ISSN 1810-0546

НАУКОВІ ВІСТІ

2008 • 5

НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ЕКОНОМІКА
ТА ОРГАНІЗАЦІЯ
ВИРОБНИЦТВА

ЕЛЕКТРОНІКА,
РАДІОТЕХНІКА ТА ЗАСОБИ
ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ

ЕНЕРГЕТИКА
ТА ЕНЕРГОГЕНЕРУЮЧІ
ТЕХНОЛОГІЇ

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ,
СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ
ТА КЕРУВАННЯ

МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО
ТА МАШИНОБУДУВАННЯ

ПРИЛАДОБУДУВАННЯ
ТА ІНФОРМАЦІЙНО-
ВИМІРЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

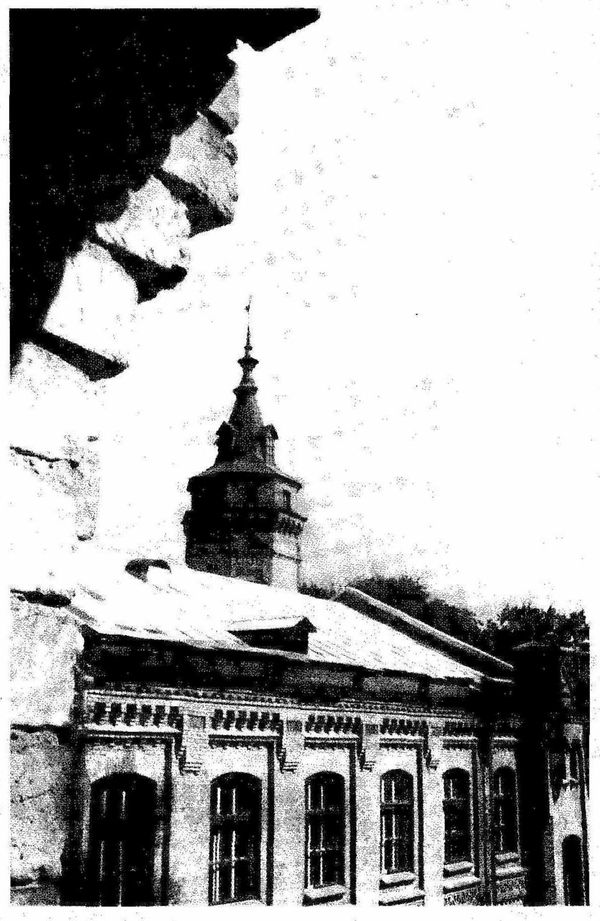
ПРОБЛЕМИ
БІОТЕХНОЛОГІЇ

ПРОБЛЕМИ
ЕНЕРГОЗБЕРЕЖЕННЯ

ПРОБЛЕМИ ХІМІЇ
ТА ХІМІЧНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ

СОЦІАЛЬНІ ТА ГУМАНІТАРНІ
ПРОБЛЕМИ ОСВІТИ

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ
ПРОБЛЕМИ ФІЗИКО-
МАТЕМАТИЧНИХ НАУК



ЗМІСТ

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА КЕРУВАННЯ

УДК 519.85

О.О. Ємець, Ол-ра О. Ємець

ОПЕРАЦІЇ І ВІДНОШЕННЯ НАД НЕЧІТКИМИ ЧИСЛАМИ

Вступ

З подальшим розвитком комбінаторної оптимізації [1–15] виникає проблема більш адекватного врахування даних, які описують ті чи інші явища, об'єкти, моделі. Дану проблему можна розв'язати, враховуючи різні види невизначеності. Зокрема, це можна зробити з використанням апарата нечітких множин [16].

У [16, 17] і багатьох інших працях розглядалися операції над нечіткими числами як операції над нечіткими множинами. Але для моделювання задач комбінаторної оптимізації це ще не дає можливості будувати моделі, тому в [18, 19] розпочато дослідження цих питань.

Уявляється, зокрема, за необхідне ввести операцію додавання нечітких чисел, характеристичну функцію нечіткого числа, відношення впорядкованості масиву нечітких чисел та дослідити їх властивості.

Постановка задачі

Мета статті – за допомогою нечітких чисел розробити апарат, який дав би можливість формалізувати невизначеність даних у задачах евклідової комбінаторної оптимізації і, зокрема, при моделюванні задач знаходити суму нечітких чисел, максимальне і мінімальне нечітке число, а також порівнювати нечіткі числа між собою.

Операції і відношення над нечіткими числами та їх властивості

Введемо поняття нечіткого числа.

***Означення* 1.** Нечітким числом a називають нечітку множину $a=\{(a_1|\mu_1),\ldots,(a_k|\mu_k)\}$, де $\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ ($a_i\in R^1$ $\forall i\in J_k$) – носій нечіткої множини, $\{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k\}$ ($\mu_i\in R^1$ $\forall i\in J_k$) – множина значень функції приналежності, $0\le\mu_i\le 1$ $\forall i\in J_k$ [16, 18]. Тут і надалі J_k позначаємо множину перших k натуральних чисел.

