

**ACADEMIA DE TRANSPORTURI,
INFORMATICĂ ȘI COMUNICAȚII**

**INSTITUTUL DE CIBERNETICĂ
ACADEMIA NAȚIONALĂ DE ȘTIINȚĂ A UCRAINEI**

**ACADEMIA DE STUDII
ECONOMICE DIN MOLDOVA**

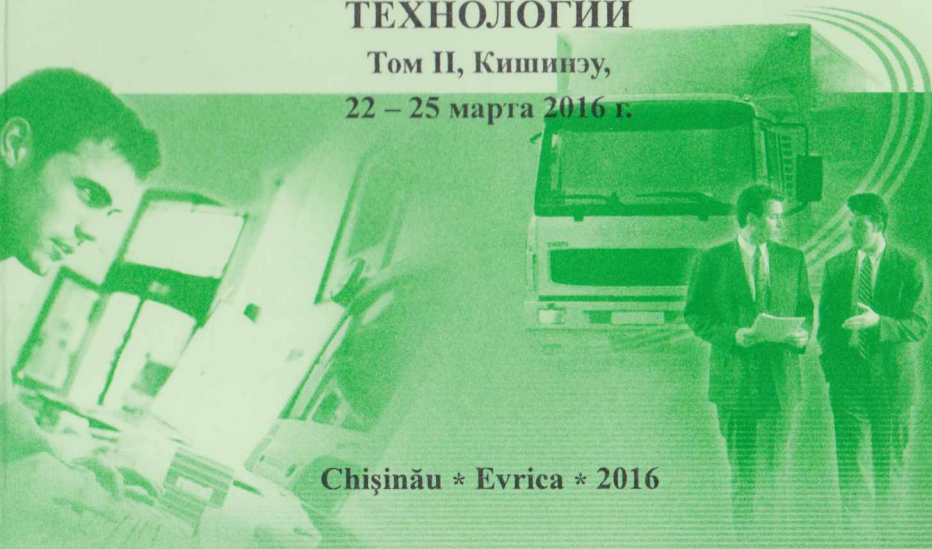
MODELARE MATEMATICĂ, OPTIMIZARE ȘI TEHNOLOGII INFORMAȚIONALE

**Materialele Conferinței Internaționale
Volumul II, Chișinău,
22 – 25 martie 2016
EDIȚIA A V-A**

**Материалы 5-й международной конференции
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ,
ОПТИМИЗАЦИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ**

**Том II, Кишинэу,
22 – 25 марта 2016 г.**

Chișinău * Evrica * 2016



**ACADEMIA DE TRANSPORTURI,
INFORMATICĂ ȘI COMUNICAȚII**

**INSTITUTUL DE CIBERNETICĂ
ACADEMIA NAȚIONALĂ
DE ȘTIINȚĂ A UCRAINEI**

**ACADEMIA DE STUDII
ECONOMICE DIN MOLDOVA**

**MODELARE MATEMATICĂ,
OPTIMIZARE ȘI TEHNOLOGII
INFORMAȚIONALE**

**Materialele Conferinței Internaționale
Volumul II, Chișinău,
22 – 25 martie 2016
EDIȚIA A V-A**

Материалы 5-й международной конференции

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ,
ОПТИМИЗАЦИЯ И
ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

**Том II, Кишинэу,
22 – 25 марта 2016**

Chișinău • Evrica • 2016

519.711+004(082)=161.1

M 84

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

"Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale", conferința internațională (5 ; 2016 ; Chișinău). Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale = Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии : Materialele conferinței Internaționale, ed. a 5-a, Chișinău, 22-25 mar. 2016 / red. resp.: Dumitru Solomon ; col. red.: Dumitru Lozovanu [et. al.]. – Chișinău : Evrica : ATIC, 2016 (Tipografia AȘM). – . – ISBN 978-9975-62-364-3.

