Донецький національний університет

ПРИКЛАДНА СТАТИСТИКА АКТУАРНА ТА ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Заснований у 2000 році
видається двічі на рік

2011 рік
№1-2

Донецьк 2011

Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика: Наук. журнал / Донецький нац. ун-т. – 2011. - №1-2. – 208 с.

Журнал "Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика" приймає оригінальні статті та короткі повідомлення про математичне моделювання та керування різноманітними процесами природознавства, техніки та економіки, страхування, інвестування, фінансування, особливо в тих галузях, що спираються на стохастичні методи. Чекаємо на теоретичні дослідження, а також на статті про практичні засоби та алгоритми розв'язування задач. Усі статті рецензуються.

Свідоцтво про реєстрацію серія КВ № 16146-4618 ПР.

Друкується за рішенням Вченої Ради Донецького національного університету
Протокол №10 от 25.11.2011

Адреса редколегії: кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, ДонНУ, вул. Університетська 24, Донецьк 83055, Україна.
Тел.: +38 (0622) 302-92-45, 302-92-36
E-mail: artyombayev@rambler.ru

Applied statistics. Actuarial and financial mathematics: Scientific Journal / Donetsk National University. – 2011. - №1-2. – 208 p.

Journal "Applied statistics. Actuarial and financial mathematics" will accept for publication original articles and short reports devoted to mathematical modeling, control of different natural, economic, technical, insurance, investment and financial processes especially in the domains based on stochastic methods. You are most welcome to submit results theoretical studies as well as articles on practical methods and algorithms for solution of problems. All articles will be revised.

Registration series КВ № 16146-4618 ПР

Printed by Authority of Academic Council of Donetsk National University
Protocol №10 от 25.11.2011

Contact Edit. Board at: Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Donetsk National University, Universitetskaya st. 24, Donetsk 83055, Ukraine.
Call us: +38 (0622) 302-92-45, 302-92-36
E-mail: artyombayev@rambler.ru

ЗМІСТ

Актуарна та фінансова математика

Прикладна статистика

Стохастичні диференційні рівняння та їх застосування при моделюванні динамики реальних процесів

CONTENTS

Applied Statistics

Stochastic Differential Equations and their Applications in Modeling Dynamics of Real Processes

Mathematical Modeling and Control in Economic Systems

Theory Uncertainties

Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. №1-2, 2011, С. 158-167
№ 1-2 2011
Applied Statistics. Actuarial and Financial Mathematics. №1-2, 2011, P. 158-167

ОДИН АЛГОРИТМ ДЛЯ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ НЕЧЕТКИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

УДК 519.85

Донец Г.А., Емец А. О.

Резюме. Розглянута одна задача евклідової комбінаторної нечіткої оптимізації – задача упакування прямокутників з довжинами, що задані нечіткими множинами. Для поставленої задачі запропоновано евристичний алгоритм розв'язування задачі. Знайдена оцінка евристичного алгоритму і оцінена ефективність методу.

Резюме. Рассмотрена одна задача евклидовой комбинаторной нечеткой оптимизаций – задача упаковки прямоугольников с длинами, заданными нечеткими множествами. Для поставленной задачи предложен эвристический алгоритм решения задачи. Найдена оценка эвристического алгоритма и оценена эффективность метода.

Abstract. The one problem of the Euclidian combinatorial uncertain optimization - the problem of packing rectangles with the given by fuzzy sets length - is considered. The heuristic algorithm for the decision of the given problem is proposed. The estimate of the heuristic algorithm is found and the efficiency of the method is evaluated.

Received/ Надійшла до редакції 15.07.2011.

Ключові слова: комбінаторна оптимізація, нечіткі множини, евристичний алгоритм.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, нечеткие множества, эвристический алгоритм.

Keywords: combinatorial optimization, fuzzy sets, heuristic algorithm.

Введение. С развитием теории евклидовой комбинаторной оптимизации (см., в частности, [1-4]) все большую роль приобретают задачи в условиях неопределенности (см, напр., [5-7]), в частности, когда определенность описывается нечеткими множествами. В работе для одной задачи евклидовой комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности, заданной нечеткими множествами, предлагается использовать эвристический алгоритм, для которого дается оценка сложности и проводится численный анализ точности и эффективности.

Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу упаковки прямоугольников: есть некоторая полубесконечная (достаточно длинная) полоса, которая разделена на m полосок одинаковой ширины h (рис. 1).

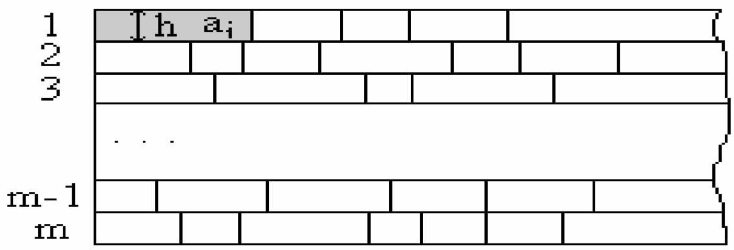

Рис. 1 . Иллюстрация задачи упаковки прямоугольников

Задано еще p прямоугольников, длины которых -- нечеткие числа $w_1,\ldots,w_p$ (см., напр., [5]), ширина h -- четкое число. Задача состоит в размещении прямоугольников без наложений в полосе в ее начале таким образом, чтобы длина занятой части полосы была минимально возможной.

Под длиной занятой части полоски будем понимать суму длин прямоугольников, которые размещаются в этой полоске. Среди этих сумм выберем наибольшую. Она и будет соответствовать длине занятой части полосы.

Нечеткое число будем понимать следующим образом.

Определение 1. Нечетким числом G назовем нечеткое множество (см., напр., [5]) вида $\widetilde{G}=\{(g_1|\mu_1),\ldots,(g_\eta|\mu_\eta)\}$, где $\{g_1,g_2,\ldots,g_\eta\}$, $g_i\in R^1$, $\forall i\in J_\eta$ - носитель нечеткого множества, $\{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_\eta\}$, $\mu_i\in R^1$, $0\le\mu_i\le 1$, $\forall i\in J_\eta$ - множество значений функции принадлежности.

Для решения поставленной задачи необходимы операции нахождения суммы, минимума и максимума нечетких чисел, а также порядок нечетких чисел.

Определение 2. Суммой двух нечетких чисел $A=\{(a_1|\mu_1^A),\ldots,(a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$ и $B=\{(b_1|\mu_1^B),\ldots,(b_\beta|\mu_\beta^B)\}$ назовем нечеткое число $A+B$, которое образуется с помощью построения множества пар

$$\begin{aligned}\widetilde{C}&=\{(\widetilde{c}_1|\mu_1^{\widetilde{C}}),\ldots,(\widetilde{c}_\eta|\mu_\eta^{\widetilde{C}})\}=\\ &=\Big\{(a_1+b_1|\min[\mu_1^A,\mu_1^B]),\ldots,(a_1+b_\beta|\min[\mu_1^A,\mu_\beta^B]),\\ &(a_2+b_1|\min[\mu_2^A,\mu_1^B]),\ldots,(a_2+b_\beta|\min[\mu_2^A,\mu_\beta^B]),\\ &\ldots,\\ &(a_\alpha+b_1|\min[\mu_\alpha^A,\mu_1^B]),\ldots,(a_\alpha+b_\beta|\min[\mu_\alpha^A,\mu_\beta^B])\Big\}.\end{aligned}\tag{1}$$

Первые элементы $\widetilde{n}_1,\ldots,\widetilde{n}_\eta$, где $\eta=\alpha\beta$, этих пар образуют мультимножество $\widetilde{C}^*=\{\widetilde{n}_1,\ldots,\widetilde{n}_\eta\}$. Основание $S(\widetilde{C}^*)$ мультимножества $\widetilde{C}^*$: $S(\widetilde{C}^*)=\{\widetilde{n}_1,\ldots,\widetilde{n}_r\}$ - это носитель нечеткого числа $A+B=\{(c_1|\mu_1),\ldots,(c_r|\mu_r)\}$. Значения функции принадлежности находят по правилу:

$$\mu_t=\max_{\forall i\in J_\eta:\, c_t=\widetilde{c}_i}\{\mu_i^{\widetilde{C}},i\in J_\eta\},\quad t\in J_r \tag{2}$$

То есть значение μ_t выбирается как максимальное среди чисел $\mu_i^{\widetilde{C}}$, для которых $\widetilde{c}_i=c_t$, а r - число разных элементов в $\widetilde{C}^*$.

