

2/13

ISSN 0572-2691

ОДНЫЙ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
**ПРОБЛЕМЫ  
УПРАВЛЕНИЯ И  
ИНФОРМАТИКИ**

---

<sup>+</sup>**2'2013**

**Институт кибернетики им. В.М. Глушкова  
НАН Украины**

**Институт космических исследований  
НАН Украины и ГКА Украины**

МЕЖДУНАРОДНЫЙ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

# ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ

ЧИТАЛЬНЫЙ ЗАЛ

№ 2

МАРТ – АПРЕЛЬ

2013

ОСНОВАН В ЯНВАРЕ 1956 г.  
Выходит шесть раз в год

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор  
В.М. КУНЦЕВИЧ

Заместители главного редактора:  
Н.В. ТУРОВЕРОВА  
Ю.Г. КРИВОНОС

Члены редколлегии:

В.М. БЕЛОВ  
С.Н. ВАСИЛЬЕВ (Россия)  
Ф.Г. ГАРАЩЕНКО  
В.В. ГРЫЦЫК  
В.Ф. ГУБАРЕВ  
М.З. ЗГУРОВСКИЙ  
П. ИОАННОУ (США)  
Н.Ю. КУЗНЕЦОВ  
В.Б. ЛАРИН  
Р. ОРТЕГА (Франция)  
И.В. СЕРГИЕНКО  
М. ТОМА (Германия)  
А.А. ЧИКРИЙ  
Р.М. ЮСУПОВ (Россия)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:  
03680 ГСП Киев 187,  
проспект Академика Глушкова, 40,  
корпус 4/1,  
Институт космических исследова-  
ний НАН Украины и ГКА Украины  
Тел.: 526-22-29,  
522-58-46  
E-mail: red@nonnared.kiev.ua

Редколлегия не сообщает мотивов отказа в публикации статей и оставляет за собой право не возвращать рукописи.

© Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2013

© Институт космических исследований НАН Украины и ГКА Украины, 2013

## В номере:

- К столетию со дня рождения академика НАН Украины А.Г. Ивахненко
- Методы идентификации и адаптивного управления
- Оптимальное управление и методы оптимизации
- Математическое моделирование и исследование сложных управляемых систем
- Методы обработки информации
- Космические информационные технологии и системы
- Экономические и управленческие системы
- Управление в биологических и природных системах
- Проблемы защиты информации

ПОСТУПАЮЩИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ЭКОНОМИКИ И ТОРГОВЛИ  
ИДЕНТИФИКАЦИОННЫЙ КОД 01507967  
2013 ПРОТЕКА

3

# СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>К столетию со дня рождения академика НАН Украины А.Г. Ивахненко</b>                                                                                                            |     |
| <i>Кунцевич В.М.</i> Памяти учителя и друга .....                                                                                                                                 | 5   |
| <i>Сарычев А.П.</i> Моделирование в классе систем регрессионных уравнений на основе метода группового учета аргументов .....                                                      | 8   |
| <i>Бодянский Е.В., Винокурова Е.А., Долотов А.И.</i> Самообучающаяся каскадная спайк-нейронная сеть для нечеткой кластеризации на основе метода группового учета аргументов ..... | 25  |
| <b>Методы идентификации и адаптивного управления</b>                                                                                                                              |     |
| <i>Сальников Н.Н., Сирик С.В.</i> Алгоритм оценивания параметров линейной регрессии при ограниченных помехах в измерениях всех переменных .....                                   | 35  |
| <i>Бомба А.Я., Сафоник А.П., Фурсачик Е.А.</i> Идентификация коэффициента массообменного возмущения и его учет при моделировании процесса магнитного фильтрования .....           | 49  |
| <b>Оптимальное управление и методы оптимизации</b>                                                                                                                                |     |
| <i>Емец О.А., Емец А.О., Парфенова Т.А.</i> Метод ветвей и границ для задач оптимизации на нечетких множествах .....                                                              | 55  |
| <i>Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.</i> Задача управления с неразделенными многоточечными и интегральными условиями .....                                                           | 61  |
| <i>Михайлюк В.А.</i> О сублинейных алгоритмах реоптимизации для обобщенных задач о выполнимости .....                                                                             | 78  |
| <b>Математическое моделирование и исследование сложных управляемых систем</b>                                                                                                     |     |
| <i>Раскин Л.Г., Пустовойтов П.Е.</i> Методика анализа полумарковской системы высокой размерности .....                                                                            | 86  |
| <b>Методы обработки информации</b>                                                                                                                                                |     |
| <i>Панченко Б.Е.</i> Рекурсивные связи и темпоральность в реляционном каркасе — маски сущностей-объектов .....                                                                    | 92  |
| <i>Дядьков К.В.</i> Использование непрефиксного вырожденного кода при чтении и записи информации .....                                                                            | 105 |
| <b>Космические информационные технологии и системы</b>                                                                                                                            |     |
| <i>Литвин О.Н., Матвеева С.Ю.</i> Обработка аэрокосмических снимков с помощью интерстрипации функций двух переменных .....                                                        | 111 |
| <b>Экономические и управленческие системы</b>                                                                                                                                     |     |
| <i>Бойчук М.В., Семчук А.Р.</i> Стохастическая модель полного цикла оптимальной эколого-экономической динамики .....                                                              | 125 |
| <b>Управление в биологических и природных системах</b>                                                                                                                            |     |
| <i>Островский А.В.</i> Определение вторичной структуры белков с помощью моделей Маркова .....                                                                                     | 140 |
| <b>Проблемы защиты информации</b>                                                                                                                                                 |     |
| <i>Никитенко Л.Л.</i> Встраивание данных в видео. Часть 2 .....                                                                                                                   | 148 |

