ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
"ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ"
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ВІСНИК

ЗНУ

ЗАПОРІЗЬКОГО
НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

2011 - № 1

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

Заснований
у 1997 р.
Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації
Серія КВ № 15436-4008 ПР,
22.06.2009 р.

Адреса редакції :
Україна, 69600,
м. Запоріжжя, МСП-41,
вул. Жуковського, 66

Телефон для довідок:
(061) 289-12-26

Вісник
Запорізького національного університету

- **Фізико-математичні науки**

№ 1, 2011

Запоріжжя 2011

ЗМІСТ

ВИСНОВКИ

Теоретичні результати і результати чисельних експериментів показують, що алгоритм ОРМ може бути застосований до задачі синтезу оптимальних рішень за комбінованим критерієм. Зауважимо, що описаний алгоритм може бути поширений і на випадок більш ніж трьох станів середовища, а побудування множин рішень, дозволяє визначити оптимальне рішення навіть у разі неточно визначеного апріорного розподілу ймовірності, або принаймні оцінити можливу помилку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенности / Р.И. Трухаев. – М.: Наука, 1981. – 258 с.

2. Ус С.А. Применение метода оптимального разбиения множеств к решению задачи построения байесовых множеств / С.А. Ус, Е. А. Рецкая // Питання прикладної математики і математичного моделювання: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, ДНУ, 2000. – С.86–89.

3. Киселева Е.М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: монография / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К.: Наукова Думка, 2005. – 564 с.

УДК 519.85

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ВІДНОСНИХ ПОКАЗНИКІВ З УРАХУВАННЯМ КОМБІНАТОРНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКУ

Черненко О.О., к.ф.-м.н., доцент

Полтавський університет економіки і торгівлі

У роботі пропонується застосування апарату евклідової комбінаторної оптимізації для побудови нових математичних моделей задач як задач на розміщеннях із дробово-лінійною функцією цілі. Це проілюстровано на двох задачах визначення відносних показників (рентабельності, собівартості) як задач із дробово-лінійною функцією цілі на множині розміщень. Моделі розглянутих задач можуть бути використані при розв'язуванні практичних задач з аналогічною структурою, а також при моделюванні задач із дробово-лінійною функцією цілі на інших комбінаторних конфігураціях.

Ключові слова: мультимножина, евклідова задача оптимізації, розміщення.

Черненко О.А. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ С УЧЕТОМ КОМБИНАТОРНЫХ СВОЙСТВ РЕШЕНИЯ / Полтавский университет экономики и торговли, Украина

В работе предлагается применение аппарата евклидовой комбинаторной оптимизации для построения новых математических моделей задач как задач на размещениях с дробно-линейной функцией цели. Это проиллюстрировано на двух задачах определения относительных показателей (рентабельности, себестоимости) как задач с дробно-линейной функцией цели на множестве размещений. Модели рассмотренных задач могут быть использованы при решении практических задач с аналогичной структурой, а также при моделировании задач с дробно-линейной функцией цели на других комбинаторных множествах.

Ключевые слова: мультимножество, евклидовая задача оптимизации, размещения.

Chernenko O.A. A SIMULATION OF PROBLEMS OF OPTIMIZATION OF RELATIVE INDICATORS TAKING INTO ACCOUNT COMBINATORY PROPERTIES OF THE DECISION / Poltava university of Economics and Trade, Ukraine

In this article the authors offered the employment of the apparatus of Euclidean combinatorial optimization for a construction of new mathematical models of optimization problems on the set of arrangements with linear-fractional function of the purpose. The authors illustrated it on two problems of the definition of production of relative indexes (profitability, prime price) as problems with linear-fractional function of the purpose on the set of arrangements. The models of those problems can be used for a solution of practical problems with analogical structure, and also for construction of the problems with the linear-fractional function of the purpose on other combinatorial sets.

Key words: multiset, Euclidian optimization problem, arrangements.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Важливий клас дискретних задач складають оптимізаційні задачі комбінаторного типу, зокрема, задачі евклідової комбінаторної оптимізації [1-9]. Дані задачі дають можливість повно і адекватно описати сучасні виробничі, економічні, природні, соціальні та багато інших процесів. Серед них значне місце займають задачі з дробово-лінійною функцією цілі. Прикладами задач з дробово-лінійною цільовою функцією можуть служити задачі про максимізацію відносних показників якості – рентабельності, продуктивності, трудомісткості [5, 9, 10].