Определение 3. Суммой трех нечетких чисел $A=\{(a_1|\mu_1^A),\ldots,(a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$, $B=\{(b_1|\mu_1^B),\ldots,(b_\beta|\mu_\beta^B)\}$ и $D=\{(d_1|\mu_1^D),\ldots,(d_\delta|\mu_\delta^D)\}$ назовем нечеткое число $A+B+D=E+D$, где $E=A+B$.

Не сложно увидеть, что для такой суммы верны следующие утверждения.

Утверждение 1. Операция суммы для нечетких чисел коммутативна, т.е. $A+B=B+A$.

Утверждение 2. Операция суммы для нечетких чисел ассоциативна, т. е. $(A+B)+D=A+(B+D)$.

Аналогично сумме трех нечетких чисел определяется сумма любого количества чисел $a_1,\ldots,a_n$: $a_1+\ldots+a_n=(a_1+\ldots+a_{n-1})+a_n$, $n\ge 3$.

Из последних утверждений следует, что сумму n нечетких чисел $a_i=\{(g_1^i|\mu_1^i),\ldots,(g_{q_i}^i|\mu_{q_i}^i)\}$, $i\in J_n$ можно определять итеративно. Т.е. сперва находим сумму двух нечетких чисел, потом складываем полученное нечеткое число с третьим нечетким числом и т. д. Поскольку операция суммы пары нечетких чисел коммутативна (см. утверждение 1) и ассоциативна (см. утверждение 2), то порядок складывания n чисел значения не имеет.

Определение 4. Максимум и минимум двух нечетких чисел $A=\{(a_1|\mu_1^A),\ldots,(a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$ и $B=\{(b_1|\mu_1^B),\ldots,(b_\beta|\mu_\beta^B)\}$ введем так: если $\frac{\sum_{i=1}^{\alpha}a_i\mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}>\frac{\sum_{i=1}^{\beta}b_i\mu_i^B}{\sum_{i=1}^{\beta}\mu_i^B}$, то нечеткое число A будем называть максимумом, а нечеткое число B - минимумом из двух чисел. Аналогично можно рассматривать максимум, минимум из нескольких чисел.

Определение 5. Будем считать два нечетких числа $A=\{(a_1|\mu_1^A),\ldots,(a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$ и $B=\{(b_1|\mu_1^B),\ldots,(b_\beta|\mu_\beta^B)\}$ упорядоченными за невозрастанием (обозначать $\mathrm{A}\succcurlyeq\mathrm{B}$) тогда, когда $\frac{\sum_{i=1}^{\alpha}a_i\mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\geq\frac{\sum_{i=1}^{\beta}b_i\mu_i^B}{\sum_{i=1}^{\beta}\mu_i^B}$, и говорить, что A предшествует B за невозрастанием.

Определение 6. Будем считать два нечетких числа A и B упорядоченными по убыванию (обозначать $\mathrm{A}\succ\mathrm{B}$) тогда, когда $\frac{\sum_{i=1}^{\alpha}a_i\mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}>\frac{\sum_{i=1}^{\beta}b_i\mu_i^B}{\sum_{i=1}^{\beta}\mu_i^B}$, и говорить, что A предшествует B по убыванию.

Пусть $a_1\succcurlyeq a_2\succcurlyeq\ldots\succcurlyeq a_\alpha$ и $b_1\succcurlyeq b_2\succcurlyeq\ldots\succcurlyeq b_\beta$. Два нечетких числа A и B будем называть, исходя из [5], равными (обозначать $\mathrm{A}=\mathrm{B}$), если $\alpha=\beta$ и $a_i=b_i$, $\mu_i^A=\mu_i^{\mathrm{B}}$, $i\in J_\alpha$.