# CONTENTS

## **To the 100th Anniversary of Academician of NAS of Ukraine A.G. Ivakhnenko**

|                                                                                                                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Kuntsevich V.M.</i> Dedicated to the memory of the teacher and friend .....                                                                                              | 5  |
| <i>Sarychev A.P.</i> Modeling in the class of regression equations systems<br>by the group method of data handling .....                                                    | 8  |
| <i>Bodyanskiy Ye.V., Vynokurova E.A., Dolotov A.I.</i> Self-learning cascade<br>spiking neural network for fuzzy clustering based on group method<br>of data handling ..... | 25 |

## **Methods of Identification and Adaptive Control**

|                                                                                                                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Salnikov N.N., Siryk S.V.</i> Parameter estimation algorithm of the linear<br>regression with bounded noise in measurements of all variables .....                                    | 35 |
| <i>Bomba A.Ya., Safonyk A.P., Fursachik E.A.</i> Identification of mass transfer<br>disturbance coefficient and taking it into account for magnetic filtration<br>process modeling ..... | 49 |

## **Optimal Control and Optimization Methods**

|                                                                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Iemets O.A., Yemets A.O., Parfonova T.A.</i> Branch and bound method<br>for optimization problems on fuzzy sets ..... | 55 |
| <i>Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.</i> Control problem with non-separated<br>multipoint and integral conditions .....     | 61 |
| <i>Mikhailyuk V.A.</i> On sublinear algorithms of reoptimization for constraint<br>satisfaction problems .....           | 78 |

## **Mathematical Simulation and Study of Complex Controlled Systems**

|                                                                                                        |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Raskin L.G., Pustovoitov P.Ye.</i> Analysis method of high dimension<br>semi-Markovian system ..... | 86 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## **Information Processing Methods**

|                                                                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Panchenko B.Ye.</i> Recursive relations and temporality in the relational<br>framework — the masks of entity-objects ..... | 92  |
| <i>Dyadkov K.V.</i> Usage of non-prefix degenerate code at information reading<br>and writing .....                           | 105 |

## **Space Information Technologies and Systems**

|                                                                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Lytvyn O.N., Matveeva S.Yu.</i> Aerospace pictures processing by means<br>of interstriation of functions of two variables ..... | 111 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

## **Economic and Management Systems**

|                                                                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Boychuk M.V., Semchuk A.R.</i> Stochastic model of a full cycle of the optimal<br>ecological and economic dynamics ..... | 125 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

## **Control in Biological and Natural Systems**

|                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Ostrovskiy A.V.</i> Detecting secondary structure of proteins using Markov<br>models ..... | 140 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

## **Problems of Information Protection**

|                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------|-----|
| <i>Nikitenko L.L.</i> Video data embedding. Part II ..... | 148 |
|-----------------------------------------------------------|-----|

УДК 519.85

О.А. Емец, А.О. Емец, Т.А. Парфенова

## МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ НА НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВАХ

### Введение

Задачи комбинаторной оптимизации на нечетких множествах все еще недостаточно исследованы. Количество работ в этом направлении весьма ограничено [1–12]. Практически нет методов, учитывающих специфику таких задач. В настоящей работе обосновывается общий подход в рамках метода ветвей и границ (МВГ) к решению задачи минимизации в нечеткой постановке, который иллюстрируется комбинаторной транспортной задачей на перестановках с нечеткими данными.

