

# НАУКОВІ ВІСТІ

2008 · 6

ЕКОНОМІКА  
ТА ОРГАНІЗАЦІЯ  
ВИРОБНИЦТВА

ЕЛЕКТРОНІКА,  
РАДІОТЕХНІКА ТА ЗАСОБИ  
ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ

ЕНЕРГЕТИКА  
ТА ЕНЕРГОГЕНЕРУЮЧІ  
ТЕХНОЛОГІЇ

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ,  
СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ  
ТА КЕРУВАННЯ

МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО  
ТА МАШИНОБУДУВАННЯ

ПРИЛАДОБУДУВАННЯ  
ТА ІНФОРМАЦІЙНО-  
ВИМІРЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

ПРОБЛЕМИ  
БІОТЕХНОЛОГІЙ

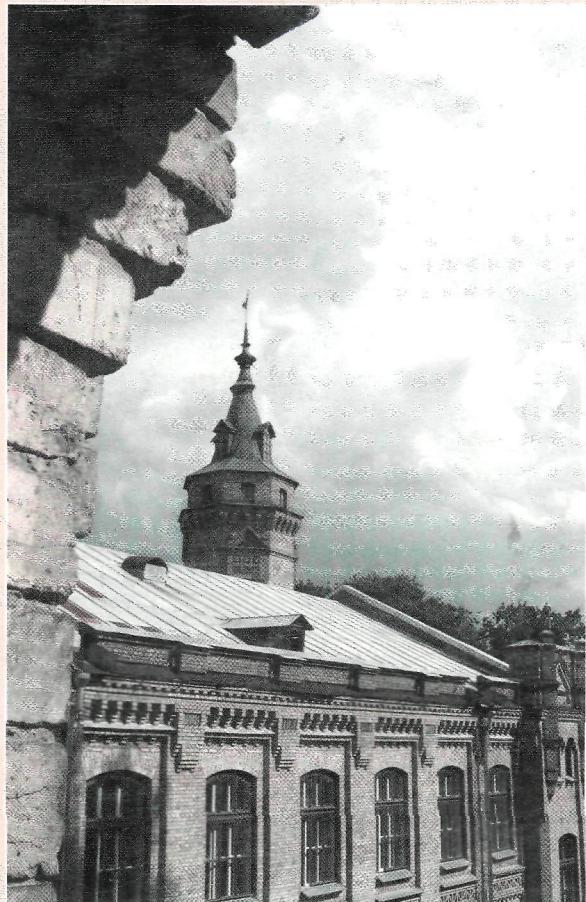
ПРОБЛЕМИ  
ЕНЕРГОЗБЕРЕЖЕННЯ

ПРОБЛЕМИ ХІМІЇ  
ТА ХІМІЧНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ

СОЦІАЛЬНІ ТА ГУМАНІТАРНІ  
ПРОБЛЕМИ ОСВІТИ

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ  
ПРОБЛЕМИ ФІЗИКО-  
МАТЕМАТИЧНИХ НАУК

НАЦІОНАЛЬНОГО  
ТЕХНІЧНОГО  
УНІВЕРСИТЕТУ  
УКРАЇНИ  
«КІЇВСЬКИЙ  
ПОЛІТЕХНІЧНИЙ  
ІНСТИТУТ»



# НАУКОВІ ВІСТІ

Національного технічного університету України  
"Київський політехнічний інститут"

Науково-технічний журнал

№ 6(62)

2008

Започаткований у вересні 1997 року

Редакційна колегія:

Головний редактор  
М.З. Згурівський

Заступник головного  
редактора  
М.Ю. Ільченко

Відповідальний  
секретар  
П.П. Маслянко

Члени редколегії –  
координатори  
наукових напрямків

С.Г. Бунін,  
М.І. Бобир  
В.Ю. Горчаков  
І.А. Дичка,  
О.В. Збручевський  
Б.В. Новіков  
О.М. Новіков  
Є.М. Письменний  
А.В. Праховник  
Д.Ф. Чернега  
О.Г. Юрченко  
Ю.І. Якименко  
  
Редакційна рада

Адреса редакції:  
03056, Київ-56,  
проспект Перемоги, 37,  
Національний технічний  
університет України  
"Київський політехнічний  
інститут",  
Тел. 454-91-23

У номері:

Економіка та організація  
виробництва

Електроніка, радіотехніка та  
засоби телекомунікацій

Інформаційні технології,  
системний аналіз та керування

Матеріалознавство  
та машинобудування

Приладобудування та інформа-  
ційно-вимірювальна техніка

Проблеми біотехнології

Проблеми хімії та хімічної  
технології

Теоретичні та прикладні  
проблеми фізико-математичних  
наук

## ЗМІСТ

### Економіка та організація виробництва

Дергачова В.В. Розвиток фондового ринку України як складової національної інвестиційної політики ..... 5

### Електроніка, радіотехніка та засоби телекомунікацій

Мариненко О.А. Оптичні і пасивувальні властивості нітриду кремнію ..... 14

### Інформаційні технології, системний аналіз та керування

Гриша С.М., Іотко О.А. Стратегічне планування функціональності ERP/MRP-систем із врахуванням множинних заміщень ..... 20

Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Побудова математичної моделі однієї комбінаторної задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами ..... 25

Маслянко П.П., Майстренко О.С. Системна інженерія проектів інформатизації організаційних систем ..... 34

Повещенко Г.П. Динамічні і часові характеристики процесу співіснування ..... 43

### Матеріалознавство та машинобудування

Кулініч А.А. Механічні властивості сплаву ВАЛ11 при різних режимах температурно-часової обробки ..... 51

Легеза В.П. Узагальнення варіаційної задачі про брахістохрону у випадку кочення однорідного циліндра ..... 55

Магазій П.М., Мікульонок І.О., Ружинська Л.І. Модельні дослідження процесів переробки термопластичних матеріалів із застосуванням вторинної сировини ..... 60

Малежик М.П. Числовий перерахунок динамічних напружень з фотопружніх ортотропних моделей на натурне тіло ..... 68

Сахаров О.С., Сівецький В.І., Сокольський О.Л. Дискретні математичні моделі для розрахунку пружнов'язкопластичних середовищ із змінною стисливістю при термосилових навантаженнях ..... 74

Хижняк В.Г., Курило Н.А., Летвицька І.В., Сердитов О.Т. Азототитанування сталей і твердих сплавів ..... 83

### Приладобудування та інформаційно-вимірювальна техніка

Мелащенко О.М., Рижков Л.М. Оптимізація магнітної системи стабілізації мікросупутника за змішаним  $H_2/H_\infty$ -критерієм ..... 89

Міхеєнко Л.А., Микитенко В.І. Методи, засоби та метрологічне забезпечення калібрування еталонних випромінювачів ..... 94

### Проблеми біотехнології

Клечак І.Р., Бісько Н.А., Поєдинок Н.Л., Антоненко Л.О. Закономірності росту перспективних об'єктів біотехнології – базидіоміцетів роду *Coriolus* у поверхневій культурі ..... 100

### Проблеми хімії та хімічної технології

Астрелін І.М., Синюшкін О.М., Іванюк О.В. Лужне вилучення міді з гальванічних шламів ..... 108

Ізотов В.Ю., Громадський Д.Г., Малєтін Ю.А. Моделювання і розрахунок робочих параметрів суперконденсатора ..... 114

