№6

ЕТОДЫ И ПРОГРАММНЫЕ ЕДСТВА ОПТИМИЗАЦИИ, ОДЕЛИРОВАНИЯ И СОЗДАНИЯ ЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Академия наук Украинской ССР
Ордена Ленина Институт кибернетики имени В.М.Глушкова
Научный совет АН УССР по проблеме "Кибернетика"

МЕТОДЫ И ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА ОПТИМИЗАЦИИ, МОДЕЛИРОВАНИЯ И СОЗДАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Сборник научных трудов

Киев 1990

УДК 519.8

О.А.ЕМЕЦ

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НА ЕВКЛИДОВОМ ПОЛИПЕРЕСТАНОВОЧНОМ МНОЖЕСТВЕ С ПОВТОРЕНИЯМИ: СВОЙСТВА ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА

Приводятся результаты исследования евклидового полиперестановочного множества с повторениями $E(g,H)$, которое является допустимым в одном классе задач комбинаторной оптимизации. Описана выпуклая оболочка $E(g,H)$ в виде многогранника $\Pi(g,H)$. Показано, что $\Pi(g,H)$ является пересечением общих перестановочных многогранников, а вершинами $\Pi(g,H)$ являются точки $E(g,H)$ и только они. Доказан критерий смежности вершин $\Pi(g,H)$. Рассмотрена принадлежность $E(g,H)$ сфере и цилиндрическим поверхностям. Описаны грани любой размерности в $\Pi(g,H)$.

Пусть $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ разбито на s непустых, непересекающихся множеств $N_1, \ldots, N_s$. Обозначим H множество перестановок $\pi = (\pi_{N_1}, \ldots, \pi_{N_s})$, где π_{N_i} – произвольная перестановка элементов множества N_i. Пусть g – набор действительных не обязательно различных чисел $\{g_1, \ldots, g_n\}$. Отобразим H на $E(g,H) \in R^n$ так: $\forall \pi = (\pi(1), \ldots, \pi(n)) \in H$, $\forall (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in E(g,H)$, $i_j \in J_n$, $x_{i_j} = g_{\pi(j)}$ $\forall j \in J_n$. Множество $E(g,H) = \{g(\pi) = (g_{\pi(1)}, \ldots, g_{\pi(n)})\ \forall \pi \in H\}$ назовем евклидовым полиперестановочным множеством с повторениями.

Рассмотрим следующую задачу комбинаторной оптимизации: для заданной $\forall g(\pi) \in E(g,H)$ действительной функции $f(g(\pi))$ требуется найти такое $g^*(\pi) \in E(g,H)$, что $f(g^*(\pi)) \le f(g(\pi))$ $\forall g(\pi) \in E(g,H)$. Ниже приводятся результаты исследования множества $E(g,H)$ и его выпуклой оболочки $\Pi(g,H)$.

<u>Теорема I.</u> Точка $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Pi(g,H)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет ограничениям

$$\sum_{j \in N_i} x_j = \sum_{j \in N_i} g_i^{N_i} \quad \forall i \in J_s; \tag{I}$$

$$\sum_{j \in \omega^i} x_j \le \sum_{j=1}^{|\omega^i|} g_i^{N_i} \quad \forall \omega^i \subset N_i \quad \forall i \in J_s, \tag{2}$$

где g^{N_i} – n_i-мерный вектор $(n_i = |N_i|\ \forall i \in J_s)$, образованный

ISBN 5-7702-0133-9 Методы и программные средства оптимизации, моделирования и создания вычислительных систем. Киев, 1990.

компонентами вектора g с номерами из множества N_i, из которых q_i различны;

$$g_1^{N_i} \geq g_2^{N_i} \geq \ldots \geq g_{n_i}^{N_i};$$

$$N_i' = \left\{ \left(\sum_{j=1}^{i-1} n_j\right) + 1, \ldots, \sum_{j=1}^{i} n_j \right\} \quad \forall i \in J_s.$$

Теорема 2.

$$\Pi(g, H) = \bigotimes_{i=1}^{s} \Pi_{n_i q_i}(g^{N_i}),$$

где $\otimes$ – символ произведения многогранников; $\Pi_{n_i q_i}(g^{N_i})$ – общий перестановочный многогранник*, индуцируемый g^{N_i}.