Vol. 2. – 2016. – 412 p. – Antetit.: Acad. de Transporturi, Informatică și Comunicații, Inst. de Cibernetică, Acad. Naț. de Știință a Ucrainei [et. al.]. – Tit. paral.: lb. rom., rusă. – Text : lb. rusă. – 150 ex. – ISBN 978-9975-3099-9-8.

519.711+004(082)=161.1

M 84

Prezenta lucrare conține articole științifice din domeniul modelării matematice, metodelor de optimizare, controlului optimal și tehnologiilor informaționale cu aplicații în tehnologia, economia și managementul transporturilor.

Redactorul responsabil:

Dumitru SOLOMON, Dr. hab., Prof. univ., ATIC, Chișinău, Moldova

Colegiul de redacție:

Dumitru LOZOVANU, Dr. hab., Prof. univ., IMI AȘM, Chișinău,

Ion BOLUN – Dr. Hab., Prof. univ., ASEM, Chișinău,

Petru STEȚIU – Dr. Hab., Prof. univ., ANȘU, Kiev

Anatol GODONOAGĂ – Dr., Conf. univ., ASEM, Chișinău,

Sergiu CATARANCIUC, Dr.hab., Prof.univ., USM, Chișinău,

Boris CIUMACOV – IC ANȘU, Kiev

M-208-96

ISBN 978-9975-3099-9-8

© Editura Evrica, 2016

© ATIC, 2016

C U P R I N S

1. АБАШИДЗЕ И.Н. Пройодимостъ трехзвенных магистральных автопоездов.....	11
2. АРАЛОВА Н.И., МАШКИН В.И., МАШКИНА И.В. Надежность работы операторов системы человек-машина в условиях повышенного ситуационного напряжения и температурных колебаний окружающей среды. Исследования на математической модели	22
3. АРТАМОНОВ И. М., РАЗГУЛЯЕВ В. Ю. Модель для определения точки возобновления запаса.....	32
4. БАРДАДЫМ Т.А. Теоретические аспекты институциональных и технологических изменений в экономике	37
5. БЕЛОЗЕРОВ В.Е., ЗАЙЦЕВ В.Г. Рекуррентный анализ некоторых хаотических аттракторов в трехмерном пространстве	41
6. БЕРЕЗОВСКИЙ О.А. Критерии равенства решений квадратичных экстремальных задач и их SDP-релаксаций	43
7. БЫЧКОВ И.В., ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И., МОКРЫЙ И. В. Оценка параметров экспоненциального закона распределения на основе вычислительных экспериментов.....	47

17. ДОНЕЦ Г.А.	
Решение задачи о математическом сейфе на матрицах с простым числом состояний	129
18. ДОЦЕНКО С.И.	
Моделирование оптимальных стратегий проведения аукционов.....	145
19. ЕМЕЛИЧЕВ В.А., МЫЧКОВ В.И.	
Устойчивость многокритериальной инвестиционной задачи с обобщенными критериями эффективности портфеля	147
20. ЕМЕЦ О.А., БАРБОЛИНА Т.Н.	
Решение задач комбинаторной оптимизации дробно-линейных функций на размещениях методом построения лексикографической эквивалентности	152
21. ЕМЕЦ О.А., ЕМЕЦ Е.М., ЕМЕЦ А.О.	
Свойства задач комбинаторной оптимизации на разбиениях: деревья эвклидовых разбиений.....	161
22. ЖУРБЕНКО Н.Г.	
Использование агрегатных ε –субградиентов в алгоритме Поляка	167
23. ЗАЙЦЕВА Т.А., ГОРБЕНКО А.В.	
Использование информационных технологий для разработки мультиплатформенного коммуникационного мобильного приложения	175
24. ЗАЙЦЕВА Т.А., ГРИМАНОВ М.А.	
Разработка программного обеспечения для автоматизации проверки знаний в учебном процессе	177

СВОЙСТВА ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА РАЗБИЕНИЯХ: ДЕРЕВЬЯ ЕВКЛИДОВЫХ РАЗБИЕНИЙ

О.А. ЕМЕЦ,

Е.М. ЕМЕЦ,

А.О. ЕМЕЦ

Полтавский университет

экономики и торговли

Полтава, Украина

yemetsli@ukr.net

Излагается связь некоторых видов деревьев и евклидовых комбинаторных множеств разбиений, а также получен ряд свойств этого множества.