Фроленкова С.В., Донченко М.І. Вплив оксоаніонів на анодну і хімічну пасивацію сталі в слабомінералізований воді ..... 119

### Теоретичні та прикладні проблеми фізико-математичних наук

Будигін В.В., Тимошенко О.А. Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь ..... 127

Вірченко Н.О., Заїкіна С.М. Узагальнені інтегральні перетворення і їх застосування ..... 133

Капустян В.О., Когут О.П. Достатні умови стійкості відносно збурень області одного класу задач оптимального керування ..... 138

Касьянов П.О. Періодичні розв'язки для класу диференціально-операторних включень з відображеннями типу  $S_k$  ..... 144

Овчаренко О.В. Асимптотичні розвинення і нові застосування узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса ..... 149

Реферати ..... 155

Автори номера ..... 158

## CONTENTS

<b>Economy and organization of production</b>	
<i>Dergachova V.V.</i> The development of the ukrainian stock market as a part of the national investment policy .....	5
<b>Electronics, radio engineering and telecommunications</b>	
<i>Marinenko O.A.</i> The optical and passivating properties of silicon nitride .....	14
<b>Information technology, system analysis and guidance</b>	
<i>Grysha S.M., Gnatenko N.S.</i> The strategic planning of ERP/MRP-systems functionality with regard to plural substitutions .....	20
<i>Yemets' Oleg O., Yemets' Oleksandra O.</i> The construction of the mathematical model of the one combinatorial problem of rectangles packing with fuzzy sizes .....	25
<i>Maslyanko P.P., Maystrenko O.S.</i> The system engineering of organizational system informatization projects .....	34
<i>Poveshchenko G.P.</i> The dynamic and temporal descriptions of the coexistence process .....	43
<b>Materials science and machine building</b>	
<i>Kylinich A.A.</i> The mechanical properties of alloy VAL-11 at various treatment modes .....	51
<i>Legeza V.P.</i> The generalization of variation problem on brahistochrone in the case of rolling homogeneous cylinder .....	55
<i>Magaziy P.M., Mikulionok I.O., Ruzhinska L.I.</i> The modeling research of thermoplastic materials processing using secondary raw material .....	60
<i>Malezhyk M.P.</i> The numerical recalculation of dynamic stress with photoelastic orthotropic models on a natural body .....	68
<i>Saharov O.S., Sivetskiy V.I., Sokolskiy O.L.</i> The discrete mathematical models for calculation of elastic-visco-plastic environments with variable compressibility at thermopower loadings .....	74
<i>Khizhniak V.G., Kurilo N.A., Letvitska I.V., Serditov O.T.</i> Nitrogenititaning of steels and firm alloys .....	83
<b>Instrument manufacturing and information measuring technology</b>	
<i>Melaschenko O.M., Ryzhkov L.M.</i> The optimization of microsatellite magnetic stabilizing system on the mixed $H_2/H_\infty$ -criterion .....	89
<i>Mikheenko L.A., Mykytenko V.I.</i> The approaches, means and metrological assurance of calibration of the standard radiators .....	94
<b>Problems of biotechnologies</b>	
<i>Klechak I.R., Bisko N.A., Poyedinok N.L., Antonenko L.O.</i> The growth mechanisms of the promising research subjects of biotechnology — basidiomycetes mushrooms of the genus <i>Coriolus</i> on agar mediums .....	100
<b>Problems of chemistry and chemical engineering</b>	
<i>Astrelin I.M., Sinyushkin O.M., Ivanyuk O.V.</i> The alkaline extraction of copper from galvanic dross .....	108
<i>Izotov V.Yu., Gromadskyi D.G., Maletin Yu.A.</i> The modeling and calculation of performance parameters of ultracapacitor .....	114
<i>Frolenkova S.V., Donchenko M.I.</i> The influence of the oxyanions on anodic and chemical steel passivation in poorly mineralized water .....	119
<b>Theoretical and applied problems of physico-mathematical sciences</b>	
<i>Buldygin V.V., Tymoshenko O.A.</i> The asymptotic behaviour of the solutions of stochastic differential equations .....	127
<i>Virchenko N.O., Zaikina S.M.</i> The generalized integral transformations and their application .....	133
<i>Kapustyan V.O., Kogut O.P.</i> The sufficient conditions of the shape stability for perturbation of the one class of optimal control problems .....	138
<i>Kasyanov P.O.</i> The periodic solutions for a class of differential-operator inclusions with $S_k$ type maps .....	144
<i>Ovcharenko O.V.</i> The asymptotic expansions and new application of the generalized hypergeometric Gaussian functions .....	149
Reports .....	155
Contributors to the issue .....	158

УДК 519.85

О.О. Ємець, Ол-ра О. Ємець

## ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ОДНІЄЇ КОМБІНАТОРНОЇ ЗАДАЧІ УПАКУВАННЯ ПРЯМОКУТНИКІВ З НЕЧІТКИМИ РОЗМІРАМИ

### Вступ

У прикладних задачах комбінаторної оптимізації (див., наприклад, [1–8]) часто постає проблема більш адекватного врахування вихідних даних. У більшості праць із комбінаторної оптимізації невизначеність вихідних даних до цих пір не враховується.

Відомі праці, пов’язані з комбінаторною оптимізацією, в яких враховується невизначеність вихідних даних за допомогою інтервальної (див., зокрема, [7]) та стохастичної невизначеностей (див. [9]).

Але на сьогодні в задачах комбінаторної оптимізації немає апарату врахування невизначеності, яка адекватно моделюється нечіткими множинами (див., наприклад, [10]). У працях [11, 12] робляться певні кроки моделювання задачами комбінаторної оптимізації із врахуванням невизначеності нечіткими множинами, вводиться та досліджуються деякі необхідні для цього операції над нечіткими числами.

### Постановка задачі

Мета статті – показати, як враховувати невизначеність даних, заданих нечіткими множинами, при моделюванні задачі геометричного проектування на прикладі задачі упакування прямокутників у смугу.

### Моделювання однієї задачі геометричного проектування

Нехай є деяка напівнескінченна (достатньо довга) смуга, яка розділена на смужки однакової ширини  $h$  (рис. 1). Задано ще  $p$  прямокутників з довжинами  $a_1, \dots, a_p$ , шириною  $h$ . Задача полягає в розміщенні прямокутників без накладань один на одного у смузі на її початку таким чином, щоб довжина зайнятої частини смуги була мінімальною можливою.

Під довжиною зайнятої частини смужки будемо розуміти суму довжин прямокутників, що розміщаються в цій смужці. Серед цих сум виберемо найбільшу. Вона й буде відповідати довжині зайнятої частини смуги.

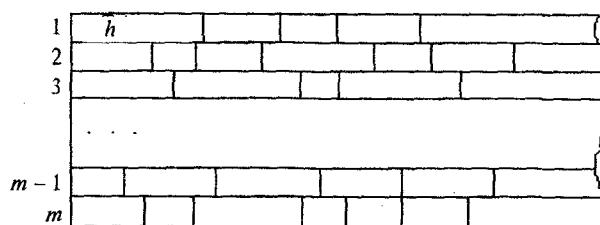


Рис. 1. Ілюстрація задачі упаковки прямокутників

При розгляді питання упакування прямокутників у смугу з метою врахування невизначеності вхідних даних можна метричні характеристики об’єктів розглядати як нечіткі числа.