Определение 7. Расположением двух прямоугольников с нечетким длинами w_1 и w_2 и «четкой» шириной h будем называть прямоугольник, длина которого равна сумме длин прямоугольников w_1 и w_2. Такое расположение двух прямоугольников будем называть плотным без налегания расположением или касанием.

Сумма в определении 7 находится по определению 2. Поскольку эта сумма ассоциативна, то перестановка любого количества прямоугольников не приводит к изменению занятой части полосы при любом их расположении.

Поставленную задачу упаковки прямоугольников можно решить с помощью метода ветвей и границ. Этот метод дает оптимальное решение. Но на практике, при большом количестве прямоугольников, необходим метод, который дает пусть и не самое оптимальное, но достаточно „хорошее” решение за приемлемое время.

Распространим на задачу упаковки прямоугольников, с длинами заданными нечеткими числами, эвристический алгоритм [8, стр. 119].

Шаг 1. Упорядочим нечеткие длины прямоугольников таким образом: $\mathrm{w}_1\succcurlyeq\mathrm{w}_2\succcurlyeq\ldots\succcurlyeq\mathrm{w}_\mathrm{p}$.

Шаг 2. Прямоугольник с длиной w_1 размещаем в первую полосу, с длиной w_2 - во вторую, …, с длиной w_m в полоску m. Пусть $\mathrm{i}=m+1$.

Шаг 3. Среди m полосок определяем полоску с наименьшей нечеткой длиной и размещаем в ней прямоугольник с длиной w_i.

Шаг 4. Увеличиваем i на единицу, если $\mathrm{i}\leq\mathrm{p}$ переходим на шаг 3, иначе - на шаг 5.

Шаг 5. Определяем полосу с наибольшей длиной.

Замечание. Таким образом, на шаге 5 все прямоугольники размещены. Наибольшее значение длины и будет давать значение целевой функции.

Возникает вопрос, а будет ли предложенный алгоритм давать оптимальные решения? Простейшим случаем кажется задача, в которой надо упаковывать прямоугольники в две полосы, а сами прямоугольники задаются «четкими» длинами. Но даже в этом случае можно привести контраргумент. Пусть необходимо упаковать в 2 полосы прямоугольники с длинами 5, 4, 3, 3, 3. Согласно алгоритму получим такое размещение: прямоугольники с длинами 5 и 3 в первую полосу, с длинами 4, 3, 3 -- во вторую. Длина занятой полосы равняется 10. Оптимальным будет размещение прямоугольников с длинами 5 и 4 в первую полосу, с длинами 3, 3, 3 во вторую. Длина занятой полосы равняется 9.

Оценим сложность решения задачи по эвристическому алгоритму.

Сперва оценим время работы алгоритма для нахождения наибольшего или наименьшего из двух нечетких чисел a_1 и a_2, $a_i = \{(g_1^i | \mu_1^i), \ldots, (g_{q_i}^i | \mu_{q_i}^i)\}$, $i \in J_2$, где $\{g_1^i, \ldots, g_{q_i}^i\}$ - носитель нечеткого множества a_i, а $\{\mu_1^i, \ldots, \mu_{q_i}^i\}$ -- множество значений функции принадлежности. Обозначим $q = \max(q_1, q_2)$.

Согласно [9], под временем работы алгоритма тут и дальше понимаем число элементарных шагов, которые алгоритм выполняет. В нашем случае элементарными шагами будут операции сложения, умножения, деления и сравнения.