### Постановка задачи

Пусть  $F(x)$  — функция, определенная на множестве  $X$  ( $x \in X$ ) нечетких чисел;  $F(x) \in X$ , т.е. значение, которое она принимает, — также нечеткое число;  $D \subset X$  — множество допустимых нечетких чисел.

Используя операции из [5–12] (в том числе нахождение минимума и максимума), задачу оптимизации на множестве нечетких чисел можно сформулировать так: найти

$$\min_{x \in D} F(x). \quad (1)$$

### МВГ при оптимизации на нечетких множествах

Пусть  $S$  — некоторый список (массив),  $n_{\text{rec}}$  — переменная, обозначающая номер рассмотренного МВГ допустимого решения. Алгоритм МВГ для (1) изложен в следующих шагах.

**Шаг 0.**  $S = \emptyset$ ;  $n_{\text{rec}} = 0$ . Задание допустимой области  $D$  ( $D \neq \emptyset$ ) и целевой функции  $F$  на  $D$ .

**Шаг 1.** Разбиение множества  $D$  на подмножества  $D_1, \dots, D_n$  со свойствами  $D_i \neq \emptyset$ ;  $D_i \cap D_j = \emptyset \quad \forall i, j \in J_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$ . Множества  $D_1, \dots, D_n$  считаем неразветвленными и неотсеченными. Назовем такое множество «почкой», а свойства таких множеств — «свойствами почек».

Каждому множеству, которое не принадлежит  $S$  и является почкой, припишем оценку  $v_i(D_i) = v_i \in X$  — нечеткое число со свойством  $v_i < F(x) \quad \forall x \in D_i$ , где  $<$  — знак линейного порядка на множестве нечетких чисел  $X$  [5–12]. Допишем их в список  $S$  почек с оценками. Обозначим  $n$  количество  $|S|$  почек.

**Шаг 2.** Проверка:  $S = \emptyset$ ? Если «да» — на шаг 16. Если «нет» — на шаг 3.

**Шаг 3.** Выбираем произвольную почку  $D_i$ .

**Шаг 4.** Проверяем: количество элементов  $|D_i|$  во множестве  $D_i$  равняется единице,  $|D_i| = 1$ ? Если «да» — на шаг 5. Если «нет» — на шаг 6.

**Шаг 5.** Имеем  $|D_i| \neq 1$  (точнее, это означает  $|D_i| > 1$ ), разбиваем (разветвляем)  $D_i$  как  $D$ , переходя на шаг 1.

**Шаг 6.** Одноэлементную почку назовем «листом», т.е.  $D_i = \{x_{n_{\text{rec}}}\}$ ,  $x_{n_{\text{rec}}} \in D$ . Лист  $D_i$  исключаем из  $S$ . Вычисляем  $F_{n_{\text{rec}}} = F(x_{n_{\text{rec}}})$ , используя операции из [5–12] для нечетких чисел.

**Шаг 7.** Проверяем:  $n_{\text{rec}} > 0$ ? Если «нет» (т.е.  $n_{\text{rec}} = 0$ ), то переход на шаг 8, иначе (т.е.  $n_{\text{rec}} > 0$ ) — на шаг 14.

**Шаг 8.** Присваиваем точку, которая дает рекордное значение целевой функции, точку  $x_0$ ;  $n_{\text{rec}} = 1$ .

**Шаг 9.** Задаем  $i = 1$  (организовываем начало цикла перебора почек).

**Шаг 10.** Проверка:  $v_i < F_0$ ? Если «да» — на шаг 12, если «нет» — на шаг 11.

**Шаг 11.** Почку  $D_i$  исключаем из списка  $S$ . (Заметим, что при этом  $n$  не изменяется, оно изменится только на шаге 1.) Это означает отсечение почки  $D_i$ .

