Дніпропетровський національний університет

Економіка: проблеми теорії та практики

Збірник наукових праць

Випуск 264

Том VI

ДНУ
Дніпропетровськ
2010

Ємець Є.М., Ємець О.О., Парфьонова Т.О.,Ольховський Д.М.
Полтавський університет економіки і торгівлі

ТРАНСПОРТНІ ЗАДАЧІ НА ПЕРЕСТАВЛЕННЯХ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДРУГИМ МЕТОДОМ КОМБІНАТОРНОГО ВІДСІКАННЯ

І. Вступ

Розвиток економіко-математичного моделювання, зокрема на базі комбінаторної оптимізації (див., наприклад [1-8]), виокремлення задач евклідової комбінаторної оптимізації, дослідження властивостей задач евклідової комбінаторної оптимізації та евклідових комбінаторних множин обумовили розробку ряду нових методів для комбінаторних оптимізаційних задач [3-8]. Зокрема, для задач оптимізації на переставленнях був запропонований та обґрунтований метод комбінаторного відсікання [5,9-14]).

Актуальною є необхідність подальшого дослідження підходу, що ґрунтується на ідеях методів відсікання для задач оптимізації лінійних функцій з лінійними додатковими обмеженнями, в яких допустима точка має переставні властивості.

В цій роботі пропонується і обґрунтовується другий метод комбінаторного відсікання в застосуванні до комбінаторної транспортної задачі на переставленнях [15, 16].

ІІ. Постановка задачі

В роботах [15, 16] вводиться до розгляду та досліджується комбінаторна транспортна задача на множині переставлень $E_{kv}(G)$, що має математичну модель: знайти

$$C\left(x^*\right) = \min_{x \in R^k} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} ;$$

$$x^* = \left(x_{11}^*, \ldots, x_{mn}^*\right) = \arg\min_{x \in R^k} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} ,$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall i \in J_m ;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \quad \forall j \in J_n ;$$

$$x = \left(x_{11}, \ldots, x_{mn}\right) \in E_{kv}(G),$$

де $k = m \cdot n$, a_i, b_j, c_{ij} - задані сталі, G - задана мультимножини обсягів можливих перевезень $G = \{g_1,...,g_k\}$, $E_{kv}(G)$ - множина переставлень з повтореннями з елементів мультимножини $G = \{g_1,....,g_k\}$, основа $S(G)$ якої має v елементів: $|S(G)| = v$. Сенс параметрів a_i - обсяг виробництва в пункті виробництва i $\forall i \in J_m$; b_j - обсяг споживання в пункті споживання j $\forall j \in J_n$; c_{ij} - тариф на перевезення з пункту виробництва i в пункт споживання j $\forall i \in J_m$, $\forall j \in J_n$.

Ця модель є частковим випадком наступної задачі.

Розглянемо максимізацію лінійної функції за додаткових лінійних обмежень на множині переставлень, тобто задачу: знайти пару $\langle C(y^*), y \rangle$, яка визначається як

$$C\left(y^*\right) = \max_{y \in R^n} \sum_{j=1}^{n} c_j y_j , \quad (1)$$

$$y^* = \left(y_1^*,...,y_n^*\right) = \arg\max_{y \in R^n} \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \quad (2)$$

за додаткових лінійних умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = b_i , \ \forall i \in J_r ; \quad (3)$$

$$y_j \geq 0 , \ \forall j \in J_n \quad (4)$$

та за комбінаторних обмежень

$$x = \left(x_1,...,x_k\right) = \left(y_1,....,y_k\right) \in E_{kv}(G) \subset R^k , \quad (5)$$

де n, r, k, v - визначені натуральні константи $(k \leq n)$, R^n - n-вимірний арифметичний евклідовий простір, $J_r = \{1,2,...,r\}$ - множина перших натуральних чисел, c_j, a_{ij}, b_i - задані дійсні числа $\forall i \in J_r$, $\forall j \in J_n$, а $E_{kv}(G)$ - множина переставлень з повтореннями з елементів мультимножини $G = \{g_1,....,g_k\}$, основа $S(G)$ якої має v елементів: $|S(G)| = v$.