Зауважимо, що дійсне число α можна зобразити як нечітке число $a=\{(\alpha|1,0)\}$.

Введемо поряд із поняттями суми та лінійної впорядкованості нечітких чисел поняття характеристичної функції (функціоналу) $H(x)$ нечіткого числа x як $H(x): X\to R^1$, яка діє з множини нечітких чисел X в R^1 (в множину дійсних чисел) та узагальнює такі метричні властивості дійсного числа:

1) при $x\in R^1$ повинна виконуватись рівність $H(x)=x$;

2) для введеної певним чином лінійної впорядкованості $\prec$ на множині нечітких чисел X має виконуватись правило: якщо $x\prec y$, то $H(x)\le H(y)$ та якщо $H(x)\le H(y)$, то $x\prec y$;

3) для введеної певним чином суми $x+y$ нечітких чисел $x,y\in X$ повинна виконуватись рівність $H(x+y)=H(x)+H(y)$;

4) для суми нечітких чисел має виконуватись правило: якщо $x\prec y$, то $x+z\prec y+z$.

Таким чином, необхідно ввести поняття суми, лінійної впорядкованості і характеристичної функції, які б відповідали переліченим властивостям.

Введемо поняття суми нечітких чисел.

Суму $A+B$ двох нечітких чисел $A=\{(a_1|\mu_1^A),\ldots,(a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$ і $B=\{(b_1|\mu_1^B),\ldots,(b_\beta|\mu_\beta^B)\}$ утворимо за допомогою побудови множини пар

$$\tilde{C}=\{(\tilde{c}_1|\mu_1^{\tilde{C}}),\ldots,(\tilde{c}_\eta|\mu_\eta^{\tilde{C}})\}=$$

$$=\left\{\left(a_1+b_1\left|\frac{\mu_1^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\ldots,\left(a_1+b_\beta\left|\frac{\mu_1^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\right.$$

$$\left(a_2+b_1\left|\frac{\mu_2^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\ldots,\left(a_2+b_\beta\left|\frac{\mu_2^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\ldots$$

$$\left.\ldots,\left(a_\alpha+b_1\left|\frac{\mu_\alpha^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\ldots,\left(a_\alpha+b_\beta\left|\frac{\mu_\alpha^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right)\right\}.\quad(1)$$

Перші елементи $\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_\eta$, де $\eta=\alpha\beta$, цих пар утворюють мультимножину $\tilde{C}^*=\{\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_\eta\}$. Основа $S(\tilde{C}^*)$ мультимножини $\tilde{C}^*$: $S(\tilde{C}^*)=\{c_1,\dots,c_r\}$ це носій нечіткого числа $A+B=\{(c_1|\mu_1),\dots,(c_r|\mu_r)\}$. Значення функції належності знаходиться за правилом

$$\mu_t=\sum_{\forall i\in J_\eta:\ \tilde{c}_i=\tilde{c}}\mu_i^{\tilde{C}},\ i\in J_\eta,\ t\in J_r, \qquad (2)$$

тобто значення μ_t визначається як сума таких чисел $\mu_i^{\tilde{C}}$, для яких $\tilde{c}_i=c_t$, а r – число різних елементів в $\tilde{C}^*$.

Отже, можна дати таке означення.

***Означення* 2.** Сумою $A+B$ двох нечітких чисел A і B називається нечітке число $C=\{(c_1|\mu_1),\dots,(c_r|\mu_r)\}$, де $\{c_1,\dots,c_r\}=S(\tilde{C}^*)$ – основа мультимножини $\{\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_\eta\}$. Число C визначається за правилом (1), а значення μ_t – за правилом (2).

Наведемо приклад знаходження суми двох нечітких чисел.

***Приклад* 1.** Знайти суму двох нечітких чисел $A=\{(1|0,4),(2|0,6)\}$ і $B=\{(3|0,9),(4|0,6)\}$.

Спочатку знайдемо суми $\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A$ і $\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B$, що використовуються у формулі (1). Поклавши $\alpha=\beta=2$, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{2}\mu_i^A=0,4+0,6=1,\ \sum_{j=1}^{2}\mu_j^B=0,9+0,6=1,5.$$