**Означення 1\*** [12]. Нечітким числом  $a$  називають нечітку множину виду  $a = \{(a_i | \mu_i), \dots, (a_k | \mu_k)\}$ , де  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  ( $a_i \in R^1 \forall i \in J_k$ ) – носій нечіткої множини;  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}$ , ( $\mu_i \in R^1 \forall i \in J_k$ ) – множина значень функції приналежності,  $0 \leq \mu_i \leq 1 \forall i \in J_k$  [10]. Тут і надалі  $J_k$  позначаємо множину перших  $k$  натуральних чисел.

Зауважимо, що дійсне число  $a$  можна представити як нечітке число  $a = \{(a | 1, 0)\}$ .

Розглянемо задачі упакування прямокутників у смугу (або прямокутник, якщо довжина прямокутника така, що її треба враховувати, не вважаючи смугу достатньо довгою – “напівнескінченною”).

Нехай розміри прямокутника (смуги) задаються дійсними числами  $h_0$  і  $d_0$  (рис. 2). Зв’яжемо з нижнім лівим кінцем смуги початок прямокутної декартової системи координат, спрямувавши осі так, як показано на рис. 2.

Розглянемо прямокутник  $\Pi$ , який розміщується в смузі. Розміщення прямокутників будемо розглядати такі, що осі системи координат, зв’язаної з кожним із прямокутників, паралельні осям  $Ox_1 x_2$  (див. рис. 2) та направлені в той же бік.

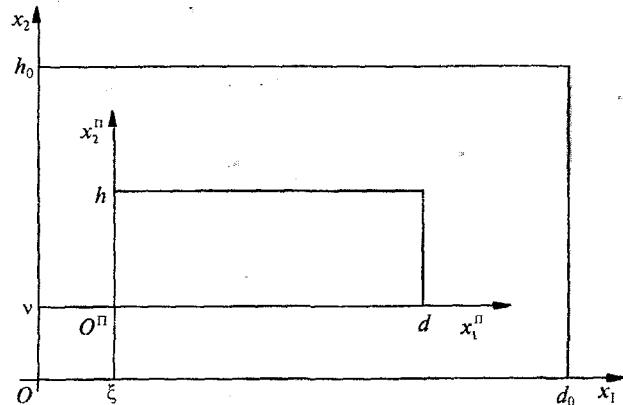


Рис. 2. Розміщення прямокутника  $\Pi$  в смузі

\* Означення 1–6 та деякі поняття взяті із статті [12].

Зручно початок  $O^{\Pi}$  власної системи координат прямокутника поміщати в лівий нижній кут прямокутника. Цю точку  $O^{\Pi}$  прямокутника будемо називати полюсом. Прямокутники розміщатимемо в смузі, щоб його сторони були паралельні (перпендикулярні) сторонам смуги (див. рис. 2). Тоді прямокутник  $\Pi_i$  відносно смуги  $H$  визначається такими параметрами:

$\xi_i$  – абсциса полюса в системі координат  $Ox_1x_2$ ;

$v_i$  – ордината полюса в системі координат  $Ox_1x_2$ ;

$h_i$  – ширина (висота) прямокутника;

$d_i$  – довжина прямокутника.

Прямокутник позначатимемо  $\Pi_i(\xi_i, v_i, h_i, d_i)$  або просто  $\Pi_i$ .

Нехай числа  $\xi_i, v_i, h_i$  – звичайні (дійсні числа) і нехай  $d_i$  – нечітке число  $d_i = \{(d_i^1|\mu_1^i), \dots, (d_i^n|\mu_n^i)\}$ . Виникає питання: що таке прямокутник  $\Pi$  з висотою  $h$  ("чітке" число) та довжиною  $d = \{(d_1|\mu_1), \dots, (d_n|\mu_n)\}$ ?

Оскільки число  $d$  – це:

1)  $d_1$  із значенням функції приналежності  $\mu_1$ ;

2)  $d_2$  із значенням функції приналежності  $\mu_2$ ;

i)  $d_i$  із значенням функції приналежності  $\mu_i$ ;

n)  $d_n$  із значенням функції приналежності  $\mu_n$ , то  $\Pi$  – це прямокутник з розмірами:

1)  $h \times d_1$  із значенням функції приналежності  $\mu_1$ ;

2)  $h \times d_2$  із значенням функції приналежності  $\mu_2$ ;

i)  $h \times d_i$  із значенням функції приналежності  $\mu_i$ ;

n)  $h \times d_n$  із значенням функції приналежності  $\mu_n$ ,

тобто  $\Pi$  – це звичайний прямокутник з розмірами  $h \times d_i$ , тільки  $d_i$  набуває одного з  $n$  можливих значень, що характеризується значенням функції приналежності  $\mu_i$ .

Для математичної постановки задач розміщення (упаковки) прямокутників  $\Pi_i$  в смузі треба дати означення:

1) розміщення прямокутника в смузі (попадання в смугу);

2) взаємного перетину прямокутників  $\Pi_i$  і  $\Pi_j$ ,  $i \neq j$ , які розміщені в смузі;

3) взаємного неперетину прямокутників  $\Pi_i$  і  $\Pi_j$ ,  $i \neq j$ , які розміщені в смузі;

4) дотику прямокутників  $\Pi_i$  і  $\Pi_j$ ,  $i \neq j$ , при їх розміщенні в смузі.

Ці означення можна дати, ввівши поряд із поняттями суми та лінійної впорядкованості нечітких чисел поняття характеристичної функції (функціонала)  $H(x)$  нечіткого числа  $x$  як  $H(x): X \rightarrow R^1$ , яка діє з множини нечітких чисел  $X$  в  $R^1$  (множину дійсних чисел) та узагальнює такі метричні властивості дійсного числа:

1) якщо  $x \in R^1$ , то  $H(x) = x$ ;

2) для будь-яких двох нечітких чисел і характеристичної функції  $H$  виконувалась рівність  $H(A + B) = H(A) + H(B)$ ;

3) для будь-яких трьох нечітких чисел  $x = \{(x_1|\mu_1^x), \dots, (x_\alpha|\mu_\alpha^x)\}$ ,  $y = \{(y_1|\mu_1^y), \dots, (y_\beta|\mu_\beta^y)\}$ ,  $z = \{(z_1|\mu_1^z), \dots, (z_\gamma|\mu_\gamma^z)\}$ , таких, що  $\sum_{k=1}^a \mu_k^x = \sum_{k=1}^\beta \mu_k^y = \sum_{k=1}^\gamma \mu_k^z = 1$ ,  $x_1 < \dots < x_\alpha$ ,  $y_1 < \dots < y_\beta$ ,  $z_1 < \dots < z_\gamma$ , виконувалось таке правило: якщо  $x \prec y$ , то  $x + z \prec y + z$ , де " $\prec$ " означає лінійну впорядкованість;

4)  $x \prec y$  тоді і тільки тоді, коли  $H(x) \leq H(y)$ .

Також необхідно, щоб для операції додавання нечітких чисел виконувались комутативність і асоціативність, тобто  $A + B = B + A$  і  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .

Таким чином, необхідно ввести поняття суми, лінійної впорядкованості та характеристичної функції, які б відповідали перерахованим властивостям.

Поняття суми нечітких чисел було введено нами в статті [12].

