МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ

ПОЛТАВСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 519.854.2 ГАСНТИ 27.47.19

О.А.Емец, О.А.Валуйская

ИЗМЕНЕНИЯ И ДОПОЛНЕНИЯ МЕТОДА ВЫПУКЛОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ДВАЖДЫ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ С ГИПЕРСФЕРЫ В ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Полтава–1995

Рассматриваемая в статье задача возникла в рамках евклидовой комбинаторной оптимизации [1], [2]. Как известно [3], существует выпуклая (вогнутая) функция на выпуклом многограннике, совпадающая с произвольной заданной функцией в вершинах этого многогранника. Однако, известные авторам методы ее конструктивного построения не позволяют эффективно находить ее для произвольных целевых функций для комбинаторных многогранников (перестановочного [4], общего перестановочного [1-2], общего полиперестановочного [1, 2, 4-5], общего многогранника размещений [1-2] и т. д.). Многие из этих комбинаторных многогранников [4-8] (например, перестановочный, общий перестановочный, общий полиперестановочный и другие) обладают тем свойством, что множество их вершин совпадает с соответствующим евклидовым комбинаторным множеством, которое лежит на некоторой сфере (см., например, [2]). Поэтому, для таких евклидовых комбинаторных множеств актуальной является задача построения выпуклой функции, совпадающей с заданной на этой сфере.

В методе, рассматриваемом в данной статье, существенно, что исходная целевая функция $f(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая. Перейдем к изложению метода выпуклого продолжения с гиперсферы единичного радиуса с центром в начале координат в евклидово пространство.

Дана функция $f(x): \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ и $f(x) \in C^2(\mathbb{R}^k)$; то есть дважды непрерывно дифференцируемая.

Постановка задачи: найти функцию $F(x)$ такую, что

1. $F(x)$ – выпуклая в $\mathbb{R}^k$,

2. $F(x) = f(x), \ \forall x \in S_1(0)$,

3. $F(x)$ – аналитически задана в $\mathbb{R}^k$.

Причем, $S_1(0) = \{ x: |x|=1$, где $|x| = \sqrt{\sum_i x_i^2} \}$. Будем обозначать $\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_i a_i$.

Введем функцию $g(y): \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ и $g(y) \in C^2(\mathbb{R}^1)$. Наложим на g условия:

$$g(0)=0,\ g(1)=1,\ g(y) \geqslant 0,\ |g(y)|y \leqslant M,\ |g'(y)|y \leqslant M, \qquad (1)$$
$$|g''(y)|y \leqslant M,\ \forall\, y \geqslant 0.$$

Предлагается следующий способ нахождения функции $g(y)$, удовлетворяющий условиям (1). Построим функцию $\gamma(y)$ следующим образом: определим вторую производную $\gamma''(y)$ для $y \geqslant 0$ как

$$\gamma''(y) = \begin{cases} \cos(\pi y),\ 0 \leqslant y \leqslant c, \\ 1/(\alpha y^3),\ c \leqslant y, \end{cases}$$

где c, α – константы, $\alpha > 0$, $3/2 < c < 2$.

Выпишем условие непрерывности $\gamma''(y)$ в точке c.

$$1/(\alpha c^3) = \cos(\pi c). \qquad (2)$$

Найдем $\gamma'(y)$ интегрированием $y''(y)$: $\gamma'(y) = \int_0^y \gamma''(t)dt$.

Для $0 \leqslant y \leqslant c$: $\gamma'(y) = \int_0^y \cos(\pi t)dt = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\Big|_0^y = \frac{1}{\pi}\sin(\pi y)$.

Для $c \leqslant y$: $\gamma'(y) = \int_0^c \gamma''(t)dt + \int_c^y \gamma''(t)dt = \frac{1}{\pi}\sin(\pi c) + \int_c^y 1/(\alpha t^3)dt =$

$= \frac{1}{\pi}\sin(\pi c) - 2/(\alpha t^2)\Big|_0^y = \frac{1}{\pi}\sin(\pi c) + 2/(\alpha c^2) - 2/(\alpha y^2)$.

На $\gamma'(y)$ наложим условие $|\gamma'(y)|y \leqslant M$, откуда при $y > 0$ $|\gamma'(y)| \leqslant \frac{M}{y}$. Тогда $|\gamma'(y)| \to 0$, когда $y \to +\infty$. Для $c \leqslant y$ $\gamma'(y) = const - 2/(\alpha y^2)$ и $|\gamma'(y)| \to 0$, когда $const=0$. Откуда имеем

$$\frac{1}{\pi}\sin(\pi c) + 2/(\alpha c^2) = 0. \qquad (3)$$

Найдем $\gamma(y)$ интегрированием $y'(y)$: $\gamma(y) = \int_0^y \gamma'(t)dt$.