Збудуємо множину пар $\tilde{C}$ за правилом (1):

$$\tilde{C}=\left\{\left(a_1+b_1\left|\frac{\mu_1^A}{\sum_{i=1}^{2}\mu_i^A}\frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{2}\mu_j^B}\right.\right),\left(a_1+b_2\left|\frac{\mu_1^A}{\sum_{i=1}^{2}\mu_i^A}\frac{\mu_2^B}{\sum_{j=1}^{2}\mu_j^B}\right.\right),\right.$$

$$\left.\left(a_2+b_1\left|\frac{\mu_2^A}{\sum_{i=1}^{2}\mu_i^A}\frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{2}\mu_j^B}\right.\right),\left(a_2+b_2\left|\frac{\mu_2^A}{\sum_{i=1}^{2}\mu_i^A}\frac{\mu_2^B}{\sum_{j=1}^{2}\mu_j^B}\right.\right)\right\}=$$

$$=\left\{\left(1+3\left|\frac{0,4}{1}\frac{0,9}{1,5}\right.\right),\left(1+4\left|\frac{0,4}{1}\frac{0,6}{1,5}\right.\right),\right.$$

$$\left.\left(2+3\left|\frac{0,6}{1}\frac{0,9}{1,5}\right.\right),\left(2+4\left|\frac{0,6}{1}\frac{0,6}{1,5}\right.\right)\right\}=$$

$$=\{(4|0,24),(5|0,16),(5|0,36),(6|0,24)\}.$$

Перші елементи множини пар $\tilde{C}$ утворюють мультимножину $\{4,5,5,6\}$. Основа мультимножини – $S(\tilde{C}^*)=\{4,5,6\}$. Згідно з правилом (2), для елемента 5 функція приналежності дорівнює сумі $0,16+0,36$. Таким чином, сума заданих чисел становить $A+B=\{(4|0,24),(5|0,52),(6|0,24)\}$.

***Означення* 3.** Сумою трьох нечітких чисел $A=\{(a_1|\mu_1^A),\dots,(a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$, $B=\{(b_1|\mu_1^B),\dots,(b_\beta|\mu_\beta^B)\}$ і $D=\{(d_1|\mu_1^D),\dots,(d_\delta|\mu_\delta^D)\}$ називається нечітке число $A+B+D=E+D$, де $E=A+B$.

Твердження 1. Операція додавання нечітких чисел комутативна, тобто $A+B=B+A$.

Доведення. При утворенні множини пар $\tilde{C}$ використовуються такі операції: додавання a_i+b_j і знаходження добутку $\frac{\mu_i^A}{\sum_{k=1}^{\alpha}\mu_k^A}\frac{\mu_j^B}{\sum_{t=1}^{\beta}\mu_t^B}$, $i\in J_\alpha$, $j\in J_\beta$. Оскільки ці операції комутативні, тобто

$$a_i+b_j=b_j+a_i,$$

$$\frac{\mu_i^A}{\sum_{k=1}^{\alpha}\mu_k^A}\frac{\mu_j^B}{\sum_{t=1}^{\beta}\mu_t^B}=\frac{\mu_j^B}{\sum_{t=1}^{\beta}\mu_t^B}\frac{\mu_i^A}{\sum_{k=1}^{\alpha}\mu_k^A},$$

то множина пар $\tilde{C}^{A+B}$, отримана при додаванні чисел A і B, буде ідентична множині пар $\tilde{C}^{B+A}$, отриманій при додаванні чисел B і A.

Твердження 2. Операція додавання нечітких чисел асоціативна, тобто $(A+B)+D=A+(B+D)$.

Доведення. При утворенні множини пар $\tilde{C}$ використовуються такі операції: додавання $(a_i+b_j)+d_k$ і знаходження добутку

$\left(\frac{\mu_i^A}{\sum_{s=1}^{\alpha}\mu_s^A}\frac{\mu_j^B}{\sum_{t=1}^{\beta}\mu_t^B}\right)\frac{\mu_k^D}{\sum_{r=1}^{\delta}\mu_r^D}$. Оскільки ці операції асоціативні, тобто

$$(a_i+b_j)+d_k=a_i+(b_j+d_k),$$

$$\left(\frac{\mu_i^A}{\sum_{s=1}^{\alpha}\mu_s^A}\frac{\mu_j^B}{\sum_{t=1}^{\beta}\mu_t^B}\right)\frac{\mu_k^D}{\sum_{r=1}^{\delta}\mu_r^D}=\frac{\mu_i^A}{\sum_{s=1}^{\alpha}\mu_s^A}\left(\frac{\mu_j^B}{\sum_{t=1}^{\beta}\mu_t^B}\frac{\mu_k^D}{\sum_{r=1}^{\delta}\mu_r^D}\right),$$

$$i\in J_\alpha,\ j\in J_\beta,\ k\in J_\delta,$$

то множина пар $\tilde{C}^{(A+B)+D}$ буде ідентична множині пар $\tilde{C}^{A+(B+D)}$.

Аналогічно визначається сума будь-якої кількості нечітких чисел $a_1,\ldots,a_n$:

$$a_1+\ldots+a_n=(a_1+\ldots+a_{n-1})+a_n,\ n\geq 3.$$

З останніх тверджень випливає, що суму n нечітких чисел $a_i=\{(g_1^i|\mu_1^i),\ldots,(g_{q_i}^i|\mu_{q_i}^i)\}$, $i\in J_n$, можна визначати ітеративно, тобто спочатку знайти суму двох нечітких чисел, потім до неї додати третє нечітке число і т.д. Оскільки операція додавання нечітких чисел є комутативною (див. твердження 1) і асоціативною (див. твердження 2), то порядок додавання n чисел значення не має.