Сума  $A + B$  двох нечітких чисел  $A = \{(a_1|\mu_1^A), \dots, (a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$  і  $B = \{(b_1|\mu_1^B), \dots, (b_\beta|\mu_\beta^B)\}$  утворювалась за допомогою побудови множини пар [12]:

$$\tilde{C} = \{(\tilde{c}_1|\mu_1^{\tilde{C}}), \dots, (\tilde{c}_n|\mu_n^{\tilde{C}})\} =$$

$$= \left\{ \left( a_1 + b_1 \middle| \begin{array}{c} \mu_1^A \quad \mu_1^B \\ \sum_{i=1}^a \mu_i^A \quad \sum_{j=1}^\beta \mu_j^B \end{array} \right), \dots, \left( a_1 + b_\beta \middle| \begin{array}{c} \mu_1^A \quad \mu_\beta^B \\ \sum_{i=1}^a \mu_i^A \quad \sum_{j=1}^\beta \mu_j^B \end{array} \right), \dots, \left( a_\alpha + b_1 \middle| \begin{array}{c} \mu_\alpha^A \quad \mu_1^B \\ \sum_{i=1}^\alpha \mu_i^A \quad \sum_{j=1}^\beta \mu_j^B \end{array} \right), \dots, \left( a_\alpha + b_\beta \middle| \begin{array}{c} \mu_\alpha^A \quad \mu_\beta^B \\ \sum_{i=1}^\alpha \mu_i^A \quad \sum_{j=1}^\beta \mu_j^B \end{array} \right) \right\},$$

$$\left( a_2 + b_1 \left| \frac{\mu_2^A}{\sum_{i=1}^a \mu_i^A} \frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^b \mu_j^B} \right. \right), \dots, \left( a_2 + b_\beta \left| \frac{\mu_2^A}{\sum_{i=1}^a \mu_i^A} \frac{\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^b \mu_j^B} \right. \right), \quad (1)$$

$$\left( a_\alpha + b_1 \left| \frac{\mu_\alpha^A}{\sum_{i=1}^a \mu_i^A} \frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^b \mu_j^B} \right. \right), \dots, \left( a_\alpha + b_\beta \left| \frac{\mu_\alpha^A}{\sum_{i=1}^a \mu_i^A} \frac{\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^b \mu_j^B} \right. \right).$$

Перші елементи  $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_\eta$ , де  $\eta = \alpha\beta$ , цих пар утворюють мультимножину  $\tilde{C}^* = \{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_\eta\}$  [12].

Основа  $S(\tilde{C}^*)$  мультимножини  $\tilde{C}^*$  це  $S(\tilde{C}^*) = \{c_1, \dots, c_r\}$  – носій нечіткого числа  $A + B = \{(c_i|\mu_i), \dots, (c_r|\mu_r)\}$ . Значення функції приналежності знаходять за правилом [12]

$$\mu_t = \sum_{\substack{i \in J_\eta \\ c_i = \tilde{c}}} \mu_i^{\tilde{c}}, \quad i \in J_\eta, t \in J_r, \quad (2)$$

тобто значення  $\mu_t$  визначають як суму таких чисел  $\mu_i^{\tilde{c}}$ , для яких  $\tilde{c}_i = c_r$ , а  $r$  – число різних елементів в  $\tilde{C}^*$ .

Отже, маємо такі означення (див. [12]).

**Означення 2** [12]. Сумою  $A + B$  двох нечітких чисел  $A$  і  $B$  називається нечітке число  $C = \{(c_1|\mu_1), \dots, (c_r|\mu_r)\}$ , де  $\{c_1, \dots, c_r\} = S(\tilde{C}^*)$  – основа мультимножини  $\{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_\eta\}$ , яка визначається за правилом (1), а значення  $\mu_t$  – за правилом (2).

**Означення 3** [12]. Сумою трьох нечітких чисел  $A = \{(a_1|\mu_1^A), \dots, (a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$ ,  $B = \{(b_1|\mu_1^B), \dots, (b_\beta|\mu_\beta^B)\}$  та  $D = \{(d_1|\mu_1^D), \dots, (d_\delta|\mu_\delta^D)\}$  називають нечітке число  $A + B + D = E + D$ , де  $E = A + B$ .

Один із можливих варіантів означення характеристичної функції (функціонала)  $H(x)$  нечіткого числа  $x H(x): X \rightarrow R^1$  є такий.

**Означення 4** [12]. Характеристичною функцією (функціоналом)  $H(x): X \rightarrow R^1$  нечіткого числа  $A = \{(a_1|\mu_1^A), \dots, (a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$  називають функцію, яка нечіткому числу  $A \in X$  ставить у відповідність число  $H(A) \in R^1$  за правилом

$$H(A) = \frac{\sum_{i=1}^\alpha a_i \mu_i^A}{\sum_{i=1}^\alpha \mu_i^A}.$$

Нехай задано два нечіткі числа:  $A = \{(a_1|\mu_1^A), \dots, (a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$  і  $B = \{(b_1|\mu_1^B), \dots, (b_\beta|\mu_\beta^B)\}$ . Позначимо  $a = \{a_1, \dots, a_\alpha\}$ ,  $b = \{b_1, \dots, b_\beta\}$ ,  $u = a \cup b = \{u_1, \dots, u_\gamma\}$ . Тоді число  $A$  можна записати у вигляді

$$A^u = \{(u_1|\mu_1^{A^u}), \dots, (u_\gamma|\mu_\gamma^{A^u})\},$$

$$\text{де } \mu_i^{A^u} = \begin{cases} \mu_j^A, & \text{якщо } u_i = a_j \in a, \\ 0, & \text{якщо } u_i \notin a. \end{cases}$$

Число  $B$  запишемо у вигляді

$$B^u = \{(u_1|\mu_1^{B^u}), \dots, (u_\gamma|\mu_\gamma^{B^u})\},$$

$$\text{де } \mu_i^{B^u} = \begin{cases} \mu_j^B, & \text{якщо } u_i = b_j \in b, \\ 0, & \text{якщо } u_i \notin b. \end{cases}$$

Наведемо означення впорядкованості нечітких чисел, які були дані в [12].

**Означення 5** [12]. Два нечіткі числа  $A$  і  $B$  називаються впорядкованими за зростанням ( $A < B$ ), якщо:

$$\text{а) або } \frac{\sum_{i=1}^\alpha a_i \mu_i^A}{\sum_{i=1}^\alpha \mu_i^A} < \frac{\sum_{j=1}^\beta b_j \mu_j^B}{\sum_{j=1}^\beta \mu_j^B}, \text{ тобто, коли } H(A) < H(B);$$

$$\text{б) або } H(A) = H(B), \text{ тобто } \frac{\sum_{i=1}^\alpha a_i \mu_i^A}{\sum_{i=1}^\alpha \mu_i^A} = \frac{\sum_{j=1}^\beta b_j \mu_j^B}{\sum_{j=1}^\beta \mu_j^B},$$

але  $\mu_1^{A^u} = \mu_1^{B^u}, \dots, \mu_k^{A^u} = \mu_k^{B^u}, \mu_{k+1}^{A^u} < \mu_{k+1}^{B^u}$ ,  $(k < \gamma)$ .

Говоритимемо, що  $A$  передує  $B$  за зростанням.