Для нахождения $\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1$ необходимо выполнить операцию умножения не больше, чем q раз, а операцию сложения не больше, чем $q-1$. Для нахождения $\sum_{i=1}^{q_1} \mu_i^1$ необходимо выполнить операцию сложения не больше, чем $q-1$. Для нахождения $\frac{\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1}{\sum_{i=1}^{q_1} \mu_i^1}$ необходимо выполнить одну операцию деления. Для определения максимума или минимума среди величин $\frac{\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1}{\sum_{i=1}^{q_1} \mu_i^1}$ и $\frac{\sum_{i=1}^{q_2} g_i^2 \mu_i^2}{\sum_{i=1}^{q_2} \mu_i^2}$ необходимо выполнить одну операцию сравнения. Таким образом, для нахождения наибольшего или наименьшего значения из двух нечетких чисел a_1 и a_2 время работы алгоритма составляет не больше, чем $q + (q-1) + q + (q-1) + 1 + (q-1) + (q-1) + 2 = 6q - 1$, т.е. $\Theta(q)$, де Θ - асимптотически точная оценка (см., напр., [9, стр. 36]).

Аналогично находим время работы алгоритма при определении наибольшего или наименьшего среди s $(s \geq 2)$ нечетких чисел a_i, $a_i = \{(g_1^i | \mu_1^i), \ldots, (g_{q_i}^i | \mu_{q_i}^i)\}$, $i \in J_s$, где $\{g_1^i, \ldots, g_{q_i}^i\}$ – носитель нечеткого множества a_i, а $\{\mu_1^i, \ldots, \mu_{q_i}^i\}$ -- множество значений функции принадлежности. Пусть $q = \max q_i$, $i \in J_s$. Для нахождения $\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1$ необходимо выполнить операцию умножения не больше, чем q раз, а операцию сложения не больше, чем $q-1$. Т.е. для s чисел операция умножения выполняется не больше, чем sq раз, а операция сложения не больше, чем $s(q-1)$ раз. Для нахождения $\sum_{i=1}^{q_1} \mu_i^1$ необходимо выполнить операцию сложения не больше, чем $q-1$. Для нахождения $\frac{\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1}{\sum_{i=1}^{q_1} \mu_i^1}$ необходимо выполнить одну операцию деления. Т.е. для s чисел операция сложения выполняется не больше чем $s(q-1)$ раз, а операция деления s раз. Для сравнения величин $\frac{\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1}{\sum_{i=1}^{q_1} \mu_i^1}$, $\frac{\sum_{i=1}^{q_2} g_i^2 \mu_i^2}{\sum_{i=1}^{q_2} \mu_i^2}$, …, $\frac{\sum_{i=1}^{q_s} g_i^s \mu_i^s}{\sum_{i=1}^{q_s} \mu_i^s}$ необходимо: сравнить суммы $\frac{\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1}{\sum_{i=1}^{q_1} \mu_i^1}$ и $\frac{\sum_{i=1}^{q_2} g_i^2 \mu_i^2}{\sum_{i=1}^{q_2} \mu_i^2}$, и большую (меньшую) суму запомнить, после этого сравнить ту сумму, которую запомнили, с суммою $\frac{\sum_{i=1}^{q_3} g_i^3 \mu_i^3}{\sum_{i=1}^{q_3} \mu_i^3}$ и большую (меньшую) сумму запомнить и т.д. То есть для сравнения величин $\frac{\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1}{\sum_{i=1}^{q_1} \mu_i^1}$, $\frac{\sum_{i=1}^{q_2} g_i^2 \mu_i^2}{\sum_{i=1}^{q_2} \mu_i^2}$, …, $\frac{\sum_{i=1}^{q_s} g_i^s \mu_i^s}{\sum_{i=1}^{q_s} \mu_i^s}$ необходимо выполнить $s-1$ операций сравнения. Таким образом, для нахождения наибольшего или наименьшего среди s нечетких чисел время работы алгоритма будет не больше, чем $sq+s(q-1)+(s-1)+s(q-1)+s=3sq-1$, т.е. $\Theta(sq)$.

Найдем время работы алгоритма для определения суммы двух нечетких чисел a_1 и a_2.

Для образования множества пар $\tilde{N}$ по формуле (1) необходимо выполнить максимум $q \cdot q = q^2$ операций сложения и столько же операций сравнения. Для образования основания $S(\tilde{N})$ необходимо отсортировать массив чисел максимальной размерности $q \cdot q$. Используем, например, алгоритм быстрой сортировки (см., напр., [9, стр. 151]). Время работы алгоритма быстрой сортировки в худшем случае составляет $\Theta((q \cdot q)^2) = \Theta(q^4)$.