Для $0 \leqslant y \leqslant c$: $\gamma(y) = \int_0^y \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)dt = -\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi t)\Big|_0^y = \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi y)$.

Для $c \leqslant y$: $\gamma(y)=\int_0^c\gamma'(t)dt+\int_c^y\gamma'(t)dt=\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi c)+2/(\alpha t)\Big|_c^y=$

$=\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi c)-2/(\alpha c)+2/(\alpha y)$.

На $\gamma(y)$ наложим условие $|\gamma(y)|y \leqslant M$, откуда при $y>0$ $|\gamma(y)|\leqslant$ $\leqslant\frac{M}{y}$. Тогда $|\gamma(y)| \Rightarrow 0$, когда $y \Rightarrow +\infty$. Для $c \leqslant y$ $\gamma(y)=\mathrm{const}+2/(\alpha y)$ и $|\gamma(y)| \Rightarrow 0$, когда $\mathrm{const}=0$. Откуда имеем

$$\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi c)-2/(\alpha c)=0. \qquad (4)$$

Тогда искомую функцию $g(y)$ можно представить в виде: $g(y)=$ $=\pi^2\gamma(y)/2$, или

$$g(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(\pi y), & 0\leqslant y\leqslant c,\\ \pi^2/(\alpha y), & c\leqslant y,\end{cases}$$

Из условий (2), (3), (4) составим систему, покажем существование искомых параметров.

$$\begin{cases}1/\alpha c^3=\cos(\pi c),\\ \frac{1}{\pi}\sin(\pi c)+2/(\alpha c^2)=0, \quad \Rightarrow \sin(\pi c)=-2\pi/(\alpha c^2),\\ \frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi c)-2/(\alpha c)=0. \Rightarrow \cos(\pi c)=1-2\pi^2/(\alpha c).\end{cases}$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством для угла πc, из второго и третьего уравнения системы имеем $\alpha c^3=1+$ $+\pi^2c^2$. А с учетом первого уравнения системы получаем $\cos(\pi c)=$ $=1/(1+\pi^2c^2)$. Так как функция, стоящая в правой части этого равенства при $c\geqslant 0$ убывает от 1 до 0, то существует c, $3/2<$ $<c<2$ такое, что выполняются наложенные на него условия. Тогда $\alpha=1/(c^3\cos(\pi c))$.

Введем функцию $n(x)=\sum_i x_i^2$. Рассмотрим функцию $z=f(g(n(x))x)$. Найдем ее частные производные первого и второго порядка.

$$\frac{\partial n(x)}{\partial x_j}=2x_j;\quad \frac{\partial g(n(x))}{\partial x_j}=2x_j g'(n(x));\quad \frac{\partial g(n(x))x_i}{\partial x_j}=2x_i x_j g'(n(x));$$

$$\frac{\partial g(n(x))x_j}{\partial x_j} = g(n(x)) + 2x_j^2 g'(n(x)).$$

$$z=f(g(n(x))x)=f(g(n(x))x_1,\ g(n(x))x_2,\dots,\ g(n(x))x_k).$$

Теорема (частные производные сложных функций). Пусть $z=f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ – дифференцируемая в точке $x=(x_1,\dots,x_n)$ и есть n функций $x_j=\varphi_j(t): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ – дифференцируемых в точке t и $\varphi_j(t)=x_j$, тогда $z(t)=f(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))$ имеет в t частные производные первого порядка и $\frac{\partial z}{\partial x_j}(t)= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(n(x))x)\frac{\partial g(n(x))x_i}{\partial x_j} =$$

$$= g(n(x))\frac{\partial f}{\partial x_j}(g(n(x))x) + 2x_j g'(n(x)) \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(n(x))x)x_i.$$

Обозначим $f_j(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(g(n(x))x)$, $\varphi_j(x) = 2x_j g'(n(x))$, $\varphi(x) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(n(x))x)x_i$.

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_m}=g(n(x))\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_m}(g(n(x))x)+2x_j g'(n(x))\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(g(n(x))x)x_i,$$

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_m}=\frac{\partial f}{\partial x_m}(g(n(x))x) + \sum_i x_i\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(n(x))x)}{\partial x_m} = \frac{\partial f}{\partial x_m}(g(n(x))x) + \sum_i x_i *$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_m\partial x_i}(g(n(x))x)g(n(x))+ 2x_m g'(n(x)) \sum_n \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_i}(g(n(x))x)x_n\right),$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m}=4x_j x_m g''(n(x)).\quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j}=4x_j^2 g''(n(x))+2g'(n(x)).\quad \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}=\left.\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_m}\right|_{m=j},$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_j} =\left.\frac{\partial f_j}{\partial x_m}\right|_{m=j}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_j\partial x_m} = 2x_m g'(n(x))\frac{\partial f}{\partial x_j}(g(n(x))x)+g(n(x))\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_m}(g(n(x))x)*\right.$$