**Означення 6** [12]. Два нечіткі числа  $A$  і  $B$  називаються впорядкованими за неспаданням (позначається  $A \prec B$ ), якщо:

$$\text{а) або } A < B;$$

$$\text{б) або } A = B, \text{ тобто тоді, коли } a_i = b_i \text{ і } \mu_i^A =$$

$$= \mu_i^B \quad \forall i.$$

Для введеного таким чином характеристичної функції, операції додавання та лінійної впорядкованості виконуються зазначені вище властивості [12].

Маючи характеристичну функцію  $H(A)$  для нечіткого числа  $A$  можна перейти до формалізації понять дотику прямокутників, неперетину їх, перетину (накладання) прямокутників тощо.

Нехай смуга (прямокутник), в якій відбувається розміщення, задана у вигляді  $\Pi_0(h_0, d_0)$ , де  $h_0, d_0 \in R^1$ ,  $h_0$  – ширина (висота) прямокутника,  $d_0$  – його довжина. Система координат розміщена так, як показано на рис. 2.

Розглянемо розміщення двох прямокутників  $\Pi_i(\xi_i, v_i, h_i, d_i)$  і  $\Pi_j(\xi_j, v_j, h_j, d_j)$  за умови, що  $h_i = h_j = h_0 \in R^1$ , а  $d_i, d_j \in X$  – множині нечітких чисел,  $\xi_i, \xi_j$ , взагалі кажучи, також належать  $X$  (нагадаємо, що  $R^1 \in X$ ).

Нехай  $\xi_i = x \in R^1$ . Тоді отримаємо таке означення.

**Означення 7.** Прямокутник  $\Pi_j$  назовемо таким, що дотикається до прямокутника  $\Pi_i$  справа (в смузі  $\Pi_0$ ), якщо

$$H(x + d_i) = H(\xi_j). \quad (3)$$

**Зauważення.** Враховуючи властивості характеристичної функції  $H(A)$  нечіткого числа  $A$  з (3) маємо

$$H(x + d_i) = H(x) + H(d_i) = x + H(d_i).$$

Отже, рівність (3) набуває вигляду

$$x + H(d_i) = H(\xi_j), \quad (4)$$

тобто прямокутник  $\Pi_j$  називається таким, що дотикається до прямокутника  $\Pi_i$  справа (в смузі  $\Pi_0$ ), якщо значення характеристичної функції абсциси його полюса дорівнює сумі абсциси полюса прямокутника  $\Pi_i$  та характеристичної функції його ( $\Pi_j$ ) довжини.

**Приклад 1.** Нехай смуга задана так:  $\Pi_0(h_0, d_0)$ , де  $h_0, d_0 \in R^1$ .

Розглянемо розміщення двох прямокутників  $\Pi_1(\xi_1, v_1, h_1, d_1)$  і  $\Pi_2(\xi_2, v_2, h_2, d_2)$  за умови, що  $h_0 = h_1 = h_2 \in R^1$ , а  $d_1, d_2, \xi_1, \xi_2 \in X$ .

Нехай  $h_0 = 2$ ,  $d_0 = 10$ ,  $\Pi_1(\xi_1 = \{(1|1)\}, v_1 = 0, h_1 = 2, d_1 = \{(1|0,4), (6|0,6)\})$  і  $\Pi_2(\xi_2 = \{(5|1)\}, v_2 = 0, h_2 = 2, d_2 = \{(2|0,1), (3|0,5), (4|0,2)\})$ .

Тоді

$$\begin{aligned} H(\xi_1) &= \frac{1 \cdot 1}{1} = 1, H(d_1) = \frac{1 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,6}{0,4 + 0,6} = 4, \xi_1 + H(d_1) = \\ &= 1 + 4 = 5, H(\xi_2) = \frac{5 \cdot 1}{1} = 5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(d_2) &= \frac{2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,2}{0,1 + 0,5 + 0,2} = 3,25, \\ \xi_2 + H(d_2) &= 5 + 3,25 = 8,25. \end{aligned}$$

Оскільки  $5 = 5$ , тобто  $\xi_1 + H(d_1) = H(\xi_2)$ , і справджується рівність (4), то прямокутник  $\Pi_2$  дотикається до прямокутника  $\Pi_1$  справа.

**Означення 8.** Прямокутник  $\Pi_j$  розміщений правіше прямокутника  $\Pi_i$  в смузі  $\Pi_0$  (тобто  $\Pi_i$  і  $\Pi_j$  називаються такими, що не перетинаються, не налягають один на одного), якщо

$$H(x + d_i) < H(\xi_j),$$

або, те ж саме,

$$x + H(d_i) < H(\xi_j), \quad (5)$$

тобто прямокутник  $\Pi_j$  розміщений правіше прямокутника  $\Pi_i$  в смузі  $\Pi_0$ , якщо значення характеристичної функції абсциси його полюса більше, ніж сума абсциси полюса прямокутника  $\Pi_i$  та характеристичної функції його ( $\Pi_j$ ) довжини.

**Приклад 2.** Нехай смуга задана так:  $\Pi_0(h_0, d_0)$ , де  $h_0, d_0 \in R^1$ .

Розглянемо розміщення двох прямокутників  $\Pi_1(\xi_1, v_1, h_1, d_1)$  і  $\Pi_2(\xi_2, v_2, h_2, d_2)$  за умови, що  $h_0 = h_1 = h_2 \in R^1$ , а  $d_1, d_2, \xi_1, \xi_2 \in X$ .

Нехай  $h_0 = 2$ ,  $d_0 = 11$ ,  $\Pi_1(\xi_1 = \{(1|1)\}, v_1 = 0, h_1 = 2, d_1 = \{(1|0,1), (2|0,5), (3|0,4)\})$ ,  $\Pi_2(\xi_2 = \{(6|1)\}, v_2 = 0, h_2 = 2, d_2 = \{(2|0,1), (3|0,5), (4|0,2)\})$ .

Тоді

$$H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1, H(d_1) = \frac{1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,4}{0,1 + 0,5 + 0,4} = 2,3,$$

$$\xi_1 + H(d_1) = 3,3,$$

$$H(\xi_2) = \frac{6 \cdot 1}{1} = 6, H(d_2) = \frac{2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,2}{0,1 + 0,5 + 0,2} = 3,25,$$

$$\xi_2 + H(d_2) = 6 + 3,25 = 9,25.$$

Оскільки  $3,3 < 6$ , тобто  $\xi_1 + H(d_1) < H(\xi_2)$ , і справджується нерівність (5), то прямокутник  $\Pi_2$  розміщений правіше прямокутника  $\Pi_1$ .

**Означення 9.** Прямокутники  $\Pi_i$  і  $\Pi_j$  (що розміщені в смузі  $\Pi_0$ ) називаються такими, що перетинаються, якщо

$$H(x) \leq H(\xi_j) < H(x + d_i),$$

або, те ж саме,

$$x \leq H(\xi_j) < x + H(d_i). \quad (6)$$

Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так:  $\Pi_0(h_0, D_0)$ , де  $h_0 \in R^1$ ,  $D_0 \in X$ .

Розглянемо розміщення двох прямокутників  $\Pi_i(\xi_i, v_i, h_i, d_i)$  і  $\Pi_j(\xi_j, v_j, h_j, d_j)$  за умови, що  $h_i = h_j = h_0 \in R^1$ , а  $d_i, d_j, \xi_i, \xi_j \in X$ .

Нехай  $\xi_i = x \in X$ . Тоді маємо означення.

