МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ

ПОЛТАВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

УДК 519.854.2 РДАСНТІ 27.47.19

О.А Емец, О.А.Валуйская

МЕТОД ВЫПУКЛОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ДВАЖДЫ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ С ГИПЕРСФЕРЫ В ЕВКЛИДОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

№ 2430 - Ук 94

Полтава-1993

Дана функция $f(x)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ и $f(x) \in C^2(\mathbb{R}^k)$, то есть дважды непрерывно дифференцируемая.

Постановка задачи: найти функцию $F(x)$ такую, что

1. $F(x)$ – выпуклая в $\mathbb{R}^k$,

2. $F(x) = f(x)$, $\forall\ x \in S_1(0)$,

3. $F(x)$ – аналитически задана в $\mathbb{R}^k$.

Причем, $S_1(0) = \{\ x\colon |x|=1$, где $|x| = \sqrt{\sum_i x_i^2}\ \}$.

Введем функцию $g(x)\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ и $g(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$. Наложим на g условия

$$g(0)=0,\ g(1)=1,\ g'(0)=0. \tag{1}$$

$$g(x) \geq 0,\ |g(x)|x \leq 1,\ |g'(x)|x \leq 1,\ |g''(x)|x \leq 1,\ \forall\ x \geq 0.$$

В качестве g можно взять дважды непрерывно дифференцируемое сглаживание следующей функции:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = x & ,\ 0 \leq x \leq 1, \\ g_2(x) = 1 - \ln(x) & ,\ 1 \leq x \leq \sqrt{e}, \\ g_3(x) = \sqrt{e}/2x & ,\ \sqrt{e} \leq x. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $z=f(g(|x|)x)$. Найдем ее частные производные первого и второго порядка.

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \Big[\sum_j \frac{\partial f(g(|x|)x)}{\partial x_j} \Big]\Big[g(|x|) + \frac{x_i}{|x|} g'(|x|) \sum_j x_j \Big]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_m} = \Big[\sum_j \sum_s \frac{\partial^2 f(g(|x|)x)}{\partial x_j \partial x_s} \Big]\Big[g(|x|) + g'(|x|)|x| \frac{x_i}{|x|} \sum_j \frac{x_j}{|x|} \Big] *$$

$$\Big[g(|x|) + g'(|x|)|x| \frac{x_m}{|x|} \sum_j \frac{x_j}{|x|} \Big] + \Big[\sum_j \frac{\partial f(g(|x|)x)}{\partial x_j} \Big]\Big[g''(|x|)|x| *$$

$$\frac{x_i}{|x|} \sum_j \frac{x_j}{|x|} + g'(|x|) \Big[\frac{x_m}{|x|} + \frac{x_i}{|x|} - \frac{x_m}{|x|} \frac{x_i}{|x|} \sum_j \frac{x_j}{|x|} \Big]\Big];$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} = \Big[\sum_j \sum_s \frac{\partial^2 f(g(|x|)x)}{\partial x_j \partial x_s} \Big]\Big[g(|x|) + g'(|x|)|x| \frac{x_i}{|x|} \sum_j \frac{x_j}{|x|} \Big]^2 +$$

$$+ \Big[\sum_j \frac{\partial f(g(|x|)x)}{\partial x_j} \Big]\Big[g''(|x|)|x| \Big[\frac{x_i}{|x|}\Big]^2 \sum_j \frac{x_j}{|x|} + g'(|x|) \Big[\frac{2x_i}{|x|} +$$

$$+\sum_j \frac{x_j}{|x|} - \left(\frac{x_i}{|x|}\right)^2 \sum_j \frac{x_j}{|x|} \}\}.$$

Отметим, что $z=f(g(|x|)x)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией, так как в начале координат, в силу введенных условий на $g(x)$, все ее частные производные первого и второго порядка равны нулю, в других точках – в силу дважды дефференцируемости функций $f(x)$, $g(x)$, $|x|$. Кроме того все ее частные производные первого и второго порядка ограниченны по модулю во всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$. На $S_1(0)$ выполняется равенство $f(x)=f(g(|x|)x)$.

Таким образом получили следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $f(x)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ и $f(x) \in C^2(\mathbb{R}^k)$ и

$$g(x)\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1,\ g(x) \in C^2(\mathbb{R}^1),$$

где g удовлетворяет условиям (1).