Дамо один із можливих варіантів означення характеристичної функції (функціоналу) $H(x)$ нечіткого числа x $H(x):X\to R^1$.

***Означення* 4.** Характеристичною функцією (функціоналом) $H(x):X\to R^1$ нечіткого числа $A=\{(a_1|\mu_1^A),\ldots,(a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$, називається функція, яка нечіткому числу $A\in X$ ставить у відповідність число $H(A)\in R^1$ за правилом

$$H(A)=\frac{\sum_{i=1}^{\alpha}a_i\mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}. \tag{3}$$

Нехай задано два нечіткі числа: $A=\{(a_1|\mu_1^A),\ldots,(a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$ і $B=\{(b_1|\mu_1^B),\ldots,(b_\beta|\mu_\beta^B)\}$.

Введемо позначимо: $a=\{a_1,\ldots,a_\alpha\}$, $b=\{b_1,\ldots,b_\beta\}$, $u=a\cup b=\{u_1,\ldots,u_\gamma\}$. Тоді число A можна записати у вигляді

$$A^u=\{(u_1|\mu_1^{A^u}),\ldots,(u_\gamma|\mu_\gamma^{A^u})\},$$

де

$$\mu_i^{A^u}=\begin{cases}\mu_j^A, \text{ якщо } u_i=a_j\in a,\\ 0, \text{ якщо } u_i\notin a,\end{cases}$$

а число B – у вигляді

$$B^u=\{(u_1|\mu_1^{B^u}),\ldots,(u_\gamma|\mu_\gamma^{B^u})\},$$

де

$$\mu_i^{B^u}=\begin{cases}\mu_j^B, \text{ якщо } u_i=b_j\in b,\\ 0, \text{ якщо } u_i\notin b.\end{cases}$$

Дамо означення впорядкованості нечітких чисел.

***Означення* 5.** Два нечіткі числа A і B називаються *впорядкованими за зростанням* ($A<B$), якщо:

а) або $\frac{\sum_{i=1}^{\alpha}a_i\mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}<\frac{\sum_{j=1}^{\beta}b_j\mu_j^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}$, тобто тоді, коли $H(A)<H(B)$;

б) або $H(A)=H(B)$, тобто $\frac{\sum_{i=1}^{\alpha}a_i\mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}=\frac{\sum_{j=1}^{\beta}b_j\mu_j^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}$, але $\mu_1^{A^u}=\mu_1^{B^u},\ldots,\ \mu_k^{A^u}=\mu_k^{B^u},\ \mu_{k+1}^{A^u}<\mu_{k+1}^{B^u}$ $(k<\gamma)$; тоді будемо говорити, що *A передує B за зростанням.*

***Приклад* 2.** Визначити впорядкованість чисел $A=\{(1|0,4),(2|0,6)\}$ і $B=\{(3|0,9),(4|0,6)\}$.

Спочатку знайдемо суми $\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A$, $\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B$.

Покладемо $\alpha=\beta=2$. Тоді матимемо

$$\sum_{i=1}^{2}\mu_i^A = 0,4+0,6=1, \ \sum_{j=1}^{2}\mu_j^B = 0,9+0,6=1,5.$$

Знайдемо $H(A)$ і $H(B)$:

$$H(A)=\frac{\sum_{i=1}^{2}a_i\mu_i^A}{\sum_{i=1}^{2}\mu_i^A}=\frac{1\cdot 0,4+2\cdot 0,6}{1}=1,6,$$

$$H(B)=\frac{\sum_{j=1}^{2}b_j\mu_j^B}{\sum_{j=1}^{2}\mu_j^B}=\frac{3\cdot 0,9+4\cdot 0,6}{1,5}=\frac{5,1}{1,6}=3,1875.$$

Отже, згідно з означенням (5а), $A<B$, $H(A)<H(B)$.

Тут і далі (5а), (5б), (6а), (6б) означає: згідно з означенням 5 (або 6) пункта а (або б), відповідно.

***Означення* 6.** Два нечіткі числа A і B називаються впорядкованими за неспаданням (позначається $A \prec B$), якщо:

а) або $A<B$;

б) або $A=B$, тобто тоді, коли $a_i=b_i$ і $\mu_i^A=\mu_i^B\ \forall i$.

Покажемо, що впорядкованість $\prec$ є лінійною.

Твердження 3. Впорядкованість $\prec$, введена означеннями 5 і 6, є рефлексивною, антисиметричною і транзитивною, тобто лінійною.