**Шаг 12.** Увеличиваем  $i$  на единицу, т.е.  $i := i + 1$ .

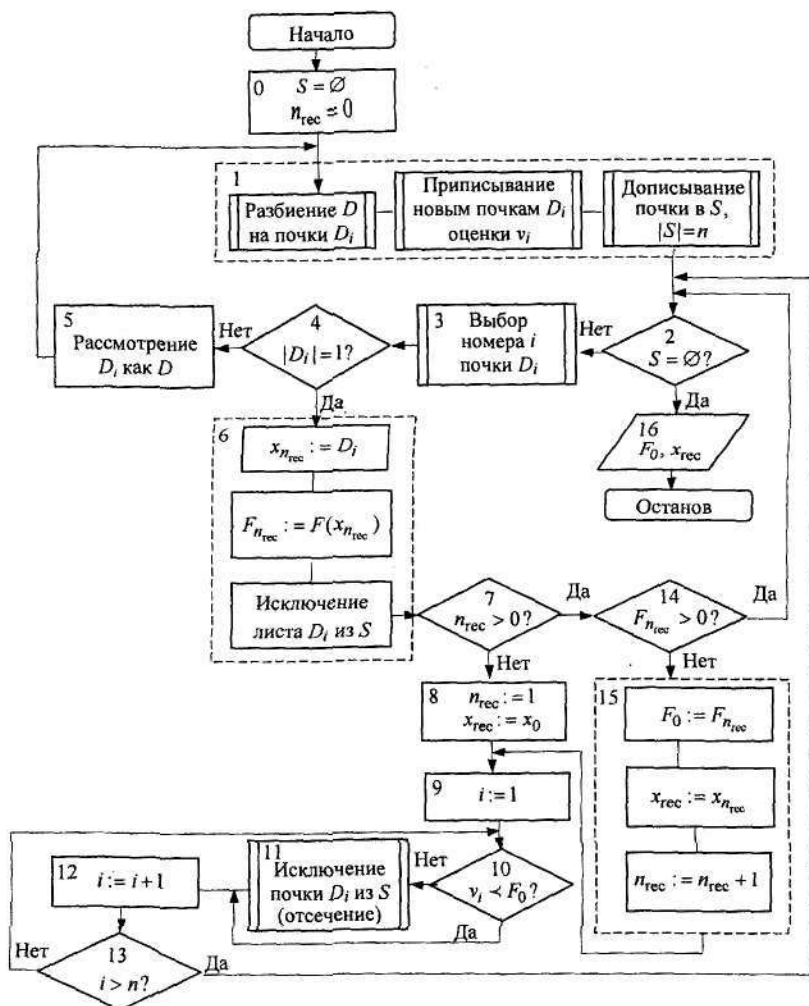
**Шаг 13.** Проверка:  $i > n$ ? Если «да» — переход на шаг 2, если «нет» — переход на шаг 10.

**Шаг 14.** Проверка:  $F_{n_{\text{rec}}} > F_0$ ? Если «да» — переход на шаг 2, если «нет» — переход на шаг 15.

**Шаг 15.** Присваиваем текущему минимуму  $F_0$  целевой функции значение  $F_{n_{\text{rec}}}$ , т.е.  $F_0 := F_{n_{\text{rec}}}$ , дальше  $x_{\text{rec}} := x_{n_{\text{rec}}}$ ;  $n_{\text{rec}} = n_{\text{rec}} + 1$ . Переход на шаг 9.

**Шаг 16.** Вывод результата: минимальное значение  $F_0$  целевой функции и точка  $x_{\text{rec}}$ , которая его доставляет. Останов.

Схема алгоритма приведена на рисунке.



*Замечание 1.* Этот алгоритм является алгоритмом МВГ вообще (т.е. для четкой или нечеткой постановки задачи (1)), если определен линейный порядок  $<$  во множестве значений целевой функции (в связи с этим в действительных числах в алгоритме имеются такие конкретизации: на шаге 14 это  $\geq$ , на шаге 10 —  $<$ ).

На эффективность МВГ существенно влияет способ ветвления допустимого множества (шаг 1 (разбиение  $D$  на почки  $D_i$ ); шаг 3 — выбор  $D_i$ ) и оценивание  $D_i$  (определение оценки на шаге 1). В силу общности задачи нет рецептов, которые действовали бы эффективно во всех случаях. Способы ветвления, отсеечения, оценивания определяются спецификой класса задач, который рассматривается. Отсечение происходит, как видно по алгоритму, по аналогии с классическим для МВГ условием: если  $v_i(D_i) < F_0$  не выполняется, то  $D_i$  отсекается.