$$\left. g(n(x))+ 2x_m g'(n(x)) \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(g(n(x))x)x_i\right]+\left[\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(n(x))x)x_i\right]*$$

$$4x_j x_m g''(n(x))+2x_j g'(n(x))\left[\frac{\partial f}{\partial x_m}(g(n(x))x)+\sum_i x_i\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_m\partial x_i}(g(n(x))x)*\right.\right.$$

$$g(n(x)) + 2x_m g'(n(x)) \sum_n \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_i}(g(n(x))x)x_n\Big)\Big];$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_j^2} = 2x_j g'(n(x))\frac{\partial f}{\partial x_j}(g(n(x))x) + g(n(x))\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(g(n(x))x)*$$

$$g(n(x)) + 2x_j g'(n(x)) \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(g(n(x))x)x_i\Big] + \Big[\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(n(x))x)x_i\Big]*$$

$$(4x_j^2 g''(n(x)) + 2g'(n(x))) + 2x_j g'(n(x))\Big[\frac{\partial f}{\partial x_j}(g(n(x))x) + \sum_i x_i*$$

$$\Big(g(n(x))\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(g(n(x))x) + 2x_j g'(n(x)) \sum_n \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_i}(g(n(x))x)x_n\Big)\Big].$$

Отметим, что $z=f(g(n(x))x)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией, как суперпозиция функций f, g, n – дважды непрерывно дифференцируемых. И z имеет ограниченные частные производные второго порядка: они имеют вид сумм, а в слагаемые как сомножетели входят функции двух видов, которые рассмотрим далее.

1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(g(n(x))x)$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(g(n(x))x)$. Рассмотрим их аргумент:

$$|g(n(x))x| = |g(n(x))||x| = |g(n(x))|\sqrt{n(x)} \leqslant M.$$

Таким образом аргумент $g(n(x))x$ лежит в ограниченном множестве. И так как $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ – непрерывны в $\mathbb{R}^k$, то на ограниченном множестве они ограничены. То есть $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(g(n(x))x)$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(g(n(x))x)$ – ограничены в $\mathbb{R}^k$.

2) $x_j g'(n(x))$, $x_j^2 g''(n(x))$, $x_i x_j^2 g''(n(x))$. Имеем $x_i=(e_i,x)$, $|x_i| = |(e_i,x)| \leqslant |x| = \sqrt{n(x)}$, где e_i – i-ый орт. Тогда $|x_j^2 g''(n(x))| \leqslant |g''(n(x))|n(x) \leqslant M$ и рассматриваемые функции – ограничены в $\mathbb{R}^k$. Тогда частные производные второго порядка z – ограничены в $\mathbb{R}^k$, как суммы ограниченных сомножетелей.

Таким образом доказанана следующая теорема.

Теорема 1. Если $f(x)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ и $f(x) \in C^2(\mathbb{R}^k)$ и

$g(x): \mathbb{R}^1 \Rightarrow \mathbb{R}^1$, $g(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$, где g удовлетворяет условиям (1), то $\Phi(x) = f(g(n(x))x) \in C^2(\mathbb{R}^k)$, все ее частные производные первого и второго порядка ограничены в $\mathbb{R}^k$. На $S_1(0)$ выполняется равенство $f(x)=f(g(n(x))x)$.

Напомним, что справедлива следующая теорема, которая необходима для обоснования выпуклого продолжения.

Теорема 2 [9]. Пусть $\Phi(x): \mathbb{R}^k \Rightarrow \mathbb{R}^1$ дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными частными производными второго порядка. Тогда

$F(x) = \Phi(x) + (M_1+M_2)(n(x)-1)/2$ – выпуклая в $\mathbb{R}^k$ функция, где

$$M_1 = \max\Big(0,\ \max_i \max\Big(\Big\{ -\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_i^2} \Big\},\ x \in \mathbb{R}^k \Big)\Big);$$

$$M_2 = \max\Big(0,\ \max_{i<j} \max\Big(\Big\{ -\sqrt{\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_i^2} + M_1}\ \sqrt{\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_j^2} + M_1} + (k-1)\left|\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \Big\},\ \text{где } x \in \mathbb{R}^k \Big)\Big).$$