Каждому элементу основания ставим в соответствие, согласно формуле (2), функцию принадлежности, т.е. в наихудшем случае надо выполнить $q \cdot q - 1 + q \cdot q - 1 = 2q^2 - 2$ операций сравнения. Таким образом, время работы для образования суммы двух нечетких чисел a_1 и a_2 будет не больше, чем $q^2 + q^2 + q^4 + 2q^2 - 2 = q^4 + 4q^2 - 2$, т.е. $\Theta(q^4)$.

Аналогично находим время работы алгоритма для нахождения суммы s нечетких чисел a_i, $i \in J_s$, $s \geq 2$. Время работы будет не больше, чем $q^s + q^s + q^{2s} + 2q^s - 2 = q^{2s} + 4q^s - 2$, т.е. $\Theta(q^{2s})$.

Теперь проведем анализ эвристического алгоритма.

На первом шаге упорядочим прямоугольники, чтобы: $w_1 \succcurlyeq w_2 \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq w_p$. Т.е. надо сравнить p нечетких чисел, или выполнить $3pq-1$ операций.

На третьем шаге алгоритма надо определить полоску, длина которой наименьшая, т.е. надо сравнить m нечетких чисел, или выполнить $3mq-1$ операций. После размещения в полоску с наименьшей длиной прямоугольника с длиной w_i складываем длину полоски и w_i, т.е. складываем два нечетких числа, или выполняем q^4+4q^2-2 операций.

Поскольку шаг 3 выполняется $p-m$ раз (так как первые m прямоугольников разместили на шаге 2, а надо разместить все p прямоугольников), то на шаге 3 выполняем $(p-m)(3mq-1+q^4+4q^2-2)$ операций.

На шаге 5 уже размешены все прямоугольники и нужно выбрать полоску с наибольшей длиной, т.е. сравнить m нечетких чисел, или выполнить $3mq-1$ операций.

Таким образом, при использовании эвристического метода надо выполнить такое количество операций: $3pq-1+(p-m)(3mq-1+q^4+4q^2-2)+3mq-1$.

Таким образом, время работы метода полного перебора зависит от количества полосок как $T(m)=\Theta(m^2q)$, от количества прямоугольников как $T(p)=\Theta(3pq+3mpq-3p+pq^4+4pq^2)$, от максимальной мощности нечетких множеств, которые характеризуют длины прямоугольников как $T(q)=\Theta(q^4(p-m))$.

Т.е., этот эвристический алгоритм имеет полиномиальную сложность.

Предложенный метод реализован в среде Delphi 6.0. Длины прямоугольников генерировались следующим образом: каждое число из множества носителя генерировалось с помощью датчика случайных чисел от 1 до 20, каждое число из множества функции принадлежности генерировались как десятичное число вида 0,x, где x генерировался с помощью датчика случайных чисел до 1 до 9. При этом исключалась ситуация, что в одном нечетком числе элементы из множества носителя будут равными (т.е. не допускалось генерирования числа, напр. Вида $\{(5|0{,}3),(5|0{,}8)\}$). Проведена серия числовых экспериментов на ПК DualCore Intel Core 2 Duo E6550 с тактовой частотой 2333МГц. По результатам этих экспериментов исследовано время работы программы по эвристическому методу (см. табл. 1, 2), мощность носителя нечеткого множества в этих сериях равнялась трем.

Таблица 1. - Время работы программы по эвристическому методу для первой серии экспериментов

№	Количество полосок, m	Количество прямоугольников, p	Время работы
1	3	< 1000	< 30 с.
2	3	1000	30 с.
3	3	2000	3 мин. 30 с.
4	3	3000	12 мин. 10 с.
5	3	4000	30 мин.
6	3	5000	54 мин.
7	4	1000	20 с.
8	4	2000	2 мин. 10 с.
9	4	3000	6 мин. 45 с.
10	4	4000	17 мин.