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У роботах [1-9] викладені останні дослідження евклідових комбінаторних задач оптимізації. Досліджуються властивості евклідових комбінаторних множин, вивчаються властивості задач оптимізації на цих множинах, обґрунтовуються методи та алгоритми їх розв'язування. Розглядається побудова математичних моделей прикладних задач у вигляді задач оптимізації на евклідових комбінаторних множинах.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Моделювання сучасних процесів за допомогою оптимізаційних задач є досить складним, так як на сучасні системи впливає багато чинників. Створення адекватної моделі неможливе без врахування всіх важливих факторів та процесів, саме тому в деяких моделях цільова функція є дробово-лінійною і це зумовлює потребу розглядати та досліджувати задачі з дробово-лінійною цільовою функцією на множині розміщень.

Постановка завдання. У даній роботі пропонується застосування апарату евклідової комбінаторної множини для побудови нових математичних моделей задач як задач оптимізації на розміщеннях з дробово-лінійною функцією цілі. Це ілюструється на двох економічних задачах, де в якості критеріїв оптимальності взято рівень рентабельності та собівартість.

Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів. У подальших викладах будемо користуватися термінологією з [1]. Нехай J_n – множина n перших натуральних чисел, тобто $J_n = \{1,2,...,n\}$. Мультимножиною $G = \{g_1, g_2, g_3, ..., g_\eta\}$ називають сукупність елементів, серед яких можуть бути й однакові. Мультимножина, всі елементи якої різні, є множиною. Будь-яку мультимножину $G = \{g_1, g_2, g_3, ..., g_\eta\}$ можна подати її основою $S(G)$, тобто кортежем $(e_1, e_2, e_3, ..., e_n)$ всіх її n різних елементів, та їх кратністю – числом повторень кожного елемента основи цієї мультимножини. Упорядкована сукупність кратностей складає первинну специфікацію $[G]$ – кортеж кратностей. Назвемо k-вибіркою підмультимножину в мультимножині G, яка містить k елементів. Елементами загальної множини k-розміщень $E^k_{\eta n}$ є усі k-вибірки з мультимножини G, де n – число різних елементів у G.

Сформулюємо математичну постановку задач.

Модель 1.

Нехай маємо m складів, на яких зберігається продукція підприємства, та s магазинів, що займаються її реалізацією. Відомо, що V_i' $(i \in J_m)$ – це об'єм продукції на i – му складі, a_i – ціна одиниці продукції. Також відомо, що V_i'' – мінімальний об'єм закупівлі товару магазином, b_j – ціна одиниці продукції для j – го магазину $(j \in J_s)$. Транспортні витрати на перевезення одиниці товару з i – го складу до j – го магазину позначимо c_{ij}. Для постачання товару використовується l транспортних засобів, для кожного з яких відома вантажопідйомність e_t, де $t \in J_n$. Необхідно визначити обсяг перевезень x_{ij} від i – го складу до j – го магазину, щоб затрати на їх перевезення віднесені до прибутку були мінімальними.

Позначимо через $k = m \cdot s$ – загальну кількість маршрутів. Введемо в розгляд мультимножину G з основою $S(G) = (0, e_1, e_2, ..., e_n)$ і первинною специфікацією $[G] = (k, l_1, l_2, ..., l_n)$. Прибуток від перевезення продукції становить:

$$P(x) = \sum_{j=1}^{s} (b_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}) - \sum_{i=1}^{m} (a_i \sum_{j=1}^{s} x_{ij}) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s} c_{ij} x_{ij}, \qquad (1)$$

де $\sum_{j=1}^{s} (b_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij})$ – вартість продукції, що була вивезена зі складів до магазинів; $\sum_{i=1}^{m} (a_i \sum_{j=1}^{s} x_{ij})$ – отримані кошти від магазинів за доставлену продукцію; $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s} c_{ij} x_{ij}$ – витрати на перевезення продукції.

Враховуючи введені позначення, задача запишеться у вигляді: знайти впорядковану пару $\left\langle F(x^*), x^* \right\rangle$ таку, що

$$F(x^*) = \min_{x \in R^k} \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s} c_{ij} x_{ij}}{P(x)}, \tag{2}$$

$$x^* = \arg\min_{x \in R^k} \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s} c_{ij} x_{ij}}{P(x)}, \tag{3}$$

при обмеженнях:

на вантажопідйомність транспортних засобів

$$(x_{11}, \ldots, x_{1s}, \ldots, x_{ms}) \in E_{ln}^{k}(G); \tag{4}$$

на об'єми продукції на складі

$$\sum_{j=1}^{s} x_{ij} \le V_i' \quad \forall i \in J_m; \tag{5}$$

на мінімальні партії закупки продукції магазинами

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge V_j'' \quad \forall j \in J_s. \tag{6}$$

Модель 2.