### Решение МВГ комбинаторной транспортной задачи на перестановках (КТЗП) в нечеткой постановке

Как известно [10, 11], КТЗП в нечеткой постановке имеет вид: найти минимум

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (2)$$

при следующих условиях:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} < a_i \quad \forall i \in J_m, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} > b_j \quad \forall j \in J_n, \quad (4)$$

$$x = (x_{11}, \dots, x_{mn}) \in E_k(G). \quad (5)$$

Здесь  $c_{ij}$ ,  $a_i$ ,  $b_j$ ,  $x_{ij}$  — нечеткие числа [5–12], их минимум, сумма, произведение, линейный порядок  $<$  определены в [5–12],  $m$ ,  $n$ ,  $k$  — натуральные постоянные, а  $E_k(G)$  — множество нечетких перестановок,  $m \cdot n = k$ ,  $G = \{g_1, \dots, g_k\}$  — мультимножество возможных объемов перевозок,  $J_m = \{1, 2, \dots, m\}$ , как и раньше, — множество первых  $m$  натуральных чисел.

Заметим, что по экономическому содержанию задачи элементы носителей чисел  $c_{ij}$ ,  $a_i$ ,  $b_j$ ,  $g_l$  положительные.

Рассмотрим способ разбиения  $D$  на почки  $D_i$ . Упорядочим тарифы  $c_{ij}$ ,  $\forall i \in J_m$ ,  $\forall j \in J_n$ :

$$c_{i_1 \tau_1} > c_{i_2 \tau_2} > \dots > c_{i_k \tau_k}; \quad (6)$$

переобозначив их:

$$c_1^* > c_2^* > \dots > c_k^*. \quad (7)$$

Здесь  $i_l$  — номер строки,  $\tau_l$  — номер столбца транспортной таблицы, в которой находится тариф  $c_{i_l \tau_l} = c_l^*$ , что в упорядочении (7) расположен на  $l$ -м месте.

Пусть объемы перевозок  $g_j$ , которые составляют мультимножество  $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ , пронумерованы согласно порядку

$$g_1 < g_2 < \dots < g_k. \quad (8)$$

Для удобства дальнейшего изложения переобозначим это так:  $g_1^0 < g_2^0 < \dots < g_k^0$ ,  $G^0 = G$ .

Почки образуем в таком порядке. Множество  $D$  разбивается на подмножества согласно порядку

- $D_1$  — это подмножество  $D$ , где  $x_{i_1 j_1} = g_k^0$ ;
- $D_2 : x_{i_1 j_1} = g_{k-1}^0$ ;
- ...
- $D_i : x_{i_1 j_1} = g_{k-i+1}^0$ ;
- ...
- $D_k : x_{i_1 j_1} = g_1^0$ .

Выбор номера  $i$  почек первого уровня  $D_1, \dots, D_k$  на шаге 3 МВГ происходит последовательно: от 1-й до  $k$ -й.

Если выбрана почка первого уровня  $D_i = D_{\tau_1}$ , то на шаге 5 она рассматривается как  $D$ . Это означает следующее. Образуется разность мультимножества  $G$  и  $\{g_{k-i+1}^0\}$ , которая используется в качестве  $G^1 = G^0 - \{g_{k-i+1}^0\}$ , где  $G^1 = \{g_1^1, \dots, g_{k-1}^1\}$ , и элементы в  $G^1$  пронумерованы так:  $g_1^1 < \dots < g_{k-1}^1$ . Образование почек второго уровня упорядочено следующим образом:

- $(D_{\tau_1})_1 = D_{\tau_1 1}$  — подмножество множества  $D_{\tau_1}$ , в котором  $x_{i_2 j_2} = g_{k-1}^1$ ;
- $(D_{\tau_1})_2 = D_{\tau_1 2}$  — подмножество множества  $D_{\tau_1}$ , в котором  $x_{i_2 j_2} = g_{k-2}^1$ ;
- ...
- $D_{\tau_1 \tau_2}$  — подмножество множества  $D_{\tau_1}$ , в котором  $x_{i_2 j_2} = g_{k-\tau_2}^1$ ;
- ...
- $D_{\tau_1 (k-1)} : x_{i_2 j_2} = g_1^1$ .

Выбор номера  $\tau_2$  почек второго уровня  $D_{\tau_1 \tau_2}$  на шаге 3 МВГ осуществляется последовательно: от  $\tau_2 = 1$  до  $\tau_2 = k-1$ .