Доведення. Розглянемо конкретно ці властивості впорядкованості:

1) впорядкованість $\prec$ є рефлексивною: $A \prec A$ (згідно з означенням 6);

2) антисиметричність – це, якщо $A \prec B$, $B \prec A$, то $A=B$. Одночасно $A \prec B$ і $B \prec A$ для введеної впорядкованості $\prec$ можливі лише у випадку означення 6 (б), тобто коли $A=B$, отже впорядкованість є антисиметричною;

3) транзитивність – це, якщо $A \prec B$, $B \prec C$, то $A \prec C$. Можливі наступні випадки для пари A, B: $A<B$ (5а); $A<B$ (5б); $A=B$ (6б); для пари B, C: $B<C$ (5а); $B<C$ (5б); $B=C$ (6б).

Таким чином, можливі дев'ять пар ситуацій:

1) $A<B$ (5а), $B<C$ (5а), $H(A)<H(B)$, $H(B)<H(C)$. З цього випливає, що $H(A)<$ $<H(B)$, $A<C$ за означенням (5а), отже, $A \prec C$;

2) $A<B$ (5а), $B<C$ (5б), $H(A)<H(B)$, $H(B)=H(C)$. Звідси випливає, що $H(A)<$ $<H(C)$ за означенням (5а), значить, $A \prec C$;

3) $A<B$ (5а), $B=C$ (6б), $H(A)<H(B)$, $H(B)=H(C)$, звідки $H(A)<H(C)$ за означенням (5а), отже, $A \prec C$;

4) $A<B$ (5б), $B<C$ (5а), $H(A)=H(B)$, $H(B)<H(C)$. З цього випливає, що $H(A)<$ $<H(C)$ за означенням (5а), отже, $A \prec C$;

5) $A<B$ (5б), $B<C$ (5б), $H(A)=H(B)$, $H(B)=H(C)$. Звідси маємо $H(A)=H(C)$ за означенням (5б) або (6б), тобто $A \prec C$;

6) $A<B$ (5б), $B=C$ (6б), $H(A)=H(B)$, $H(B)=H(C)$. З цього випливає, що $H(A)=$ $=H(C)$ за означенням (5б) або (6б), тобто $A \prec C$;

7) $A=B$ (6б), $B<C$ (5а), $H(A)=H(B)$, $H(B)<H(C)$. Звідси маємо $H(A)<H(C)$ за означенням (5а), тобто $A \prec C$;

8) $A=B$ (6б), $B<C$ (5б), $H(A)=H(B)$, $H(B)=H(C)$, звідки маємо $H(A)=H(C)$ за означенням (5б) або (6б), тобто $A \prec C$;

9) $A=B$ (6б), $B=C$ (6б), тобто $A=C$ (відношення рівності двох нечітких чисел, очевидно, є транзитивним). Значить, $A \prec C$.

Отже, доведено, що у всіх дев'яти випадках транзитивність справджується.

Тому доведено, що впорядкованість $\prec$ є лінійною.

Покажемо, що для введеної в такий спосіб характеристичної функції, операції додавання і лінійної впорядкованості мають місце зазначені вище властивості.

Твердження 4. Якщо $x \in R^1$, то $H(x)=x$.

Доведення. Якщо x є дійсним числом, то x має вигляд $x=\{(x|1)\}$, а характеристична функція $H(x)$ набуває вигляду $H(x)=\frac{x\cdot 1}{1}=x$, що і слід було довести.

Твердження (теорема) 5. Для будь-яких двох нечітких чисел $A=\{(a_1|\mu_1^A),\dots,(a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$, $B=$ $=\{(b_1|\mu_1^B),\dots,(b_\beta|\mu_\beta^B)\}$ і характеристичної функції H, заданої за правилом (3), має місце рівність

$$H(A+B)=H(A)+H(B). \tag{4}$$

Доведення. Знайдемо суму чисел A і B:

$$A+B=\left\{\left(a_1+b_1\left|\frac{\mu_1^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_1^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\dots,\left(a_1+b_\beta\left|\frac{\mu_1^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_\beta^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\dots\right.$$

$$\left.\dots,\left(a_\alpha+b_1\left|\frac{\mu_\alpha^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_1^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\dots,\left(a_\alpha+b_\beta\left|\frac{\mu_\alpha^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_\beta^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right)\right\}.$$

Знайдемо характеристичну функцію $H(A+B)$:

$$H(A+B)=\left((a_1+b_1)\frac{\mu_1^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_1^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\right.$$

$$+\dots+(a_1+b_\beta)\frac{\mu_1^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_\beta^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+$$

$$+\dots+(a_\alpha+b_1)\frac{\mu_\alpha^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_1^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+$$

$$\left.+\dots+(a_\alpha+b_\beta)\frac{\mu_\alpha^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_\beta^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right)\left(\frac{\mu_1^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_1^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\right.$$

$$+\dots+\frac{\mu_1^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_\beta^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\dots+\frac{\mu_\alpha^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_1^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+$$

$$\left.\dots+\frac{\mu_\alpha^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_\beta^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right)^{-1}. \qquad (5)$$

Легко помітити, що знаменник виразу (5) дорівнює 1. Спростивши чисельник виразу (5), отримаємо $H(A)+H(B)$.