Тогда $\Phi(x) = f(g(|x|)x) \in C^2(\mathbb{R}^k)$, все ее частные производные первого и второго порядка ограниченны по модулю во всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$. На $S_1(0)$ выполняется равенство $f(x)=f(g(|x|)x)$.

Перейдем к следующим утверждениям.

Лемма 1. Пусть задана квадратичная форма

$$\sum_i M_i x_i^2 + 2\sum_{i<j} M_{ij} x_i x_j.$$

Тогда, если 1) $M_i \geq 0,\ \forall\, i$, 2) $|M_{ij}| \leq \sqrt{M_i M_j}/(k-1),\ \forall\, i<j$, то квадратичная форма – положительно определена.

Доказательство. $M(x) = \sum_i M_i x_i^2 + 2\sum_{i<j} M_{ij} x_i x_j =$

$$= \sum_i \sum_l 1^l M_i x_i^2 / (k-1) + 2\sum_{i<j} M_{ij} x_i x_j =$$

$$= \sum_{i<j} \left(M_i x_i^2 / (k-1) + 2M_{ij} x_i x_j + M_j x_j^2 / (k-1) \right).$$

Если $|M_{ij}| \leq \sqrt{M_i M_j}/(k-1)$, то $|M_{ij}| = \sqrt{m_{ii}^j}\,\sqrt{m_{jj}^i}$, где $m_{ii}^j \leq M_i/(k-1)$, $m_{jj}^i \leq M_j/(k-1)$, и $m_{ii}^j + M_{ii}^j = M_i/(k-1)$, $m_{jj}^i + M_{jj}^i =$

$M_j /(k-1)$, где $M^j_{ii} \geqslant 0$, $M^i_{jj} \geqslant 0$. $M(x) = \sum\limits_{i<j} ((\, m^j_{ii} x_i^2 + 2\operatorname{sign}(M_{ij})$

$\sqrt{m^j_{ii}}\sqrt{m^i_{jj}}\; x_i x_j + m^i_{jj} x_j^2\,) + M^j_{ii} x_i^2 + M^i_{jj} x_j^2) = \sum\limits_{i<j} ((\sqrt{m^j_{ii}}\; x_i +$

$+\operatorname{sign}(M_{ij})\sqrt{m^i_{jj}}\; x_j)^2 + M^j_{ii} x_i^2 + M^i_{jj} x_j^2\;) \geqslant 0.$

Теорема 2. Пусть $\Phi(x)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными по модулю частными производными первого и второго порядка. Тогда

$F(x) = \Phi(x) + (\,M_1+M_2)(|x|^2-1)/2$ – выпуклая в $\mathbb{R}^k$ функция, где

$$M_1 = \max\Big(\,0, \max_i \max\Big(\Big\{-\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_i^2}\Big\},\; x \in \mathbb{R}^k\Big)\Big);$$

$$M_2 = \max\Big(\,0, \max_{i<j} \max\Big(\Big\{-\sqrt{\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_i^2} + M_1}\sqrt{\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_j^2} + M_1} + (k-1)\left|\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right|\Big\},\ \text{где } x \in \mathbb{R}^k\Big)\Big).$$

Доказательство. Рассмотрим $\sum\limits_i \sum\limits_j \dfrac{\partial^2 F(y)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i-y_i)(x_j-y_j)$, $\forall\, x,\ y \in \mathbb{R}^k$. Покажем, с помощью леммы 1, что эта квадратичная форма положительно определена. Для M_1 и M_2, определенных, как указано в формулировке теоремы 2, рассмотрим функцию:

$M(x) = (\,M_1+M_2)(|x|^2-1)/2$, причем $\dfrac{\partial^2 M(x)}{\partial x_i^2} = M_1+M_2$, $\dfrac{\partial^2 M(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0$.

Тогда $F(x) = \Phi(x)+M(x)$, $\dfrac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i^2} = \dfrac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i^2} + M_1 + M_2$, $\dfrac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j}$.

Отметим, что $\dfrac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i^2} = \dfrac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i^2} + M_1 + M_2 \geqslant \dfrac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i^2} + M_1 \geqslant 0$, для $\forall\, x$ по способу выбора M_1 для любого i. Это означает выполнение условия 1 леммы 1.