Если в качестве $\Phi(x)$ в теореме 2 взять $f(g(n(x))x)$, которая по теореме 1 обладает необходимыми для этого свойствами, то получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. Если $f(x): \mathbb{R}^k \Rightarrow \mathbb{R}^1$ и $f(x) \in C^2(\mathbb{R}^k)$ и

$$g(x): \mathbb{R}^1 \Rightarrow \mathbb{R}^1,\ g(x) \in C^2(\mathbb{R}^1),$$

где g удовлетворяет условиям (1), то $F(x) = f(g(n(x))x) + (M_1 + M_2)\, n(x)/2 - (M_1 + M_2)/2$ – выпуклая в $\mathbb{R}^k$ функция, где

$$M_1 = \max\Big(0,\ \max_{0<i<k+1} \max\Big(-\frac{\partial^2 f(g(n(x))x)}{\partial x_i^2},\ \text{где } x \in \mathbb{R}^k \Big)\Big),$$

$$M_2 = \max\Big(0,\ \max_{0<i,j<k+1} \max\Big((K-1)\left|\frac{\partial^2 f(g(n(x))x)}{\partial x_i \partial x_j}\right| - \sqrt{M_1 + \frac{\partial^2 f(g(n(x))x)}{\partial x_i^2}}\ \sqrt{M_1 + \frac{\partial^2 f(g(n(x))x)}{\partial x_j^2}},\ \text{где } x \in \mathbb{R}^k \Big)\Big).$$

Для практического применения теоремы 3 в методах комбинаторной оптимизации бывает полезна оценка для $(M_1 + M_2)/2$. Обозначим

$$\left|\frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_m}\right| \leqslant \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_m}(x)\right| + 2M\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\right| + 2M\left|\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) + \right.$$

$$\left.+\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_m}(x)\right| + 4M\left|\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| + 4M^2\left|\sum_i \sum_n \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_i}(x)\right|\Bigg|_{x=g(n(x))x} = f_{jm}(g(n(x))x);$$

$$\left|\frac{\partial^2 z}{\partial x_j^2}\right| \leqslant \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x)\right| + 4M\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right| + 4M\left|\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)\right| + 6M\left|\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| +$$

$$+4M^2\left|\sum_i \sum_n \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_i}(x)\right|\Bigg|_{x=g(n(x))x} = f_{jj}(g(n(x))x).$$

Учитывая, что $|g(y)|y \leqslant M$

$$\max(f_{jj}(g(n(x))x),\ x \in \mathbb{R}^k) \leqslant \max(f_{jj}(x),\ |x| \leqslant M) = \varphi_{jj};$$

$$\max(f_{jm}(g(n(x))x),\ x \in \mathbb{R}^k) \leqslant \max(f_{jm}(x),\ |x| \leqslant M) = \varphi_{jm}.$$

Тогда $M_1 \leqslant \max\{0, \max\limits_i (-\varphi_{jj})\}$;

$$M_2 \leqslant \max\{0, \max_{i<j}((k-1)\varphi_{ij} - \sqrt{M_1 + \varphi_{ii}}\sqrt{M_1 + \varphi_{jj}})\}.$$

Таким образом в работе изложена модификация метода выпуклого продолжения с гиперсферы единичного радиуса с центром в начале координат в евклидово пространство [9]. Это изменение возникает, когда искомая выпуклая функция строится с использованием функции $z=f(g(|x|^2)x)$ вместо $z=f(g(|x|)x)$. Даны оценки для констант, вычисляемых в процессе реализации данной модификации метода выпуклого продолжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизацияна них. Новое в математическом программированиии: Учеб. пособие/ К.: УМК ВО, 1992. - 92 с.

2. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. - К.: ІСДО, 1993. - 188 с.

3. Яковлев С.В. Теория и оптимизационные методы геометрического проектирования в системах управления наблюдения и контроля: Автореф. дис...докт. физ.-мат. наук.- Томск, 1989.- 27 с.

4. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизации. - М.: Наука, 1981. - 344 с.

5. Емец О.А. Комбинаторная модель и приближенный метод с априорной оценкой решения оптимизационной задачи размещения разноцветных прямоугольников // Экономика и матем. методы. - 1993. - Т. 29, вып. 2. - 368 - 380.

6. Емец О.А. Множество сочетаний с повторениями, отображенное в $\mathbb{R}^k$, и свойства задач оптимизации на нем // Докл. АН УССР. - 1991. - № 4. - 69 - 72.

7. Емец О.А. Об экстремальных свойствах недифференцируемых выпуклых функций на евклидовом множестве сочетаний с повторениями// Украинский математический журнал.- 1994. - Т. 46, № 6.- 680 - 691.

8. Емец О.А. Об оптимизации линейных и выпуклых функций на евклидовом комбинаторном множестве полиперестановок// Журнал вычислительной математики и математической физики.- 1994.- Т. 34, № 6.- 855 - 869.

9. Емец О.А., Валуйская О.А. Метод выпуклого продолжения дважды непрерывно дифференцируемой функции с гиперсферы в евклидово пространство/ Полт. техн. ун-т.- Полтава, 1994.- 6 с. - Деп. ГНТБ Украины 14.12. 1994; № 2430 Укр 94.

Печатается в соответствии с решением Научно-технического совета Полтавского технического университета от 10 января 1995г., протокол № 1.