Отже, вираз (5) набуває вигляду $H(A+B)=$ $=H(A)+H(B)$, що і треба було довести.

Твердження (теорема) 6. Для будь-яких трьох нечітких чисел $x=\{(x_1|\mu_1^x),\dots,(x_\alpha|\mu_\alpha^x)\}$, $y=\{(y_1|\mu_1^y),\dots,(y_\beta|\mu_\beta^y)\}$, $\{(z_1|\mu_1^z),\dots,(z_\gamma|\mu_\gamma^z)\}$, таких, що $\sum\limits_{k=1}^{\alpha}\mu_k^x=\sum\limits_{k=1}^{\beta}\mu_k^y=\sum\limits_{k=1}^{\gamma}\mu_k^z=1$, $x_1<\dots<x_\alpha$, $y_1<\dots<y_\beta$, $z_1<\dots<z_\gamma$, виконується правило: якщо $x\prec y$, то $x+z\prec y+z$.

Доведення. Якщо $x\prec y$, то за означенням лінійної впорядкованості виконується нерівність

$$H(x)\le H(y). \qquad (6)$$

Отже, за твердженням 5 маємо

$$H(x+z)=H(x)+H(z),$$

$$H(y+z)=H(y)+H(z).$$

Оскільки виконується (6), то

$$H(x)+H(z)\le H(y)+H(z),$$

$$H(x+z)\le H(y+z).$$

За означенням, якщо $H(x+z)<H(y+z)$, то $x+z\prec y+z$.

Якщо $x+z=y+z$ (значить, $H(x+z)=$ $=H(y+z)$), то $x+z\prec y+z$.

У випадку $H(x+z)=H(y+z)$, $x+z\ne y+z$, тобто $x\ne y$, маємо

$$\exists i\ \ \mu_1^{x^u}=\mu_1^{y^u},\dots,\ \mu_i^{x^u}=\mu_i^{y^u},\ \mu_{i+1}^{x^u}<\mu_{i+1}^{y^u}.$$

Покажемо, що в цьому випадку

$$\exists j\ \ \mu_1^{x^u+z^u}=\mu_1^{y^u+z^u},\dots,\ \mu_j^{x^u+z^u}=\mu_j^{y^u+z^u},$$

але $\mu_{j+1}^{x^u+z^u}<\mu_{j+1}^{y^u+z^u}$.

Нехай $U=\{u_1,\dots,u_\delta\}=\{x_1,\dots,x_\alpha\}\cup\{y_1,\dots,y_\beta\}\cup$ $\cup\{z_1,\dots,z_\gamma\}$, $u_1<\dots<u_\delta$. Тоді числа x, y, z можна записати у вигляді

$$x^u=\{(u_1|\mu_1^{x^u}),\dots,(u_\delta|\mu_\delta^{x^u})\},$$

$$y^u = \{(u_1 | \mu_1^{y^u}), \ldots, (u_\delta | \mu_\delta^{y^u})\},$$

$$z^u = \{(u_1 | \mu_1^{z^u}), \ldots, (u_\delta | \mu_\delta^{z^u})\},$$

$$\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{x^u} = \sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{y^u} = \sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u} = 1.$$

Знайдемо суму $x^u + z^u$. Згідно з означенням 2, маємо

$$x^u + z^u = \left\{ \left(u_1 + u_1 \left| \frac{\mu_1^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{x^u}} \frac{\mu_1^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}} \right. \right), \ldots \right.$$

$$\ldots, \left(u_1 + u_\delta \left| \frac{\mu_1^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{x^u}} \frac{\mu_\beta^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}} \right. \right), \ldots$$

$$\ldots, \left(u_\delta + u_1 \left| \frac{\mu_\delta^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{x^u}} \frac{\mu_1^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}} \right. \right), \ldots$$

$$\left. \ldots, \left(u_\delta + u_\delta \left| \frac{\mu_\delta^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{x^u}} \frac{\mu_\delta^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}} \right. \right) \right\}.$$

Знайдемо суму $y^u + z^u$:

$$y^u + z^u = \left\{ \left(u_1 + u_1 \left| \frac{\mu_1^{y^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{y^u}} \frac{\mu_1^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}} \right. \right), \ldots \right.$$

$$\ldots, \left(u_1 + u_\delta \left| \frac{\mu_1^{y^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{y^u}} \frac{\mu_\beta^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}} \right. \right), \ldots$$

$$\ldots, \left(u_\delta + u_1 \left| \frac{\mu_\delta^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{x^u}} \frac{\mu_1^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}} \right. \right), \ldots$$

$$\left. \ldots, \left(u_\delta + u_\delta \left| \frac{\mu_\delta^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{x^u}} \frac{\mu_\delta^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}} \right. \right) \right\}.$$