III. Другий метод комбінаторної оптимізації для розв'язування задачі (1)-(5)

У роботах [5, 9-14] запропоновано і обґрунтовано метод комбінаторного відсікання (назвемо його – перший метод) для задачі (1)-(5). Суттєвою є перевірка умови

$$x \in \Pi_{kv}(G) \underline{\hspace{6em}} \quad (6)$$

В розглянутій схемі методу відсікання многогранник M визначається як многранниками $\Pi_{kv}(G)$ та (3), (4), так і нерівностями-відсіканнями, які приєднуються до (3) в ході розв'язування задачі (1)-(5).

В даній роботі пропонується відсікання робити тільки на переставному многограннику, а перевірку умови

$$x^* \in E_{kv}(G) \tag{7}$$

об'єднати з перевіркою умови (3).

Викладемо цей (другий) метод комбінаторного відсікання.

Крок 0. Задаємо цілочислову змінну q рівною нулю: $q = 0$.

Крок 1. Розв'язуємо ДЗЛП (1), (2), (4), (6). (Зауважимо, що за умови $g_i \geq 0$, умова (4) автоматично виконується). Розв'язок ДЗЛП позначимо $y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$, де $(y_1^*, \ldots, y_k^*) = x^*$.

Зауваження 1. Задача (1), (2), (4), (6) є ЗЛП, оскільки переставний многогранник $\Pi_{kv}(G)$, як відомо [3,4], описується такою системою лінійних обмежень:

$$\sum_{i \in \omega} x_i \geq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_j, \ \forall \omega \subset J_k, \ |\omega| < k; \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{j=1}^{k} g_j, \tag{9}$$

де вважається, що елементи мультимножини G упорядковані по не спаданню:

$$g_1 \leq g_2 \leq \ldots \leq g_k. \tag{10}$$

Зауваження 2. Задачу (1), (2), (4), (6), або, що теж саме ЗЛП (1), (2), (4), (8), (9), можна розв'язувати безпосередньо методом, що дає вершину допустимої області (симплекс-методом чи методом штучного базису), а можна у випадку $n = k$ (повністю комбінаторної задачі) скористатися наступними відомими фактами. По-перше, загально відомо (див., наприклад, [17]), що розв'язок ЗЛП досягається в вершині допустимого многогранника. По-друге, переставний многогранник має [3, 4] властивість збіжності множини його вершин $vert\,\Pi_{kv}(G)$ з множиною переставлень $E_{kv}(G)$:

$$E_{kv}(G) = vert\Pi_{kv}(G). \tag{11}$$

По-третє, відомий [3, 4] розв'язок лінійної безумовної задачі оптимізації на множині переставлень (в [4] на с. 79 теорема 3.1 та зауваження 3.3 на с. 82). Цей розв'язок знаходиться так: нехай

$$c_{\beta_1} \geq c_{\beta_2} \geq \ldots \geq c_{\beta_k}, \tag{12}$$

де $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$ - переставлення з елементів J_k (або коротко $\beta \in E_{kk}(J_k) = E_k(J_k)$), виконується умова (10). Тоді x^* з (2) визначається умовами:

$$x^*_{\beta_i} = g_{k-i+1}, \ \forall i \in J_k. \tag{13}$$

Зауваження 3. По виконанню кроку 1 умова (7) завжди виконується, оскільки допустимий многогранник M, що є опуклою оболонкою множини E $(M = conv\, E)$, має властивість:

$$vert\, M = vert\, conv\, E = E$$

Для множини E ця властивість означає вершинну розташованість стосовно многогранника M [13, 14]. Обґрунтовування цього факту дано далі.