Если на шаге 1 выбрана почка  $r$ -го уровня  $D_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r}$ , которая на шаге 5 рассматривается как  $D$ , то это означает следующее. Образуется разность мультимножеств  $G^{r-1}$  и  $\{g_{k-r+1}^{r-1}\}$ , т.е.  $G^r = G^{r-1} - \{g_{k-r+1}^{r-1}\}$ , где  $G^r = \{g_1^r, \dots, g_{k-r}^r\}$ , и элементы  $G^r$  упорядочены так:  $g_1^r < \dots < g_{k-r}^r$ .

Образование почек  $(r+1)$ -го уровня упорядочено следующим образом:

- $(D_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r})_1 = D_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r 1}$  — подмножество  $D_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r}$ , когда  $x_{i_{r+1} j_{r+1}} = g_{k-r}^r$ ;
- $(D_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r})_2 = D_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r 2} : x_{i_{r+1} j_{r+1}} = g_{k-r-1}^r$ ;
- ...
- $D_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r \tau_{r+1}} : x_{i_{r+1} j_{r+1}} = g_{k-r-\tau_{r+1}+1}^r$ ;
- ...
- $D_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r (k-r)} : x_{i_{r+1} j_{r+1}} = g_1^r$ .

Ясно, что уровней почек не больше, чем  $k$ , а некоторые почки будут пустыми, поскольку для них может не выполняться одно из ограничений в (3).

**Замечание 2.** Вместо (6)–(8) можно использовать любой линейный порядок на множестве тарифов объемов перевозок.

**Замечание 3.** Легко видеть, что для нечетких чисел с дискретным носителем [5–9, 12] и суммой из [5–9, 12] пустую почку можно отсекают, т.е. если  $(a+b) < (a+b)+c$ , и если  $d = \{(d_1 | \mu_1), \dots, (d_t | \mu_t)\} \forall i \in J_t \ d_i \geq 0$ , то

$$(a+b) < (a+b)+c+d. \quad (9)$$

Другими словами, если условие (3) на некотором уровне для почки не выполнялось, то оно не выполнится для почек, которые образованы разбиением этой почки (на дальнейших уровнях).

Опишем вычисление оценки подмножества  $D_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r}$  — почки  $r$ -го уровня. Если данные — действительные числа, свойством оценки  $\xi(D)$  подмножества  $D$ , которая обеспечивает работу МВГ, является следующее: если  $D_i \subset D$ , то  $\xi(D_i) \geq \xi(D)$ .

**Теорема 1.** Если  $D_{i_1} \supset D_{i_2} \supset \dots \supset D_{i_n} = \{x\}$ , т.е.  $|D_{i_n}| = 1$ , а функционал  $\xi$ , который задан на множествах  $D_{i_1}, \dots, D_{i_n}$ , такой, что  $\xi(D_{i_n}) = \xi(x) = F(x)$ ,  $\xi(D_{i_j}) < \xi(D_{i_{j+1}})$ ,  $\forall j \in J_{n-1}$ , то значение функционала  $\xi(D)$  может быть оценкой допустимого подмножества в МВГ.

*Доказательство.* Из того, что  $\xi(D_{i_j}) < \xi(D_{i_{j+1}})$   $\forall j \in J_{n-1}$  и  $\xi(D_{i_n}) = \xi(x) = F(x)$ , следует  $\xi(D_{i_j}) < F(x)$   $\forall x \in D_{i_j}$   $\forall j \in J_n$ , что и нужно доказать.

**Теорема 2.** Если  $c_\tau = \{(c_1^\tau | \mu_1^{c_\tau}), \dots, (c_k^\tau | \mu_k^{c_\tau})\}$ ,  $g_t = \{(g_1^t | \mu_1^{g_t}), \dots, (g_l^t | \mu_l^{g_t})\}$ , где  $c_i^\tau \geq 0$   $\forall i \in J_n$ ;  $g_j^t \geq 0$   $\forall j \in J_l$ , то оценкой  $\xi(D)$  множества  $D$  в МВГ может служить число  $H(C)$  — характеристический сравнитель [7] нечеткого числа  $C$ , где

$$C = \sum_{x \in G^B} c_j x_j^B \quad (10)$$

— значение части целевой функции, т.е. тех ее слагаемых, в которых определены переменные.

*Доказательство.* В соответствии с формулировкой теоремы в доказательстве нечеткие числа считаются нечеткими числами с дискретным носителем. Пусть  $a$ ,  $b$  — два таких нечетких числа (с дискретным носителем). Если  $a < b$ , то  $H(a) \leq H(b)$  (см. утверждение 7 из [7]).