Порівнюючи $x^u + z^u$ і $y^u + z^u$, бачимо, що перші елементи пар для обох сум однакові і утворюють матрицю U такого вигляду:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 + u_1 & u_1 + u_2 & \ldots u_1 + u_i & u_1 + u_{i+1} & \ldots u_1 + u_\delta \\ u_2 + u_1 & u_2 + u_2 & \ldots u_2 + u_i & u_2 + u_{i+1} & \ldots u_2 + u_\delta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_i + u_1 & u_i + u_2 & \ldots u_i + u_i & u_i + u_{i+1} & \ldots u_i + u_\delta \\ u_{i+1} + u_1 & u_{i+1} + u_2 & \ldots u_{i+1} + u_i & u_{i+1} + u_{i+1} & \ldots u_{i+1} + u_\delta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_\delta + u_1 & u_\delta + u_2 & \ldots u_\delta + u_i & u_\delta + u_{i+1} & \ldots u_\delta + u_\delta \end{pmatrix}.$$

Проаналізуємо матрицю U:

1) матриця є симетричною відносно головної діагоналі, тобто

$$u_s + u_r = u_r + u_s, \; s \neq r, \; s, r \in J_\delta;$$

2) елементи в кожному рядку і стовпчику впорядковані за зростанням.

Виділимо з матриці U підматрицю U':

$$U' = \begin{pmatrix} u_1 + u_1 & u_1 + u_2 & \ldots & u_1 + u_i \\ u_2 + u_1 & u_2 + u_2 & \ldots & u_2 + u_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_i + u_1 & u_i + u_2 & \ldots & u_i + u_i \end{pmatrix}.$$

Порівняємо функції приналежності сум $x^u + z^u$ і $y^u + z^u$ для елементів під матриці U'.

Елементу $u_s + u_r$, де $s \le i$, $r \le i$, відповідає функція приналежності $\frac{\mu_s^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{x^u}} \frac{\mu_r^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}}$ суми $x^u + z^u$ та $\frac{\mu_s^{y^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{y^u}} \frac{\mu_r^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}}$ суми $y^u + z^u$.

Порівнюючи $\frac{\mu_s^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{x^u}}\frac{\mu_r^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}}$ та $\frac{\mu_s^{y^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{y^u}}\frac{\mu_r^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}}$, бачимо, що:

1) $\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{x^u}=\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{y^u}=\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}=1$;

2) $\mu_r^{z^u}$ входить в обидві порівнювані величини, тому це не впливає на результат;

3) $\mu_s^{x^u}=\mu_s^{y^u}$, оскільки $s\le i$, а нам дано, що $\mu_1^{x^u}=\mu_1^{y^u}$, ..., $\mu_i^{x^u}=\mu_i^{y^u}$.

Таким чином, маємо

$$\frac{\mu_s^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{x^u}}\frac{\mu_r^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}}=\frac{\mu_s^{y^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{y^u}}\frac{\mu_r^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}}\quad \forall s,\ r\in J_i .$$

У матриці U, в тій її частині, в яку не входить підматриця U', найменшим елементом є $u_{i+1}+u_1$, оскільки $u_1<u_2<...<u_\delta$.

Порівняємо функції приналежності для елемента $u_{i+1}+u_1$ сум x^u+z^u і y^u+z^u, а саме величини $\frac{\mu_{i+1}^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{x^u}}\frac{\mu_1^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}}$ і $\frac{\mu_{i+1}^{y^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{y^u}}\frac{\mu_1^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}}$:

1) $\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{x^u}=\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{y^u}=\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}=1$;

2) $\mu_r^{z^u}$ входить в обидві порівнювані величини, тому це не впливає на результат;

3) $\mu_{i+1}^{x^u}<\mu_{i+1}^{y^u}$ – дано за умовою.

Таким чином, робимо висновок, що $\frac{\mu_{i+1}^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{x^u}}\frac{\mu_1^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}}<\frac{\mu_{i+1}^{y^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{y^u}}\frac{\mu_1^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}}$, тобто ми отримали, що

$$\exists j\ \ \mu_1^{x^u+z^u}=\mu_1^{y^u+z^u},\ ...,\ \mu_j^{x^u+z^u}=\mu_j^{y^u+z^{u^u}},$$

але $\mu_{j+1}^{x^u+z^u}<\mu_{j+1}^{y^u+z^u}$. Отже, твердження доведено.

Твердження 7. Маємо $x\prec y$ тоді і тільки тоді, коли $H(x)\le H(y)$.