Крок 2. Перевіряємо умову, що точка $y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$ задовольняє співвідношенням (3), (4).

Якщо умови:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* = b_i, \ \forall i \in J_r; \tag{14}$$

$$y_j^* \geq 0, \ \forall j \in J_n, \tag{15}$$

виконалися, то вихідна задача (1)-(5) розв'язана. Алгоритм закінчує роботу. В іншому разі – перехід на крок 3.

Крок 3. Збільшуємо q на одиницю.

Крок 4. Будуємо нерівність-відсікання точки y^*:

$$\sum_{i_j \in J} \frac{y_{i_j}}{\theta_{i_j}} \geq 1, \tag{16}$$

де J - множина небазисних змінних в точці y^*,

$$\theta_j = \min_{i:\alpha_{ij}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} = \frac{\beta_t}{\alpha_{tj}}, \ j \in J. \tag{17}$$

В (17) α_{ij}, β_j - елементи останньої симплекс таблиці ДЗЛП (i - номер її рядка, j - номер стовпця небазисної змінної).

Перетворюємо нерівність (16) у рівність:

$$-\sum_{i_j\in J}\frac{y_{i_j}}{\theta_{i_j}}+y_{n+q}=-1, \qquad (18)$$

де $y_{n+q}\geq 0$ - додаткова змінна, та додаємо до системи (6) (що теж саме до системи (8), (9)).

В формулах (16), (18) $J=\{j_1,...,j_\gamma\}$ - множина номерів небазисних змінних в останній точці y^* (одержаної як розв'язок поточної ДЗЛП); γ - кількість небазисних змінних.

Переходимо на крок 1.

Правильність відсікання (тобто те, що y^* відсікається, а жодна допустима точка задачі (1)-(5) – ні) обґрунтовує теорема 1.

Теорема 1. Нехай нерівність-відсікання задається формулою (16), в якій величини θ_j визначаються умовою (17). Нехай точка $y^*=(y_1^*,...,y_{n+q}^*)$ - розв'язок ДЗЛП, який відсікається. Тоді нерівності (16) точка y^* не задовольняє, а всі вершини, що суміжні з y^* в допустимому многограннику ДЗЛП, справджують нерівність (16) як рівність. Всі переставлення з множини $E_{kv}(G)$, що задовольняють умови (3), (4), задовольняють і (16).

Доведення. В формулі (16) при підстановці в неї точки y^* всі змінні в лівій частині дорівнюють нулю як небазисні в точці y^* змінні. Отже з (16) в y^* маємо $0\geq 1$, що свідчить про те, що координати точки y^* нерівність (16) не задовольняють. За побудовою (див. [17]) суміжної з точкою y^* вершини $\bar{y}$ допустимого многогранника ДЗЛП в точці $\bar{y}$ будемо мати такі координати з тих, що входять в формулу (16): деяка координата y_{i_j} (для кожної з γ точок $\bar{y}$ своя), $i_j\in J$, $\forall j\in J_\gamma$, $\gamma=|J|$, дорівнює числу θ_{i_j}, що обчислюється за (17), а усі інші координати точки $\bar{y}$ з (16) – нульові. Тобто в довільній суміжній з y^* вершині $\bar{y}$ допустимого многогранника ДЗЛП нерівність (16) приймає вигляд:

$$\frac{\theta_{i_j}}{\theta_{i_j}}+0+...+0\geq 1,$$

або $1\equiv 1$. Оскільки множина переставлень $E_{kv}(G)$ елементів з G є вершинно розташованою, то жодного переставлення, що не лежить в вершині допустимого многогранника ДЗЛП, немає. Теорема доведена.