Если  $a < b$ , то  $a < b + c$  при  $c = \{(c_1 | \mu_1), \dots, (c_k | \mu_k)\}$  и  $c_i \geq 0$   $\forall i \in J_k$  (см. теорему 2 из [12]).

Докажем, что за оценку можно взять характеристический сравнитель  $H(C)$ . Подмножество следующего уровня в МВГ дает еще одно слагаемое в определившуюся часть целевой функции — пусть это  $\Delta C = c_\tau g_t$  (заметим, что  $c_\tau = \{(c_1^\tau | \mu_1^{c_\tau}), \dots, (c_k^\tau | \mu_k^{c_\tau})\}$ ,  $g_t = \{(g_1^t | \mu_1^{g_t}), \dots, (g_l^t | \mu_l^{g_t})\}$ , где  $c_i^\tau \geq 0$   $\forall i \in J_n$ ;  $g_j^t \geq 0$   $\forall j \in J_l$ ).

Докажем, что  $H(C) \leq H(C + \Delta C)$ . Очевидно,  $C < C + \Delta C$ . Доказано такое свойство характеристического сравнителя (см. утверждение 7 из [7]): если  $a < b$ , то  $H(A) \leq H(B)$ , т.е.  $H(C)$ , где  $C$  — это (10) — «частичное» значение целевой функции, которое определяет подмножество  $D$ , имеет свойство функционала  $\xi(D) = H(C)$  и согласно теореме 1 является оценкой подмножества  $D$ , что и нужно было доказать.

*Замечание 4.* Рассмотренное оценивание допустимых множеств может использоваться как при решении КТЗП, так и в общей задаче (1), поскольку не использует конкретной постановки задачи, в частности, что  $D$  — подмножество нечетких перестановок [5], как в КТЗП.

### Обоснование МВГ для задачи (1)

**Теорема 3.** Изложенный МВГ применительно к задаче (1) дает ее решение, которым выступает  $F_0$  — значение целевой функции и  $x_{\text{гес}}$  — точка, в которой оно достигается.

*Доказательство.* Согласно шагу 11 из рассмотрения исключают только почки  $D_i$ , в которых не выполняется условие  $v_i(D_i) < F_0$ .

Если  $F_{n_{\text{rec}}} < F_0$ , то на шаге 15  $F_0$  обновляется и становится равным  $F_{n_{\text{rec}}}$ , что достигается в точке  $x_{\text{rec}}$ .

Следовательно, в силу свойства оценки  $v(D) < F(x) \quad \forall x \in D$ , цепочки  $F_1 > \dots > F_{n_{\text{rec}}}$  и правила отсечения  $v_i(D_i) < F_0$  имеем:  $F_{n_{\text{rec}}} < F(x) \quad \forall x \in D$ , что и нужно было доказать.

### Заключение

Предложен алгоритм МВГ для задачи минимизации в нечеткой постановке. Проиллюстрировано применение МВГ к КТЗП с нечеткими данными.

В дальнейших исследованиях целесообразно провести числовые эксперименты по этому методу для определения рамок его практического применения.

*О.О. Ємець, Ол-ра О. Ємець, Т.О. Парфенова*

## МЕТОД ГІЛОК ТА МЕЖ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА НЕЧІТКИХ МНОЖИНАХ

Запропоновано алгоритм методу гілок та меж для задачі мінімізації в нечіткій постановці. Проілюстровано застосування методу гілок та меж до комбінаторної транспортної задачі на переставленнях з нечіткими даними.

*O.A. Iemets, A.O. Yemets, T.A. Parfenova*

## BRANCH AND BOUND METHOD FOR OPTIMIZATION PROBLEMS ON FUZZY SETS

The algorithm of branch and bound method for the minimization problem in the fuzzy setting is proposed. The use of branch and bound method for combinatorial transportation problem on permutations with fuzzy data is shown.