Перейдем к проверке условия 2 леммы 1.

Для любых $i<j$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^k$ обозначим

$$M_{ij}(x) = \sqrt{\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i^2}}\sqrt{\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_j^2}} \Big/ (k-1) - \left|\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right| =$$

$$+ (k-1)\left|\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right|\Big\}, \text{ где } x \in \mathbb{R}^k \ \}\}.$$

Доказательство. Рассмотрим $\sum\limits_i \sum\limits_j \frac{\partial^2 F\ (y)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - y_i)(x_j - y_j)$,

$\forall$ x, $y \in \mathbb{R}^k$. Покажем, с помощью леммы 1, что эта квадратичная форма положительно определена. Для M_1 и M_2, определенных, как указано в формулировке теоремы 2, рассмотрим функцию:

$M(x) = (M_1 + M_2)(|x|^2 - 1)/2$, причем $\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x_i^2} = M_1 + M_2$, $\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0$.

Тогда $F_\cup(x) = \Phi(x) + M(x)$, $\frac{\partial^2 F_\cup(x)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i^2} + M_1 + M_2$, $\frac{\partial^2 F_\cup(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j}$.

Отметим, что $\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i^2} + M_1 + M_2 \geqslant \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i^2} + M_1 \geqslant 0$, для $\forall\ x$ по способу выбора M_1 для любого i. Это означает выполнение условия 1 леммы 1.

Перейдем к проверке условия 2 леммы 1.

Для любых $i < j$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^k$ обозначим

$$M_{ij}(x) = \sqrt{\frac{\partial^2 F_\cup(x)}{\partial x_i^2}}\ \sqrt{\frac{\partial^2 F_\cup(x)}{\partial x_j^2}} \Big/ (k-1) - \left|\frac{\partial^2 F_\cup(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right| =$$

$$= \sqrt{\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i^2} + M_1 + M_2}\ \sqrt{\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i^2} + M_1 + M_2} \Big/ (k-1) - \left|\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right|.$$

Воспользуемся тем, что $\sqrt{\mu + a}\ \sqrt{\mu + b} \geqslant \mu + \sqrt{ab}$, $\mu \geqslant 0$. Положим $\mu = M_2$, тогда, с учетом выбора M_2, имеем:

$$M_{ij}(x) \geqslant M_2/(k-1) + \sqrt{\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i^2} + M_1}\ \sqrt{\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_j^2} + M_1} / (k-1) - \left|\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \geqslant 0.$$

Данная цепочка неравенств означает выполнение условия 2 леммы 1. Таким образом, исходная квадратичная форма положительно определена. Функция $F(x)$ – выпуклая в $\mathbb{R}^k$ (в силу критерия выпуклости для дважды непрерывно дифференцируемой функции).

Таким образом получена следующая результирующая теорема.

Теорема. Пусть $f(x)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ и $f(x) \in C^2(\mathbb{R}^k)$ и

$$g(x)\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1,\ g(x) \in C^2(\mathbb{R}^1),$$

где g удовлетворяет условиям (1).

Тогда $F(x) = f(g(|x|)x) + (M_1 + M_2)|x|^2/2 - (M_1 + M_2)/2 -$

выпуклая в $\mathbb{R}^k$ функция,

где $M_1 = \max(\ 0, \max\limits_{0<i<k+1} \max\ (-\dfrac{\partial^2 f(g(|x|)x)}{\partial x_i^2}$, где $x \in \mathbb{R}^k\ )\ )$,

$$M_2 = \max(\ 0, \max_{0<i,\ j<k+1} \max\ \Big((k-1) \Big| \frac{\partial^2 f(g(|x|)x)}{\partial x_i \partial x_j} \Big| -$$

$$- \sqrt{M_1 + \frac{\partial^2 f(g(|x|)x)}{\partial x_i^2}} \sqrt{M_1 + \frac{\partial^2 f(g(|x|)x)}{\partial x_j^2}}\ ,\text{где } x \in \mathbb{R}^k\ \Big)\ ).$$

Дадим оценку для $(\ M_1+M_2)/2$.