Ключевые слова: разбиения, деревья, евклидовые комбинаторные множества.

Исследования задач комбинаторной оптимизации (см., в частности [1-8]) имеет два аспекта: исследование свойства целевых функций и исследование допустимой области, которая зависит от некоторого комбинаторного множества. Важными объектами исследований есть задачи оптимизации на сочетаниях и размещениях (см. [1, 3, 4] и др.). Поэтому исследование евклидовых множеств сочетаний и разбиений является актуальной задачей (см., например, [1-4]). При исследовании комбинаторных конфигураций используются графовые модели (см., например, [5-8], где рассматриваются графы перестановок и размещений). В [8] использовано дерево для подсчета количества элементов общего множества размещений.

Для разбиений авторам не известны графовые модели.

Работа посвящена связи некоторых видов деревьев и евклидовых комбинаторных множеств разбиений, а также получения ряда свойств множества разбиений с использованием изучения этих графов.

Рассмотрим упорядоченную k -выборку элементов из мультимножества Z , обозначим эту выборку $x_1 + \dots + x_N = N$.

Пусть

$$x_1 + \dots + x_k = N, \quad (1)$$

где $x_i \geq 0$, а числа x_i , N – целые. Т.е. рассмотрим разбиение N на целые слагаемые $x_1, \dots, x_k$ из Z , т.е. $Z = \{N^1, N-1^1, \dots, 1^N, 0^{N-1}\} = \{e_1^{\eta_1}, \dots, e_i^{\eta_i}, \dots, e_N^{\eta_N}, e_{N+1}^{\eta_{N+1}}\}$; основание $Z: S(Z) = (e_1, \dots, e_N, e_{N+1})$, в которой $e_1 = N$, $e_2 = N-1$, ..., $e_i = N+1-i$, ..., $e_N = 1$, $R_{\eta_i}^k(Z)$, а кратности $\eta_1, \dots, \eta_N, \eta_{N+1}$ составляют кортеж – первичную спецификацию $Z: [Z] = (\eta_1, \dots, \eta_N, \eta_{N+1})$.

Ясно, что кратность ноля $\eta_{N+1} = N-1$; $\eta_1 = 1$; очевидно

$$(N+1-i) \cdot \eta_i \leq N, \quad (N+1-i) \cdot (\eta_i + 1) > N,$$

причем для выполнения (1) кратность η_i в первой формуле – это максимально возможное для выполнения этого неравенства натуральное число. Имеем из двух неравенств:

$$i-1 < (N-i+1) \cdot \eta_i \leq N,$$

$$\frac{i-1}{N-i+1} < \eta_i \leq \frac{(N-i+1)+i-1}{N-i+1} = 1 + \frac{i-1}{N-(i-1)}$$

или
$$\frac{i}{N-i} < \eta_{i+1} \leq 1 + \frac{i}{N-i}, \quad 0 \leq i \leq N-1.$$

А поскольку η_{i+1} – максимально возможное целое, то

$$\eta_{i+1} = \left\lceil 1 + \frac{i}{N-i} \right\rceil, \quad \eta = \eta_1 + \dots + \eta_n, \quad (2)$$

где $[a]$ – целая часть числа η_i .

Пусть
$$x_i \in Z = \{N^1, (N-1)^1, \dots, e_{i+1}^{\left\lceil 1 + \frac{i}{N-i} \right\rceil}, \dots, 2^{\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil}, 1^N, 0^{N-1}\}.$$

Назовем $x = (x_1, \dots, x_k)$ – k -составным упорядоченным разбиением (или композицией) натурального N (т.е. состоящего точно из k частей, может быть и нулевых):

$$x_1 + \dots + x_k = N.$$

Понятно, что x – это k -размещение с дополнительным условием (1).