Доведення. Якщо $H(x)\le H(y)$, то за означенням впорядкованості $\prec$ маємо $x\prec y$. Якщо $x\prec y$, то:

1) або при $x\ne y$ і $H(x)\ne H(y)$ матимемо $H(x)<H(y)$;

2) або при $x\ne y$ $\exists i$ $\mu_1^{x^u}=\mu_1^{y^u}$, ..., $\mu_i^{x^u}=\mu_i^{y^u}$, $\mu_{i+1}^{x^u}<\mu_{i+1}^{y^u}$ і $H(x)=H(y)$;

3) або при $x=y$ $H(x)=H(y)$.

Отже, в усіх можливих випадках з $x\prec y$ випливає, що $H(x)\le H(y)$.

Введемо поняття максимального і мінімального нечіткого числа.

Означення 7. Нечітке число A_1 називається мінімальним серед нечітких чисел A_1, A_2, ..., A_k, якщо $A_1\prec A_2\prec ...\prec A_k$.

Означення 8. Нечітке число A_k називається максимальним серед нечітких чисел A_1, A_2, ..., A_k, якщо $A_1\prec A_2\prec ...\prec A_k$.

Висновки

Розвинуті елементи теорії нечітких множин і операції додавання нечітких чисел та відношення впорядкованості масиву нечітких чисел можуть бути використані при опису систем, об'єктів, явищ та процесів із врахуванням невизначеності. Зокрема, введені поняття, операції і відношення дають можливість будувати математичні моделі задач евклідової комбінаторної оптимізації з нечіткими даними.

Подальші дослідження доцільно спрямовувати на дослідження властивостей введених операцій і відношень, а також на їх використання при опису невизначеностей у складних системах (явищах, об'єктах, процесах).

О.А. Емец, А.О. Емец

ОПЕРАЦИИ И ОТНОШЕНИЯ НАД НЕЧЕТКИМИ ЧИСЛАМИ

Введено понятие характеристической функции нечеткого числа, операции сложения нечетких чи-

Oleg O. Yemets`, Oleksandra O. Yemets`

OPERATIONS AND RELATIONS ON FUZZY NUMBERS

In this paper, we introduce the concept of the characteristic function of a fuzzy number. Through the сел, а также отношения упорядоченности нечетких чисел. Исследованы свойства предложенных операций и отношений. Эти понятия, операции и отношения могут быть использованы при моделировании задач оптимизации с нечеткими данными.

samples provided, we demonstrate the operation of addition and the order relation of fuzzy numbers. Moreover, we study the properties of proposed operations and relations. We determine that these concepts can be used in simulation of optimization problems with indefinite data.

1. *Сергиенко И.В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – К.: Наук. думка, 1988. – 472 с.
2. *Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – К.: Наук. думка, 1981. – 288 с.
3. *Сергиенко И.В., Шило В.П.* Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы исследования, решения. – К.: Наук. думка, 2003. – 264 с.
4. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.
5. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М.* Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. – 104 с.
6. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наук. думка, 1986. – 268 с.
7. *Ємець О.О., Колєчкіна Л.М.* Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними функціями. – К.: Наук. думка, 2005. – 118 с.
8. *Ємець О.О., Роскладка О.В.* Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. – 129 с.
9. *Панішев А.В., Данильченко О.М., Скачков В.О.* Вступ до теорії складності дискретних задач. – Житомир: ЖДТУ, 2004. – 236 с.
10. *Панишев А.В., Плечистый Д.Д.* Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера. – Житомир: ЖГТУ, 2006. – 300 с.
11. *Гуляницький Л.Ф.* Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 01.05.02. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2005. – 32 с.
12. *Гребеннік І.В.* Математичні моделі та методи комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 01.05.02. – Харків: Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного, 2006. – 34 с.
13. *Павлов А.А., Павлова Л.А.* Основы методологии проектирования ПДС-алгоритмов для труднорешаемых комбинаторных задач // Пробл. информатики и управления. – 1995. – № 4. – С. 135–141.
14. *Павлов О.А., Павлова Л.О.* Принцип розпаралелювання обчислень як засіб підвищення ефективності ПДС-алгоритмів для важкорозв'язуваних комбінаторних задач // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 1997. – № 1. – С. 22–26.
15. *Павлов А.А., Ван Инхуэйн Л.В.* Особенности решения *NP*-трудных задач комбинаторной оптимизации // Інформатика та нові технології. – 1997. – № 1. – С. 13.
16. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
17. *Нечеткие* множества и теория возможностей. Последние достижения / Пер. с англ. под ред. Р.Р. Ягера. – М.: Радио и связь, 1986. – 408 с.
18. *Ємець О.О., Роскладка А.А., Ємець Ол-ра О.* Задача евклідової комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності // Зб. наук. праць Хмельницького нац. ун-ту. Сер. Фізико-математичні науки. – 2005. – Вип. 1. – С. 40–45.
19. *Роскладка А.А., Емец А.О.* Решение одной комбинаторной задачи упаковки с учетом неопределенности данных, описанной нечеткими числами // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 2. – С. 132–141.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
3 грудня 2007 року