На складі деякої фірми, що доставляє товар k споживачам, знаходяться партії товару об'ємами $e_1, e_2, \ldots, e_n$ одиниць. Кількість партій об'єму e_i одиниць дорівнює η_i. Прибуток від доставки одиниць товару j-ому споживачу становить c_j грошових одиниць, а витрати на перевезення одиниці продукції j-му споживачу дорівнюють d_j. Необхідно мінімізувати собівартість від реалізації товару, якщо об'єм товару, що доставляється j-му споживачу $(j \in J_n)$, знаходиться в межах від a_j до b_j одиниць.

Нехай x_j - об'єм товару, який доставляється j-ому споживачу. Припустимо, що кількість споживачів не перебільшує кількість партій товару. Наявність товару на складі може бути адекватно описана за допомогою мультимножини G з основою $S(G) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ та первинною специфікацією $[G] = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. Тоді допустимий розв'язок задачі x_j є впорядкованою вибіркою з мультимножини G, тобто елементом загальної множини розміщень. Прибуток від перевезення продукції усім споживачам становить $\sum_{j=1}^{k} c_j x_j$. Загальні транспортні витрати складають: $\sum_{j=1}^{k} d_j x_j$.

Математична модель розглянутої задачі запишеться у вигляді: знайти впорядковану пару $\left\langle Z(x^*), x^* \right\rangle$ таку, що

$$Z(x^*) = \min_{x \in R^k} \frac{\sum_{j=1}^{k} c_j x_j}{\sum_{i=1}^{k} d_j x_j}, \tag{7}$$

$$x^* = \arg\min_{x \in R^k} \frac{\sum_{j=1}^{k} c_j x_j}{\sum_{i=1}^{k} d_j x_j}, \tag{8}$$

при обмеженнях на об'єм товару, що доставляється споживачу

$$(x_1, x_2, ..., x_k) \in E^k_{\eta n}(G), \tag{9}$$

$$a_j < x_j < b_j \quad \forall j \in J_k. \tag{10}$$

Висновки з даного дослідження та перспективи. Побудовані моделі демонструють можливості апарату евклідової комбінаторної оптимізації. Зокрема, множини допустимих розв'язків задач мають властивість бути розміщенням з деякої множини, і повною мірою адекватні реальним економіним ситуаціям. Ці моделі можуть бути використані для моделювання аналогічних, більш складних економічних задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.
2. Стоян Ю. Г., Ємець О. О., Ємець Є. М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с.
3. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. – К.: Наук. думка, 2008. – 160 с.
4. Емец О.А., Романова Н.Г. Оптимизация на полиперестановках. – К.: Наук. думка, 2010. – 105 с.
5. Ємець О. О., Колєчкіна Л. М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями: Монографія. – К.: Наук. думка, 2005. – 117 с.
6. Ємець О.О., Роскладка О.В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування: Монографія. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. – 129 с.
7. Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Побудова математичної моделі однієї комбінаторної задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008 – № 6. – С. 25-33.
8. Емец О. А., Барболина Т. Н., Черненко О. А. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными ограничениями на размещениях // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – №5. – С. 79-85.
9. Черненко О. О. Властивості математичних моделей задач з дробово-лінійною цільовою функцією на розміщеннях та методи їх розв'язування : дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.01 / Полтавський ун-т споживчої кооперації України. — Полтава, 2006. — 167 с.
10. Шор Н. З., Соломон Д. И. Декомпозиционные методы в дробно-линейном программировании. – Кишенев, Штиинца, 1989. – 204 с.

Збірник наукових праць

Вісник Запорізького національного університету

Фізико-математичні науки

№1, 2011

Технічний редактор *С.О.Борю*

Верстка, дизайн-проробка, оригінал-макет і друк виконані у видавництві
Запорізького національного університету,
тел. (061) 228-75-47

Підписано до друку 26.10.2011. Формат 60 × 90/8.

Папір Data Copy. Гарнітура "Таймс".

Умовн.-друк. арк. 22,5.

Замовлення № 362. Наклад 100 прим.

Запорізький національний університет
69600, м. Запоріжжя, МСП-41
вул. Жуковського, 66
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2952 від 30.08.2007