Теорема 2. (Критерій переходу на гіпергрань переставного многогранника в методі комбінаторного відсікання). Нерівність-відсікання в першому або другому методі комбінаторного відсікання в задачах на множині переставлень $E_k(G)$, яка (нерівність) має вигляд:

$$\sum_{j=1}^{k} a_j x_j \le b \tag{19}$$

визначає гіпергрань $\sum_{j=1}^{k} a_j x_j = b$ многогранника $\Pi_k(G) = conv\, E_k(G)$, якщо і тільки якщо:

1) $$a_j \in \{0,1\},\ \forall j \in J_k; \tag{20}$$

2) $$b = \sum_{j=1}^{t} g_j \tag{21}$$

або

$$b = \sum_{j=1}^{t} g_{k-j+1}, \tag{22}$$

де

$$t = \sum_{j=1}^{k} a_j. \tag{23}$$

Доведення. Як відомо [3, 4], гіпергрань многогранника $\Pi_k(G)$ визначаються нерівностями (8), або з урахуванням рівності (9) за умови (10) нерівностями, еквівалентними (8):

$$\sum_{i \in \omega} x_i \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{k-j+1},\ \forall \omega \subset J_k,\ |\omega| < k \tag{24}$$

і тільки цими нерівностями.

В системі, що описує $\Pi_k(G)$, при виконанні умов теореми є нерівність, що відрізняється від (19) знаком.

Якщо нерівність (19) (а це, нагадаємо, правильне відсікання) мала той же знак, що і нерівність з (8) або (24), яка має такі ж ліву і праву частину, що і (19), то така нерівність нічого б не відсікала від $\Pi_k(G)$, тобто не була правильним відсіканням.

Це і означає необхідність і достатність умов (19)-(23).

Отже гіпергрань в $\Pi_k(G)$ визначається за умов (20)-(231) рівністю

$$\sum_{j=1}^{k} a_j x_j = b. \tag{25}$$

Теорема 3. (Критерій переходу на гіпергрань загального переставного многогранника в методі комбінаторного відсікання). Нерівність-відсікання (19) в першому або другому методі комбінаторного відсікання в задачах на загальній множині переставлень $E_{kv}(G)$, де мультимножина G має основу $S(G)=(e_1,...,e_v)$ та первинну специфікацію $[\eta_1,...,\eta_v]$, визначає гіпергрань (25) многогранника $\Pi_{kv}(G)=conv E_{kv}(G)$, якщо і тільки якщо виконуються умови (20)-(23), а також:

1) якщо $\eta_1>1$, то t, що обчислюється за (23), таке:

$t\in J_k\setminus\{2,3,...,\eta_1\}$;

2) якщо $\eta_v>1$, то t за (23) таке:

$t\in J_k\setminus\{k-\eta_v,k-\eta_v+1,...,k-2\}$

Доведення. Як відомо [4, 19], якщо $\eta_1>1$, то надлишковими нерівностями в системі (8), що описує $\Pi_{kv}(G)$, є нерівності спілок [4, 19] з номерами з множини $\{2,3,...,\eta_1\}$. У випадку $\eta_v>1$ надлишковими в (8) за [4, 19] є нерівності спілок з номерами $\{k-\eta_v,k-\eta_v+1,...,k-2\}$. Як показано в [19], інших надлишкових нерівностей система (8) не має.

Далі доведення повторює доведення теореми 3 з заміною многогранника $\Pi_k(G)$ на $\Pi_{kv}(G)$, та посиланням на [19], де визначені всі гіперграні загального переставного многогранника.

Твердження 4. Перехід на грань в другому методі комбінаторного відсікання на множині переставлень $E_k(G)$ відбувається не раніше, ніж через k_B відсікань, де

$$k_B=k!\ \cancel{(k}\ \ 1)! \qquad (26)$$

Доведення. Щоб перейти на грань треба відсікти всі вершини, крім вершини грані, на яку переходять.

Перший доданок в (26) – це кількість вершин (переставлень) в множині E_k. В цій формулі віднімається максимально можлива кількість вершин на гіпергрань многогранника Π_k.