1. Сергиенко И.В., Парасюк И.Н., Кастущик М.Ф. Об одной нечеткой задаче многопараметрического выбора оптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 2. — С. 3–15.
2. Сергиенко И.В., Кастущик М.Ф. Применение понятий размытой математики для формализации и решения комбинаторных оптимизационных задач // Там же. — 1995. — № 2. — С. 158–162.
3. Серая О.В. Нечеткая задача коммивояжера // Математическое моделирование. — 2007. — № 2 (17). — С. 13–15.
4. Роскладка А.А., Емец О.О. Решение одной комбинаторной задачи упаковки с учетом неопределенности данных, описанной нечеткими числами // Радиоэлектроника и информатика. — 2007. — № 2. — С. 132–141.
5. Ємець Ол-ра О. Одна задача упаковки як комбінаторна оптимізація на нечіткій множині розбиттів і її розв'язування // Там же. — 2007. — № 4. — С. 150–160.
6. Емец О.А., Роскладка А.А. О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 5. — С. 35–44.
7. Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Операції та відношення над нечіткими числами // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2008. — № 5. — С. 39–46.
8. Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Побудова математичної моделі однієї комбінаторної задачі упаковки прямокутників з нечіткими розмірами // Там же. — 2008. — № 6. — С. 25–33.
9. Донець Г.А., Емец А.О. Постановка и решение задачи о рюкзаке с нечеткими данными // Проблемы управления и информатики. — 2009. — № 5. — С. 65–76.
10. Ємець О.О., Парфенова Т.О. Транспортна задача на переставленнях та її розв'язування: чітка та нечітка постановки. — <http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/Yemets.pdf>.
11. Емец О.А., Парфенова Т.А. Операции над нечеткими числами с носителем мощности континуум для моделирования в комбинаторной оптимизации // Международный научнотехнический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2010. — № 2. — С. 86–101.
12. Ємець Ол-ра О. Деякі властивості операції суми та лінійного порядку для нечітких чисел з дискретним носієм // Праці міжнародної молодіжної математичної школи «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII)». — Київ: ІК НАНУ, 2011. — С. 62–63.

Получено 18.10.2011

УДК 519.85

**Метод ветвей и границ для задач оптимизации на нечетких множествах /** Емец О.А., Емец А.О., Парфенова Т.А. // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2013. — № 2. — С. 55–60.

Предложен алгоритм метода ветвей и границ для задачи минимизации в нечеткой постановке. Показано применение метода ветвей и границ к комбинаторной транспортной задаче на перестановках с нечеткими данными.

Ил. 1. Библиогр.: 12 назв.

УДК 517.977.58

**Задача управления с неразделенными многоточечными и интегральными условиями /** Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2013. — № 2. — С. 61–77.

Исследуются задачи оптимального управления с неразделенными многоточечными и интегральными условиями. Для численного решения задачи предлагается использовать методы оптимизации первого порядка с применением полученных в работе формул градиента функционала. Для решения прямой и сопряженной краевых задач предложен подход, основанный на операции свертывания интегральных условий в неразделенные локальные и последовательного их сдвига, являющегося аналогом переноса условий. Этот подход позволил свести решение исходных краевых задач к решению вспомогательных задач Коши и системы линейных алгебраических уравнений. Приводятся результаты экспериментов.

Табл. 2. Библиогр.: 23 назв.

УДК 519.854

**О сублинейных алгоритмах реоптимизации для обобщенных задач о выполнимости /** Михайлюк В.А. // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2013. — № 2. — С. 78–85.

Для решения задачи Ins- $\Lambda$ -CSP (реоптимизация  $\Lambda$ -CSP при добавлении одного ограничения) существует оптимальный приближенный алгоритм с аддитивной ошибкой с константной сложностью. При этом отношение аппроксимации алгоритма зависит от целочисленного разрыва LP-релаксации исходной задачи.

Библиогр.: 12 назв.

УДК 681.324

**Методика анализа полумарковской системы высокой размерности /** Раскин Л.Г., Пустовойтов П.Е. // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2013. — № 2. — С. 86–91.

Предложена методика анализа полумарковской системы высокой размерности, основанная на технологии фазового укрупнения состояний системы. Описана итерационная процедура, реализующая методику. Предложенный декомпозиционный подход позволяет исходную сложную задачу свести к решению последовательности существенно более простых.

Библиогр.: 8 назв.

УДК 004.652

**Рекурсивные связи и темпоральность в реляционном каркасе — маски сущностей-объектов /** Панченко Б.Е. // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2013. — № 2. — С. 92–104.

В соответствии с новой моделью данных — реляционным каркасом — неформально описан алгоритм учета рекурсивных связей сущностей-объектов в предметной области. Алгоритм применяется для более точного проектирования схем реляционных баз данных (БД). Для этого предложен механизм каркасного синтеза частичных копий атрибутов, участвующих в разных ролях сущностей-объектов. Предлагается также новый подход к моделированию темпоральных данных. Приводятся результаты численного эксперимента доступа к БД.

Табл. 1. Ил. 2. Библиогр.: 30 назв.