Обозначим

перепечатать

$$g_{im}^{(2)}(x) = \Big[g(|x|) + g'(|x|)|x| \frac{x_i}{|x|} \sum_j \frac{x_j}{|x|}\Big] \Big[g(|x|) + g'(|x|)|x| \frac{x_m}{|x|} \sum_j \frac{x_j}{|x|}\Big];$$

...тать

$$g_{im}^{(1)}(x) = g''(|x|)|x| \frac{x_i}{|x|} \sum_j \frac{x_j}{|x|} + g'(|x|) \Big[\frac{x_m}{|x|} + \frac{x_i}{|x|} - \frac{x_m}{|x|} \frac{x_i}{|x|} \sum_j \frac{x_j}{|x|}\Big];$$

$$g_{ii}^{(1)}(x) = g''(|x|)|x| \Big[\frac{x_i}{|x|}\Big]^2 \sum_j \frac{x_j}{|x|} + g'(|x|) \Big[\frac{2x_i}{|x|} + \sum_j \frac{x_j}{|x|} -$$

$$- \Big[\frac{x_i}{|x|}\Big] \sum_j \frac{x_j}{|x|}\Big];\quad g_{ii}^{(2)}(x) = \Big[g(|x|) + g'(|x|)|x| \frac{x_i}{|x|} \sum_j \frac{x_j}{|x|}\Big]^2.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_m} = \Big[\sum_j \sum_s \frac{\partial^2 f(g(|x|)x)}{\partial x_j \partial x_s}\Big] g_{im}^{(2)}(x) + \Big[\sum_j \frac{\partial f(g(|x|)x)}{\partial x_j}\Big] g_{im}^{(1)}(x);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} = \Big[\sum_j \sum_s \frac{\partial^2 f(g(|x|)x)}{\partial x_j \partial x_s}\Big] g_{ii}^{(2)}(x) + \Big[\sum_j \frac{\partial f(g(|x|)x)}{\partial x_j}\Big] g_{ii}^{(1)}(x).$$

Учитывая свойства функции g, а именно:
$g(x) \geq 0$, $|g(x)|x \leq 1$, $|g'(x)|x \leq 1$, $|g''(x)|x \leq 1$, $\forall\ x \geq 0$,
а также $\Big|\dfrac{x_i}{|x|}\Big| \leq 1$, $\Big| \sum\limits_j \dfrac{x_j}{|x|} \Big| \leq \sqrt{k}$.

Имеем $\max(\ |g_{im}^{(2)}(x)|$, где $x \in \mathbb{R}^k) = (\sqrt{k} + 1)^2$;

$\max(\ |g_{im}^{(1)}(x)|$, где $x \in \mathbb{R}^k) = 2(\sqrt{k} + 1)$;

$\max(\ |g_{ii}^{(2)}(x)|$, где $x \in \mathbb{R}^k) = (\sqrt{k} + 1)^2$;

$\max(\ |g_{ii}^{(1)}(x)|$, где $x \in \mathbb{R}^k) = 2(\sqrt{k} + 1)$.

Обозначим $f_{im} = \max(\ \Big| \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_m} \Big|$, где $x \in \mathbb{R}^k)$.

Так как

$$\max\left(\left|\frac{\partial^2 f(g(|x|)x)}{\partial x_i \partial x_m}\right|, x \in \mathbb{R}^k\right) \leqslant \max\left(\left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_m}\right|, |x| \leqslant 1\right),$$

то

$$f_{im} \leqslant \max\left(\left|\sum_j \sum_s \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_s}\right|, |x| \leqslant 1\right) \max\left(|g^{(2)}_{im}(x)|, x \in \mathbb{R}^k\right) +$$

$$+ \max\left(\left|\sum_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right|, |x| \leqslant 1\right) \max\left(|g^{(1)}_{im}(x)|, x \in \mathbb{R}^k\right).$$

оценки констант

Окончательный результат:

$$\frac{M_1 + M_2}{2} = -\frac{k}{2} - \left(\max\left(\left|\sum_j \sum_i \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}\right|, |x| \leqslant 1\right) k_1^2 + 2\max\left(\left|\sum_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right|, |x| \leqslant 1\right) k_1\right),$$

$k_1 = \sqrt{k} + 1.$

Печатается в соответствии с решением Научно-технического совета Полтавского технического университета от 10 сентября 1994 г., протокол № 7.

С ГНТБ Украины 1994 г.