Если в композиции нет нулей, то общее количество композиций с $1, 2, \dots, N$ частями, как известно, равно 2^{N-1} .

Если порядок слагаемых в (1) роли не играет, то наложим на элементы $x_1, \dots, x_k$ условие

$$x_1 \geq \dots \geq x_k \geq 0. \quad (3)$$

При этом вектор $x = (x_1, \dots, x_k)$ является евклидовым k -сочетанием [2] с дополнительным условием (1). Вектор x , удовлетворяющий (1), (3), назовем k -составным (т.е. состоящим точно из k частей, может быть и нулевых) разбиением (неупорядоченным, т.е. порядок не значим и используется в виде (3)).

Рассмотрим множество $R_{\eta n}^k(Z)$ k -составных (неупорядоченных) разбиений, где $\eta = \eta_1 + \dots + \eta_n$, а η_i вычисляется по формуле (10), $n = N+1$; $k = N$.

Поставим во взаимно однозначное соответствие k -составное разбиение из $R_{\eta n}^k(Z)$ (далее k -разбиение) и k -сочетание из $S_{\eta n}^k(G)$.

Пусть $G = Z$, $x = (x_1, \dots, x_k)$, выполняется условие (3). Тогда, очевидно $S_{\eta n}^k(Z) = S_{\eta n}^k(G)$, т.е. k -сочетания из Z и из G — это одни и те же сочетания.

Ограничим в $S_{\eta n}^k(G)$ параметры множества и его элементов так: $n = N+1$; $k = N$, $\eta = \eta_1 + \dots + \eta_n$, где η_i вычисляется по формуле (2), а для $x = (x_1, \dots, x_k) \in S_{\eta n}^k(G)$, пусть выполняется условие (1).

При таких ограничениях $S_{\eta n}^k(Z) = R_{\eta n}^k(Z)$, т.е. множество разбиений $R_{\eta n}^k(Z)$ можно представлять так же как и множество сочетаний деревом с одним отличием: новая ветвь (подветвь) дерева образуется в случае, если не нарушается условие (1) и ребро в ветви берется такое, что не нарушает (1) (см. рис. 1).

Как известно, количество разбиений числа N может быть подсчитано как коэффициент при q^N ряда: $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q)^i}$.

Вместе с тем, поскольку множество разбиений $R_{\eta n}^k(Z)$ является множеством листьев дерева разбиений, то интересно было бы,

записать формулу подсчета листьев таких деревьев.

Если рассматривать k -составные упорядоченный разбиения, т.е. композиции, то мы имеем $R_{\eta}^k(Z)$ при условии (1), но условие (3) может и не выполняться. Это значит, что $R_{\eta}^k(Z) = E_{\eta}^k(Z)$ – множество k -размещений [1 – 3, 8], для которых выполняется условие (1).

