$
$$+\sum_{i=1}^s(p_{\beta_i}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_i})g_i+\sum_{i=s+1}^k(p_{\beta_i}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_i})g_{\eta-k+i}\ ; \tag{1}$$

2) щоб точка $y\in E_{\eta n}^k(G)$ забезпечувала на множині $E_{\eta n}^k(G)$ мінімум сильно опуклій функції $\psi(x)$, достатньо виконання такої умови:

$$\sum_{i=1}^s(p_{\beta_i}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_i})g_i+\sum_{i=s+1}^k(p_{\beta_i}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_i})g_{\eta-k+i})+$$
$$+(1-\alpha)\rho(\sum_{i=1}^k g_{\delta_i}^2+\sum_{i=1}^k y_i^2)\geq(p(y),y)+\varepsilon\alpha^{-1}, \tag{2}$$

де $p(y)=(p_1(y),...,p_k(y))\in\partial_\varepsilon\psi(y)$ позначає субградієнт функції $\psi(x)$ в точці y, переставлення перших k натуральних чисел $(\beta_1,...,\beta_k)$ та стала $s\in J_k^\circ$ задовольняють нерівностям

$$p_{\beta_1}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_1}\geq...\geq p_{\beta_s}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_s}\geq 0>$$
$$>p_{\beta_{s+1}}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_{s+1}}\geq...\geq p_{\beta_k}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_k}, \tag{3}$$

сталі k,s такі:

$$r,s\in J_k^\circ,\quad s+r=k, \tag{4}$$

а елементи мультимножини G упорядковані згідно нерівностей

$$g_1\leq...\leq g_\eta. \tag{5}$$

Доведення. Скористаємося лемою 9.4 з [2]. З цієї леми при умовах теореми одержуємо справедливу $\forall x,\ \forall y \in R^k$ нерівність: $\psi(x)-\psi(y)\geq(p(y),x-y)-\varepsilon\alpha^{-1}+(1-\alpha)\rho\|x-y\|^2$.

Прийшовши до мінімуму за елементами множини розміщень отримуємо

$$\min_{x\in E^k_{\eta n}(G)} \psi(x)\geq\psi(y)-(p(y),y)-\varepsilon\alpha^{-1}+\min_{x\in E^k_{\eta n}(G)} A, \tag{6}$$

де використовується позначення $A=(\sum_{i=1}^{k} p_i(y)x_i+(1-\alpha)\rho\|x-y\|^2)$.

Цей вираз, перетворивши, запишемо у вигляді:

$$A=\sum_{i=1}^{k} p_i(y)x_i+(1-\alpha)\rho\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{k} p_i(y)x_i+(1-\alpha)\rho\left[\sum_{i=1}^{k}x_i^2-2\sum_{i=1}^{k}x_iy_i+\sum_{i=1}^{k}y_i^2\right].$$

Перейдемо до мінімуму по $x\in E^k_{\eta n}(G)$ та зробимо перетворення, скориставшись властивостями мінімуму (зокрема, що $\min(a+b)\geq \min a+\min b$):

$$\min_{x\in E^k_{\eta n}(G)} A=\min_{x\in E^k_{\eta n}(G)}\left[(1-\alpha)\rho\sum_{i=1}^{k}x_i^2+\sum_{i=1}^{k}(p_i(y)-2(1-\alpha)\rho y_i)+\right.$$

$$\left.+(1-\alpha)\rho\sum_{i=1}^{k}y_i^2\right]\geq(1-\alpha)\rho(\sum_{i=1}^{k}g_i^2+\sum_{i=1}^{k}y_i^2)+\min_{x\in E^k_{\eta n}(G)}\sum_{i=1}^{k}(p_i(y)-2(1-\alpha)\rho y_i)x_i, \tag{7}$$

де елементи G задовольняють (5) (нагадаємо, що $k\leq\eta$). В правій частині (7) мінімум знайдемо за теоремою 3.1 (зауваження 3.2) з [1]. Маємо:

$$\min_{x\in E^k_{\eta n}(G)} A=\sum_{i=1}^{s}(p_{\beta_i}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_i})g_i+\sum_{i=s+1}^{k}(p_{\beta_i}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_i})g_{\eta-k+i}), \tag{8}$$

де $p(y)=(p_1(y),...,p_k(y))\in\partial_\varepsilon\psi(y)$ - субградієнт функції $\psi(x)$ в точці y, переставлення $(\beta_1,...,\beta_k)$ та стала $s\in J_k^\circ$ задовольняють умові

$$p_{\beta_1}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_1}\geq...\geq p_{\beta_s}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_s}\geq 0>$$
$$>p_{\beta_{s+1}}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_{s+1}}\geq...\geq p_{\beta_k}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_k};$$