В многограннику переставлень Π_k без повторень очевидно максимальна кількість вершин є на гіперграні вигляду:

$$x_i=g_1$$

або

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} x_j = \sum_{j=2}^{k} g_j$$

(чи на грані $x_i = g_k$, або $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} x_j = \sum_{j=1}^{k-1} g_j$), тобто $(k-1)!$

Зауваження 4. Перевірити порівнянням з системами, що описують переставний многогранник, що відсікання дає грань, це $2^k - 1$ порівнянь рівнянь у випадку Π_k, та за [19] $k(\Gamma_{k-2}) = C_k^{i_1} + \ldots + C_k^{i_j} + \ldots + C_k^{i_s}$ порівнянь у випадку Π_{kv}, де $i_j \in J_{k-1} \setminus \{\{J_{\eta_1} \setminus \{1\}\} \cup \{J_{k-2} \setminus J_{k-\eta_s-1}\}\}$, $\forall j \in J_s$.

IV. Висновки

В роботі розглянуто комбінаторна транспортна задача на переставленнях. Для класу задач, до якого вона відноситься – умовних задачах з лінійною цільовою функцією на множині переставлень,– обґрунтовано другий метод комбінаторного відсікання.

Як напрям подальших досліджень доцільно розглянути можливість приєднання необхідних та відкидання спрацювавших та вже зайвих обмежень, що дозволить, і в другому і в першому методах відсікання [5] значно збільшити вимірність задач, що можуть бути розв'язані.

Література

1. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – К.: Наук. думка, 1988. – 472 с.
2. Сергиенко И.В., Шило. В.П. Задачи дискретной оптимизации: Проблемы, методы, решения, исследования. – К.: Наук. думка, 2003. - 265 с.
3. Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: Учебн. пособие. – К.: УМК ВО, 1992. – 92 с.
4. Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – Київ: Інститут систем. досліджень освіти, 1993. – 188с.
5. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи: Монографія – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с.
6. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями: Монографія. – К.: Наук. думка, 2005. – 117 с.

7. Ємець О.О., Роскладка О.В. Задачі оптимізації на полі комбінаторних множинах: властивості та розв'язування: Монографія. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. – 129 с.

8. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях: Монография. – К.: Наук. думка, 2008. – 159 с.

9. Емец О.А. Об одном методе отсечений для задач комбинаторной оптимизации // Экономика и матем. методы. – 1997. – Т. 33, вып. 4. – С. 120-129.

10. Ємець О.О., Ємець Є.М. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задач евклідової комбінаторної оптимізації // Доп. НАН України. – 2000. - № 9. – С. 105-109.

11. Емец О.А., Емец Е.М. Отсечения в линейных частично комбинаторных задачах оптимизации на перестановках // Экономика и матем. методы. – 2001. – Т. 37. – С.118-121.

12. Емец О.А., Колечкина Л.Н. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными линейными ограничениями на перестановках // Кибернетика и систем. анализ. – 2004. – №3. – С.30-43.

13. Ємець О.О., Чілікіна Т.В. Нелінійні задачі комбінаторної оптимізації на вершинно розташованих множинах та їх розв'язування // Динамические системы. – 2004. – Вып. 18. – Симферополь: Тавр. нац. университет. – С. 160-165.

14. Емец О.А., Емец Е.М. Модификация метода комбинаторного отсечения в задачах оптимизации на вершинно расположенных множествах // Кибернетика и сист. анализ. – 2009. - № 5. – С. 129-136.

15. Ємець О.О., Парфьонова Т.О. Транспортні задачі комбінаторного типу // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. – 2005. – Вып. 29. – С. 162-164.

16. Ємець О.О., Парфьонова Т.О. Наближений метод для розв'язування комбінаторних транспортних задач // Радиоэлектроника и информатика. – 2006. - № 2. – С. 39-41.

17. Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В. С., Тюптя В. И. Математические методы исследования операций. Учебн. пособие для вузов. - К: Вища школа, 1979. - 312 с.

18. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986. - 319 с.