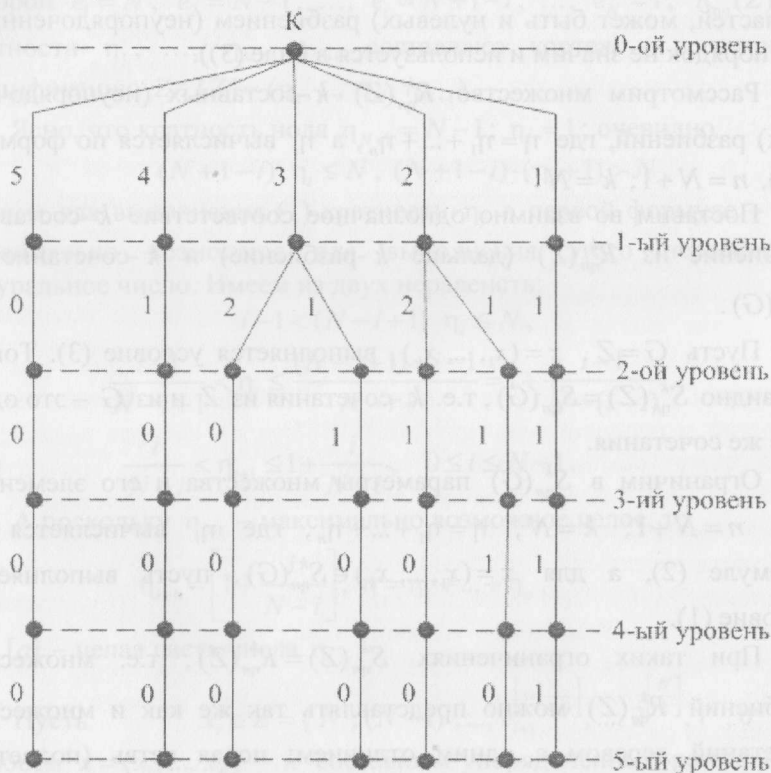


Рис. 1. – Дерево разбиений, $N = 5$

Таким образом, это множество можно изображать деревьями k -размещений [8] с одним отличием: $x_1 + \dots + x_N = N$, т.е. при построение дерева ветви (подветви) образуются, если условие (1) не нарушается.

Это позволяет, обосновать такое утверждение.

Теорема. Количество $|R_{n,N+1}^k(Z)|$ композиций числа N вычисляется по формуле

$$|R_{n,N+1}^k(Z)| = \sum \frac{N!}{V_1! V_2! \dots V_{N+1}!},$$

где суммирование ведется по всем целым неотрицательным решениям $(V_1, \dots, V_{N+1})$ уравнения $V_1 + \dots + V_{N+1} = N$ при условиях,

что $x_1 + \dots + x_N = N$ и что $0 \leq V_i \leq \left[1 + \frac{i-1}{N-i+1} \right] \quad \forall 1 \leq i \leq N;$

$0 \leq V_{N+1} \leq N-1.$

Целесообразно продолжить исследование взаимосвязи комбинаторных множеств и графов для использования при решении задач комбинаторной оптимизации.

Литература

1. Емец О. А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: Учеб. пособие / О. А. Емец. – К.: УМК ВО, 1992. – 92 с. – Режим доступа: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/489>.
2. Ємець О. О. Дискретна математика: Навч. посібник. Вид. 2-ге, допов. / О.О. Ємець, Т.О. Парфьонова. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2009. – 287 с. – Режим доступу: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/552>.
3. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К.: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487>.
4. Ємець Ол-ра О. Одна задача упакування як комбінаторна оптимізація на нечіткій множині розбиттів і її розв'язування / Ол-ра О. Ємець // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 4. – С. 150-160. – Режим доступу: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/2582>.
5. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов / А. Ф. Новиков. – Спб.: Питер, 2013. – 432 с.

6. Ємець О.О. Ізоморфізм Бовмана між графами і переставленнями та його використання для побудови предфрактальних переставних конфігурацій / О.О. Ємець, О.В. Тур // Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНЕМ-2011): Матеріали Всеукраїн. наук. семінару 26-27 серпня 2011 року. – Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. – С. 57-62. – Режим доступу:
<http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/1023>.
7. Ємець О.О. Про ізоморфізм розміщень без повторень і графів для утворення комбінаторних предфракталів / О.О. Ємець, О.В. Тур // Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта: Материалы международ. науч. конф. (Евпатория 27-31 мая, 2012). Херсон: ХНТУ. – 363-364 с.
8. Ємець О. О. Про кількість елементів в загальних множинах розміщень та полірозміщень / О. О. Ємець, Т. В. Чілікіна // Інформатика та системні науки (ІСН-2013): Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Полтава, 21-33 березня 2013 р.). – Полтава: ПУЕТ, 2013. – С. 117-125. – Режим доступу:
<http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/1619>.