Теорема 3. Точки множества $E(g, H)$, и только они, являются вершинами многогранника $\Pi(g, H)$.

Теорема 4. Вершина $g(\pi)$ многогранника $\Pi(g, H)$ является смежной вершине $g(\sigma)$ тогда и только тогда, когда $g(\sigma)$ получается из $g(\pi)$ перестановкой двух компонент $g_i^{N_i}$ и $g_{j+1}^{N_i}$, $j \in J_{n_i - 1}$, $i \in J_s$, причем $g_j^{N_i} \neq g_{j+1}^{N_i}$.

Теорема 5. Точки множества $E(g, H)$ принадлежат $(n-1)$-сфере $W \subset R^n$:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} (x_i - t^*)^2 = r^2; \\ &t^* = \frac{1}{n}(g_1 + \ldots + g_n), \\ &r = \left(\sum_{k=1}^{n} (g_k - t^*)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Теорема 6. Точки множества $E(g, H)$ лежат на цилиндрической поверхности:

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in N_i} (x_i - t_i^*)^2 = r_i^2; \; i \in J_s; \\ &t_i^* = \frac{1}{n_i}\left(\sum_{j \in N_i'} g_j^{N_i}\right); \\ &r_i = \left(\sum_{k \in N_i} (g_k^{N_i} - t_i^*)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \qquad (4)$$

---

* С т о я н Ю.Г., Е м е ц О.А. О комбинаторных задачах размещения прямоугольников // Экономика и мат. методы. – 1985. – 21, вып. 5. – С. 869–881.

Теорема 7. Точки множества $E(g,H)$, и только они, удовлетворяют системе (I)–(4).

Пусть $g_{k^i}^{N_i} = (g^{N_i})^j$, если $k^i_{j-1} < k^i \le k^i_j$, где $0 = k^i_0 < k^i_1 < \ldots < k^i_{q_i}$, $\forall k^i \in J_{n_i}$; $(g^{N_i})^1 > \ldots > (g^{N_i})^{q_i}$ $\forall i \in J_s$.

Теорема 8. а) Пусть F – m-грань многогранника $\Pi(g,H)$. Тогда найдутся такие подмножества $\omega^i_1 \subset \omega^i_2 \subset \ldots \subset \omega^i_{n_i-m_i} = N_i$, $\forall i \in J_s$, $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = m$, для которых ограничения из (I)–(2) обращаются в равенства при любом $x \in F$. При этом является множеством решений системы, полученной путем замены неравенств в системе (I), (2) равенствами для $\omega^i_{\sigma_i}$ $\forall \sigma_i \in J_{n_i-m_i}$, $\forall i \in J_s$.

б) Если для подмножеств $\omega^i_1 \subset \omega^i_2 \subset \ldots \subset \omega^i_{l_i} = N_i'$ неравенства в системе (I), (2) заменить на равенства, то множество F решений полученной системы является m-гранью $\Pi(g,H)$, где $m = m_1 + \ldots + m_s$, а

$$m_i = n_i - \left\{ l_i + \sum \left(|\omega^i_{\sigma_i}| - |\omega^i_{\sigma_i-1}| - 1 \right) \right\}$$

и суммирование ведется по всем индексам $\sigma_i \in J_{l_i}$, для каждого из которых найдется такое $j \in J_{q_i}$, что $k^i_{j-1} \le |\omega^i_{\sigma_i-1}|$ и $|\omega^i_{\sigma_i}| \le k^i_j$ (считаем, что $|\omega_0| = 0$), $\forall i \in J_s$.

Получено II.03.90

УДК 519.21

А.П.МАКАУСКАС

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАДИЕНТОВ В СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Эффективные алгоритмы локальной оптимизации, как правило, основаны на использовании градиентов целевых функций. Однако в известных статистических моделях многоэкстремальных функций учитываются лишь значения целевых функций. Интерес представляет возможность учета градиентов в статистических моделях с целью построения алгоритмов глобальной оптимизации, использующих не только значения целевых функций, но и их производные.

ISBN 5-7702-0133-9 Методы и программные средства оптимизации, моделирования и создания вычислительных систем. Киев, 1990.

СОДЕРЖАНИЕ