**Означення 10.** Прямоугутник  $\Pi_j$  назовемо таким, що:

1) дотикається до прямоугутника  $\Pi_i$  справа (в смузі  $\Pi_0$ ), якщо

$$H(x + d_i) = H(\xi_j),$$

або

$$H(\xi_i) + H(d_i) = H(\xi_j);$$

2) розміщений правіше прямоугутника  $\Pi_i$  в смузі  $\Pi_0$  (тобто  $\Pi_i$  і  $\Pi_j$  називаються такими, що не перетинаються, не налягають один на одного), якщо

$$H(x + d_i) < H(\xi_j),$$

або, що те ж саме,

$$H(\xi_i) + H(d_i) < H(\xi_j);$$

3) перетинаються, якщо

$$H(x) \leq H(\xi_j) < H(x + d_i),$$

або, що те ж саме,

$$H(\xi_i) \leq H(\xi_j) < H(\xi_i) + H(d_i).$$

**Приклад 3.** Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так:  $\Pi_0(H_0, D_0)$ , де  $H_0 \in R^1$ ,  $D_0 \in X$ .

Розглянемо розміщення двох прямоугутників  $\Pi_1(\xi_1, v_1, h_1, d_1)$  і  $\Pi_2(\xi_2, v_2, h_2, d_2)$  за умови  $h_0 = h_1 = h_2 \in R^1$ ,  $d_1, d_2, \xi_1, \xi_2 \in X$ .

Нехай  $h_0 = 2$ ,  $D_0 = \{(12|1)\}$ ,  $\Pi_1(\xi_1 = \{1|1\})$ ,  $v_1 = 0$ ,  $h_1 = 2$ ,  $d_1 = \{(1|0,4), (6|0,6)\}$ ,  $\Pi_2(\xi_2 = \{5|1\})$ ,  $v_2 = 0$ ,  $h_2 = 2$ ,  $d_2 = \{(2|0,1), (3|0,5), (4|0,2)\}$ ,  $\Pi_3(\xi_3 = \{8|1\})$ ,  $v_3 = 0$ ,  $h_3 = 2$ ,  $d_3 = \{(2|0,5), (4|0,5)\}$ .

Тоді

$$H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1, H(d_1) = \frac{1 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,6}{0,4 + 0,6} = 4, H(\xi_1) + H(d_1) = 1 + 4 = 5,$$

$$H(\xi_2) = \frac{5 \cdot 1}{1} = 5, H(d_2) = \frac{2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,2}{0,1 + 0,5 + 0,2} = 3,25,$$

$$H(\xi_2) + H(d_2) = 5 + 3,25 = 8,25,$$

$$H(\xi_3) = \frac{8 \cdot 1}{1} = 8, H(d_3) = \frac{2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 3, H(\xi_3) + H(d_3) = 8 + 3 = 11, H(D_0) = \frac{12 \cdot 1}{1} = 12.$$

Оскільки  $5 = 5$ , тобто  $H(\xi_1) + H(d_1) = H(\xi_2)$ , то прямоугутник  $\Pi_2$  дотикається до прямоугутника  $\Pi_1$  справа.

Оскільки  $5 < 8$ , тобто  $H(\xi_1) + H(d_1) < H(\xi_3)$ , то прямоугутник  $\Pi_3$  розміщений правіше прямоугутника  $\Pi_1$ .

Оскільки  $5 < 8 < 8,25$ , тобто  $H(\xi_2) < H(\xi_3) < H(\xi_2) + H(d_2)$ , то прямоугутник  $\Pi_2$  перетинається з прямоугутником  $\Pi_3$ .

Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так:  $\Pi_0(H_0, D_0)$ , де  $H_0, D_0 \in X$ .

Розглянемо розміщення двох прямоугутників  $\Pi_i(\xi_i, v_i, h_i, d_i)$  і  $\Pi_j(\xi_j, v_j, h_j, d_j)$  за умови  $\xi_i, \xi_j, v_i, v_j, h_i, h_j, d_i, d_j \in X$ .

**Означення 11.** Прямоугутник  $\Pi_i$  назовемо таким, що розміщується (поміщається) в смузі  $\Pi_0$  (рис. 3), якщо

$$\begin{cases} 0 \leq H(\xi_i), \\ H(\xi_i + d_i) \leq H(D_0), \\ 0 \leq H(v_i), \\ H(v_i + h_i) \leq H(H_0), \end{cases}$$

або, що те ж саме,

$$\begin{cases} 0 \leq H(\xi_i) \leq H(D_0) - H(d_i), \\ 0 \leq H(v_i) \leq H(H_0) - H(h_i), \end{cases} \quad (7)$$

а умови (7) назовемо умовами розміщення прямоугутника  $\Pi_i$  в смузі  $\Pi_0$ .

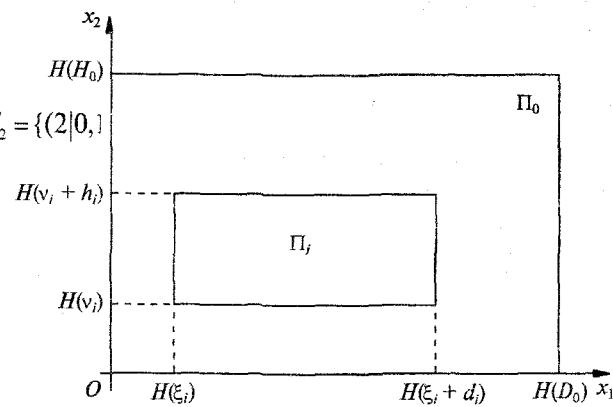


Рис. 3. Ілюстрація розміщення прямоугутника  $\Pi_j$  в смузі  $\Pi_0$

**Приклад 4.** Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так:  $\Pi_0(H_0, D_0)$ , де  $H_0, D_0 \in X$ .

Розглянемо розміщення прямоугутника  $\Pi_1(\xi_1, v_1, h_1, d_1)$  за умови  $\xi_1, v_1, h_1, d_1 \in X$ .

Нехай  $H_0 = \{(6|1)\}$ ,  $D_0 = \{(12|1)\}$ . Прямоугутник  $\Pi_1(\xi_1, v_1, h_1, d_1)$  задається так:

$\Pi_1(\xi_1 = \{(1|0,5), (2|0,5)\}, v_1 = \{(2|0,5), (4|0,5)\}, h_1 = \{(1|0,5), (3|0,5)\}, d_1 = \{(1|0,4), (6|0,6)\})$ .

Тоді

$$H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 1,5, \quad H(d_1) = \frac{1 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,6}{0,4 + 0,6} = 4,$$

$$H(\xi_1) + H(d_1) = 1,5 + 4 = 5,5,$$

$$H(v_1) = \frac{2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 3, \quad H(h_1) = \frac{1 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5}{1} = 2,$$

$$H(v_1) + H(h_1) = 3 + 2 = 5,$$

$$H(H_0) = \frac{6 \cdot 1}{1} = 6, \quad H(D_0) = \frac{12 \cdot 1}{1} = 12,$$

$$H(H_0) - H(h_1) = 6 - 2 = 4, \quad H(D_0) - H(d_1) = 12 - 4 = 8.$$

Прямоугутник  $\Pi_1$  поміщається в смузі  $\Pi_0$ , оскільки

$$\begin{cases} 0 < 5,5 < 8, \\ 0 < 3 < 4, \end{cases}$$

тобто справджується умова (7).