сталі k,s такі: $r,s\in J_k^\circ$, $s+r=k$, а елементи G упорядковані згідно нерівності $g_1\leq...\leq g_\eta$. Підставивши (8) в (6) одержуємо справедливість першої частини теореми. Друга частина теореми доводиться з використанням означення мінімуму: $\forall y\in E^k_{\eta n}(G)$

$$\min_{x\in E^k_{\eta n}(G)} \psi(x)\leq\psi(y). \tag{9}$$

При виконанні для такого $y\in E^k_{\eta n}(G)$ нерівності (2) з доведеної в першій частині теореми нерівності (1) маємо справедливість співвідношення:

$$\min_{x\in E^k_{\eta n}(G)} \psi(x)\geq\psi(y)+B\geq\psi(y), \tag{10}$$

де $B\geq 0$ – алгебраїчна сума всіх (крім $\psi(x)$) доданків правої частини (1). Нерівності (9) та (10), справедливі одночасно, тому одержуємо, що точка $y\in E^k_{\eta n}(G)$, для якої це виконується є мінімаллю функції $\psi(x)$ на загальній множині розміщень $E^k_{\eta n}(G)$. Що і треба було довести в другій частині теореми. Таким чином, теорема доведена.

Наслідок. Якщо $\psi(x)$ - сильно опукла функція з параметром сильної опуклості $\rho>0$, що задана на R^k, $E^k_{\eta n}(G)$ - множина розміщень, то: 1) $\forall y\in R^k$

$$\min_{x\in E^k_{\eta n}(G)} \psi(x)\ge\psi(y)-(p(y),y)+\rho\sum_{i=1}^{k} g_i^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{s}(p_{\beta_i}(y)-2\rho y_{\beta_i})g_i + \sum_{i=s+1}^{k}(p_{\beta_i}(y)-2\rho y_{\beta_i})g_{\eta-k+1}), \qquad (11)$$

2) щоб точка $y\in E^k_{\eta n}(G)$ забезпечувала на множині $E^k_{\eta n}(G)$ мінімум функції $\psi(x)$, достатньо виконання умови

$$\sum_{i=1}^{s}(p_{\beta_i}(y)-2\rho y_{\beta_i})g_i + \sum_{i=s+1}^{k}(p_{\beta_i}(y)-2\rho y_{\beta_i})g_{\eta-k+1})+ \rho\sum_{i=1}^{k} g_i^2 +\rho\sum_{i=1}^{k} y_i^2 \ge(p(y),y); \qquad (12)$$

де $p(y)=(p_1(y),...,p_k(y))\in\partial\psi(x)$ - субградієнт функції $\psi(x)$ в точці y, переставлення перших k натуральних чисел $(\beta_1,...,\beta_k)$, параметри, що входять в (11), (12) задовольняють умовам: (4), (5) та

$$p_{\beta_1}(y)-2\rho y_{\beta_1}\ge...\ge p_{\beta_s}(y)-2\rho y_{\beta_s}\ge 0> p_{\beta_{s+1}}(y)-2\rho y_{\beta_{s+1}}\ge...\ge p_{\beta_k}(y)-2\rho y_{\beta_k}.$$

Зазначимо, що одержані твердження, як наслідки дають аналогічні результати для переставлень, оскільки при $k=\eta$ множина розміщень $E^k_{\eta n}(G)$ є множиною переставлень $E_{kn}(G)$ [1]. Одержані результати продовжують дослідження, викладені в роботах [1, 3-5].

Одержані твердження можуть бути використані для доведення того, що одержано оптимальний розв'язок в алгоритмах локальної оптимізації, а також, для оцінки розв'язків в наближених алгоритмах розв'язування задач на розміщеннях. Оцінки мінімумів можуть використовуватись для побудови різних алгоритмів розв'язування оптимізаційних задач з сильно опуклими функціями на комбінаторних множинах.

1. *Стоян Ю.Г., Емець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – Київ: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. - 188 с.
2. *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. - Москва: Наука, 1981. - 384 с.
3. *Стоян Ю.Г., Емець О.О., Емець Є.М.* Множини полірозміщень в комбінаторній оптимізації // Доповіді НАН України. - 1999. - №8. - С. 37-41.
4. *Емец О.А.* Об экстремальных свойствах недифференцируемых выпуклых функций на евклидовом множестве сочетаний с повторениями // Украинский матем. журн. - 1994. - Т. 46, №6. - С. 680-691.
5. *Емец О.А.* Об оптимизации линейных и выпуклых функций на евклидовом комбинаторном множестве полиперестановок // Журнал вычислит. матем. и матем. физики - 1994. - Т. 34, №6. - С. 855-869.

Полтавський державний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава
Полтавський кооперативний інститут, Полтава

Надійшла 15.01.2000

Емец О. А., Емец Е. М. ОЦЕНКИ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ МИНИМУМА СИЛЬНО ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ЕЕ МИНИМИЗАЦИИ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ // *Рассматривается задача минимизации на множестве размещений сильно выпуклой функции. Получены оценки и достаточные условия минимума целевой функции этой задачи.*

Yemets O. O., Yemets Ye. M. OF AN ESTIMATION AND SUFFICIENT CONDITIONS OF A MINIMUM IS STRONG OF CONVEX FUNCTION AT ITS MINIMIZATION ON ACCOMMODATIONS // *The task of minimization on set of accommodations strongly of convex function is considered. The estimations and sufficient conditions of a minimum of criterion function of this task are received.*