11	4	5000	31 мин.
12	5	1000	15 с.
13	5	2000	1мин. 20 с.
14	5	3000	4 мин. 20 с.
15	5	4000	10 мин. 10 с.
16	5	5000	21 мин.
17	6	1000	10 с.
18	6	2000	1 мин.
19	6	3000	3 мин. 25 с.
20	6	4000	7 мин. 40 с.
21	6	5000	14 мин. 30 с.
22	7	1000	7 с.
23	7	2000	45 с.
24	7	3000	2 мин. 25 с.
25	7	4000	5 мин. 30 с.
26	7	5000	11 мин.
27	8	1000	5 с.
28	8	2000	35 с.
29	8	3000	1 мин. 40 с.
30	8	4000	4 мин. 10 с.
31	8	5000	9 мин.
32	9	1000	5 с.
33	9	2000	25 с.
34	9	3000	1 мин. 30 с.
35	9	4000	3 мин. 25 с.
36	9	5000	6 мин. 20 с.

Таблица 2. -Время работы программы по эвристическому методу для второй серии экспериментов

№	Количество полосок, m	Количество прямоугольников, p	Время работы, секунды
1	10	1000	5
2	10	2000	23
3	10	3000	72
4	10	4000	174
5	10	5000	316
6	20	1000	3
7	20	2000	9
8	20	3000	22

9	20	4000	49
10	20	5000	82
11	30	1000	2
12	30	2000	5
13	30	3000	12
14	30	4000	23
15	30	5000	44
16	40	1000	2
17	40	2000	4
18	40	3000	8
19	40	4000	17
20	40	5000	29
21	50	1000	2
22	50	2000	3
23	50	3000	7
24	50	4000	12
25	50	5000	21
26	60	1000	1
27	60	2000	3
28	60	3000	6
29	60	4000	10
30	60	5000	17
31	70	1000	1
32	70	2000	3
33	70	3000	5
34	70	4000	9
35	70	5000	14
36	80	1000	1
37	80	2000	3
38	80	3000	5
39	80	4000	8
40	80	5000	12
41	90	1000	1
42	90	2000	3
43	90	3000	5
44	90	4000	7
45	90	5000	11

Как видим, время решения в задачах, приведенных в таблицах 1,2, мало, то есть эксперименты показывают практическую эффективность метода с точки зрения временных затрат.

Для того, чтобы проверить, насколько решение задачи, получаемое этим эвристическим методом, близко к оптимальному, можно предложить следующие способы, описанные ниже.

При нахождении эффективности задачи, приведенными ниже способами, используется понятие дефазификации. Напомним, что дефазификацией называется процедура преобразования нечеткого числа в четкое число. Воспользуемся следующим методом дефазификации: по методу центра тяжести [см, напр., 10].

Дефазификация нечеткого числа $A=\left\{\left(a_1 \middle| \mu_1^A\right),\ldots,\left(a_\alpha \middle| \mu_\alpha^A\right)\right\}$ по методу центра тяжести осуществляется по формуле $\dfrac{\sum_{i=1}^{\alpha} a_i \mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A}$.

<u>1 способ</u>. Когда получено решение, находим среднюю длину занятой части полосок Σ: $\Sigma=\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i}{m}$, где m - количество полосок, ε_i - длина занятой части полоски i, $i \in J_m$. Определяем Δ: $\Delta=\varepsilon_{\max}-\Sigma$, где $\varepsilon_{\max}=\max\limits_{1\le i\le m}\{\varepsilon_i\}$. Дефазифицируем Δ, полученное значение обозначим через δ. Если метод работает хорошо, то при достаточно большом количестве прямоугольников δ должно быть близким к нулю.

Для такой проверки кроме дефазификации необходимо ввести операцию умножения обычного числа на нечеткое число, операцию нахождения разности двух нечетких чисел. Введем эти операции следующим образом.