**Означення 12.** Прямоугутники  $\Pi_i$  та  $\Pi_j$  наземо такими, що перетинаються, якщо виконується або (рис. 4) умова

$$\begin{cases} H(\xi_i) \leq H(\xi_j) < H(\xi_i) + H(d_i), \\ H(v_i) \leq H(v_j) < H(v_i) + H(h_j), \end{cases} \quad (8)$$

або (рис. 5) умова

$$\begin{cases} H(\xi_i) \leq H(\xi_j) < H(\xi_i) + H(d_i), \\ H(v_j) \leq H(v_i) < H(v_j) + H(h_j); \end{cases} \quad (9)$$

умови (8) та (9) наземо умовами взаємного перетину двох прямоугутників.

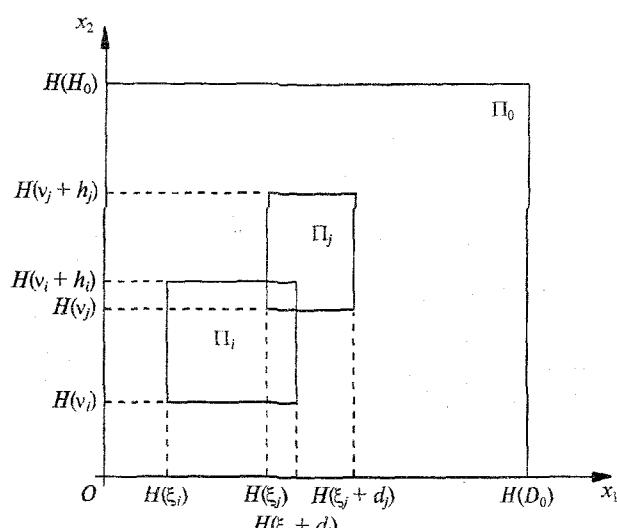


Рис. 4. Ілюстрація умови перетину прямоугутників  $\Pi_j$  і  $\Pi_i$

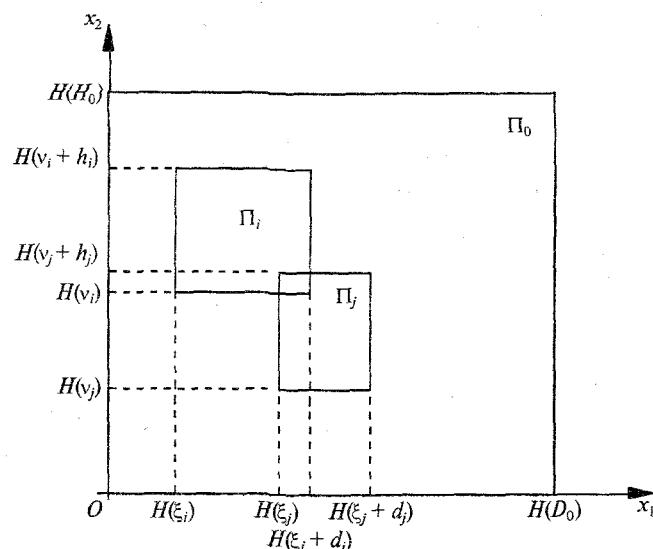


Рис. 5. Ілюстрація умови перетину прямоугутників  $\Pi_i$  і  $\Pi_j$

**Приклад 5.** Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так:  $\Pi_0(H_0, D_0)$ , де  $H_0, D_0 \in X$ .

Розглянемо розміщення двох прямоугутників  $\Pi_1(\xi_1, v_1, h_1, d_1)$  і  $\Pi_2(\xi_2, v_2, h_2, d_2)$  за умови  $\xi_1, \xi_2, v_1, v_2, h_1, h_2, d_1, d_2 \in X$ .

Задано два прямоугутники:

$$\begin{aligned} \Pi_1(\xi_1) &= \{(1|0,5), (2|0,5)\}, \quad v_1 = \{(2|0,5), (4|0,5)\}, \quad h_1 = \\ &= \{(1|0,5), (3|0,5)\}, \quad d_1 = \{(1|0,4), (6|0,6)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_2(\xi_2) &= \{(2|0,6), (7|0,4)\}, \quad v_2 = \{(1|0,6), (3,5|0,5)\}, \quad h_2 = \\ &= \{(1|0,5), (3|0,5)\}, \quad d_2 = \{(2|0,1), (3|0,5), (4|0,2)\}. \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 1,5,$$

$$H(v_1) = \frac{2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 3, \quad H(h_1) = \frac{1 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 2,$$

$$H(d_1) = \frac{1 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,6}{0,4 + 0,6} = 4,$$

$$H(\xi_1) + H(d_1) = 1,5 + 4 = 5,5, \quad H(v_1) + H(h_1) = 3 + 2 = 5,$$

$$H(\xi_2) = \frac{2 \cdot 0,6 + 7 \cdot 0,4}{0,6 + 0,4} = 4, \quad H(v_2) = \frac{1 \cdot 0,6 + 3,5 \cdot 0,4}{0,6 + 0,4} = 2,$$

$$H(h_2) = \frac{1 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 2,$$

$$H(d_2) = \frac{2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,1}{0,1 + 0,5 + 0,2} = 3,25,$$

$$H(\xi_2) + H(d_2) = 5,5 + 3,25 = 8,75, \quad H(v_2) + H(h_2) = 2 + 2 = 4.$$

Оскільки  $1,5 < 4 < 5,5$ , тобто  $H(\xi_1) < H(\xi_2) < H(\xi_1) + H(d_1)$ , тобто справджується умова (9), то прямоугутники  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  перетинаються.

**Означення 13.** Прямоуглини  $\Pi_i$  і  $\Pi_j$  назовемо такими, що не перетинаються (рис. 6), якщо виконується:

або умова

$$H(\xi_j) > H(\xi_i) + H(d_i),$$

або умова

$$H(v_j) > H(v_i) + H(h_i).$$

Іншими словами, виконується сукупність нерівностей

$$\begin{cases} H(\xi_j) > H(\xi_i) + H(d_i), \\ H(v_j) > H(v_i) + H(h_i). \end{cases}$$

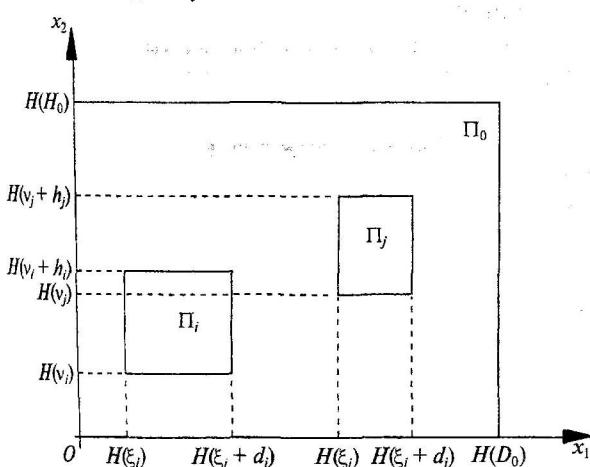


Рис. 6. Ілюстрація умови неперетину прямоуглиників  $\Pi_j$  і  $\Pi_i$

**Приклад 6.** Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так:  $\Pi_0(H_0, D_0)$ , де  $H_0, D_0 \in X$ .

Розглянемо розміщення двох прямоуглиників  $\Pi_1(\xi_1, v_1, h_1, d_1)$  і  $\Pi_2(\xi_2, v_2, h_2, d_2)$  за умови  $\xi_1, \xi_2, v_1, v_2, h_1, h_2, d_1, d_2 \in X$ .