Определение 8. Произведением числа λ на нечеткое число $A=\left\{\left(a_1 \middle| \mu_1^A\right),\ldots,\left(a_\alpha \middle| \mu_\alpha^A\right)\right\}$ назовем нечеткое число вида $\left\{\left(\lambda a_1 \middle| \mu_1^A\right),\ldots,\left(\lambda a_\alpha \middle| \mu_\alpha^A\right)\right\}$.

Определение 9. Разностью двух нечетких чисел $A=\left\{\left(a_1 \middle| \mu_1^A\right),\ldots,\left(a_\alpha \middle| \mu_\alpha^A\right)\right\}$ и $B=\left\{\left(b_1 \middle| \mu_1^B\right),\ldots,\left(b_\beta \middle| \mu_\beta^B\right)\right\}$ назовем число, которое будет находится как $A+(-1)B$.

<u>2 способ.</u> Дефазифицируем длину каждой занятой полоски. Обозначим эти дефазифицированые величины через σ_i. Находим их среднее $\sigma_{ñð}$: $\sigma_{ñð}=\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sigma_i}{m}$, где m - количество полосок. Находим величину ψ: $\psi=\dfrac{\sigma_{\max}-\sigma_{ñð}}{\sigma_{ñð}}$, где $\sigma_{\max}=\max\limits_{1\le i\le m}\{\sigma_i\}$. При больших количествах прямоугольников, в которых элементы множества носителя случайные равнораспределенные числа, следует ожидать, что, если решение близко к оптимальному, то величина ψ должна быть близкой к нулю.

Было проведено 3 серии испытаний. Мощность носителя нечеткого множества в испытаниях равнялась трем. Элементы множества носителя генерировались с помощью датчика случайных чисел в интервале от 1 до 20.

В каждом испытании определялась эффективность решения обоими методами. Результаты экспериментов представлены в таблице 3.

Таким образом, результаты числовых экспериментов, приведенные в таблице 3, свидетельствуют о достаточной практической эффективности предложенного эвристического метода с точки зрения точности решения по целевой функции.

Таблица 3. Результаты проверки эффективности эвристического метода.

№ серии	Кол-во полосок, m	Кол-во прямо-угольников, p	Кол-во испы-таний в серии	1 способ			2 способ		
				Наименьшее δ в серии, %	Наибольшее δ в серии, %	Среднее по серии δ, %	Наименьшее ψ в серии, %	Наибольшее ψ в серии, %	Среднее по серии ψ, %
1	10	100	100	2,85	14,96	9,84	2,94	17,60	10,38
3	5	100	100	1,00	9,85	3,82	1,02	10,96	4,02
2	10	1000	10	0,77	1,71	1,28	0,49	1,42	0,93

Заключение. В работе предложен один эвристический алгоритм для решения задачи упаковки прямоугольников, длины которых задаются нечеткими множествами. Получена полиномиальная оценка сложности алгоритма. Проведены числовые эксперименты. Анализируя результаты исследований, можем сделать вывод, что эвристический алгоритм является достаточно приемлемым для нахождения приближенного решения практических задач как с точки зрения временных затрат, так и с точки зрения получаемой точности.
В дальнейшем целесообразна разработка других точных и приближенных методов решения задач евклидовой комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. - К.: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. - 188 с.
2. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. - Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. - 103 с.
3. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізація з дробово-лінійними функціями. - К.: Наук. думка, 2005. - 117 с.
4. Ємець О.О., Роскладка О.В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування: Монографія. - Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. - 129 с.
5. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. - М.: Радио и связь, 1982. - 432 с.
6. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения: Пер. с англ. / Под ред. Р.Р. Ягера.- М.: Радио и связь, 1986. - 408 с.
7. Парасюк И.Н., Ершов С.В. О трансформациях нечетких графов, задаваемых FD-грамматиками// Кибернетика и системный анализ. – 2007, №2. – С.129-147.
8. Гудман С., Хидетниеми С. Введение в разработку и анализ алгоритмов. - М.: Мир, 1981. - 368 с.
9. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. - М.: МЦНМО, 2001. - 960 с.
10. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику. [Электронный ресурс] / С.Д. Штовба. – Режим доступа: http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book1/1.php#1_1.