Задано два прямоуглиники:

$$\begin{aligned} \Pi_1(\xi_1 = \{(1|0,5), (2|0,5)\}, v_1 = \{(2|0,5), (4|0,5)\}, h_1 = \\ = \{(1|0,5), (3|0,5)\}, d_1 = \{(1|0,4), (6|0,6)\}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_2(\xi_2 = \{(4|0,5), (8|0,5)\}, v_2 = \{(1|0,6), (3,5|0,5)\}, h_2 = \\ = \{(1|0,5), (3|0,5)\}, d_2 = \{(2|0,1), (3|0,5), (4|0,2)\}). \end{aligned}$$

Тоді

$$H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 1,5,$$

$$H(v_1) = \frac{2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 3, \quad H(h_1) = \frac{1 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 2,$$

$$H(d_1) = \frac{1 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,6}{0,4 + 0,6} = 4,$$

$$\begin{aligned} H(\xi_1) + H(d_1) &= 1,5 + 4 = 5,5, \quad H(v_1) + H(h_1) = 3 + 2 = 5, \\ H(\xi_2) &= \frac{4 \cdot 0,5 + 8 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 6, \quad H(v_2) = \frac{1 \cdot 0,6 + 3,5 \cdot 0,4}{0,6 + 0,4} = 2, \\ H(h_2) &= \frac{1 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 2, \\ H(d_2) &= \frac{2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,1}{0,1 + 0,5 + 0,2} = 3,25, \\ H(\xi_2) + H(d_2) &= 5,5 + 3,25 = 8,75, \\ H(v_2) + H(h_2) &= 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

Оскільки  $6 > 5,5$ , тобто  $H(\xi_2) > H(\xi_1) + H(d_1)$ , то прямоуглини  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  не перетинаються.

**Означення 14.** Прямоуглини  $\Pi_i$  і  $\Pi_j$  назовемо такими, що дотикаються, якщо виконується:

або умова

$$\begin{cases} H(\xi_j) = H(\xi_i) + H(d_i), \\ H(v_i) \leq H(v_j) \leq H(v_i) + H(h_i), \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} H(\xi_j) = H(\xi_i) + H(d_i), \\ H(v_i) \leq H(v_j) + H(h_j) \leq H(v_i) + H(h_i), \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} H(v_j) = H(v_i) + H(h_i), \\ H(\xi_i) \leq H(\xi_j) \leq H(\xi_i) + H(d_i), \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} H(v_j) = H(v_i) + H(h_i), \\ H(\xi_i) \leq H(\xi_j) + H(d_i) \leq H(\xi_i) + H(d_i), \end{cases}$$

або деякі з цих умов виконуються одночасно (рис. 7).

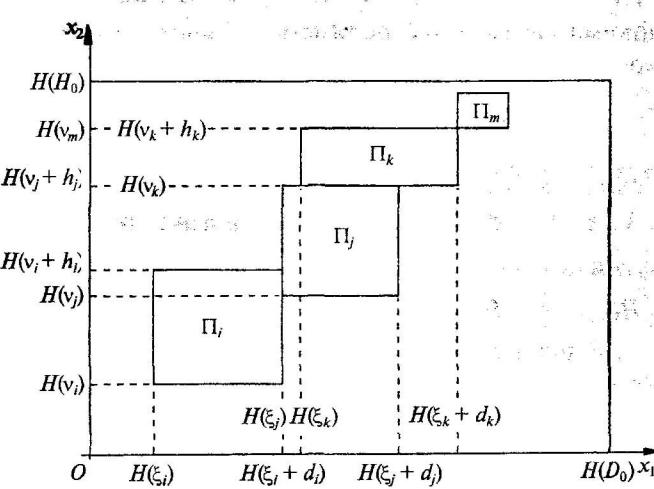


Рис. 7. Ілюстрація дотику прямоуглиників

**Приклад 7.** Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так:  $\Pi_0(H_0, D_0)$ , де  $H_0, D_0 \in X$ .

Розглянемо розміщення двох прямокутників  $\Pi_1(\xi_1, v_1, h_1, d_1)$  і  $\Pi_2(\xi_2, v_2, h_2, d_2)$  за умови  $\xi_1, \xi_2, v_1, v_2, h_1, h_2, d_1, d_2 \in X$ .

Задано два прямокутники:

$$\Pi_1(\xi_1 = \{(1|0,5), (2|0,5)\}, v_1 = \{(2|0,5), (4|0,5)\}, h_1 = \{(1|0,5), (3|0,5)\}, d_1 = \{(1|0,4), (6|0,6)\}),$$

$$\Pi_2(\xi_2 = \{(5|0,5), (6|0,5)\}, v_2 = \{(1|0,6), (3,5|0,5)\}, h_2 = \{(1|0,5), (3|0,5)\}, d_2 = \{(2|0,1), (3|0,5), (4|0,2)\}).$$

Тоді

$$H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 1,5,$$

$$H(v_1) = \frac{2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 3, H(h_1) = \frac{1 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 2,$$

$$H(d_1) = \frac{1 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,6}{0,4 + 0,6} = 4, H(\xi_1) + H(d_1) = 1,5 + 4 = 5,5,$$

$$H(v_1) + H(h_1) = 3 + 2 = 5,$$

$$H(\xi_2) = \frac{5 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 5,5, H(v_2) = \frac{1 \cdot 0,6 + 3,5 \cdot 0,4}{0,6 + 0,4} = 2,$$

$$H(h_2) = \frac{1 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 2,$$

$$H(d_2) = \frac{2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,1}{0,1 + 0,5 + 0,2} = 3,25,$$

$$H(\xi_2) + H(d_2) = 5,5 + 3,25 = 8,75,$$

$$H(v_2) + H(h_2) = 2 + 2 = 4.$$

Оскільки  $5,5 = 5,5$ , тобто  $H(\xi_2) = H(\xi_1) + H(d_1)$ , то прямокутники  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  дотикаються.

**Означення 15.** Розміщенням прямокутника  $\Pi_i(\xi_i, v_i, h_i, d_i)$  в смузі  $\Pi_0(H_0, D_0)$ , де  $H_0, D_0 \in X$  – нечіткими числами, називатимемо розміщення прямокутника в смузі  $\Pi_0(h_0, d_0)$ , де  $h_0 = H(H_0)$ ,  $d_0 = H(D_0)$ .

**Означення 16.** Розміщенням прямокутника  $\Pi_i(\xi_i, v_i, h_i, d_i)$  в смузі  $\Pi_0(h_0, d_0)$ , де  $\xi_i, v_i, h_i, d_i \in X$ ,  $h_0, d_0 \in R^1$ , називатимемо розміщення прямокутника  $\Pi^i(x_i, y_i, h^i, d^i)$  в  $\Pi_0$ , де  $x_i = H(\xi_i)$ ,  $y_i = H(v_i)$ ,  $h^i = H(h_i)$ ,  $d^i = H(d_i)$ .

Ввіши означення 15 і 16, одержуємо таке очевидне твердження.

**Твердження.** Означення 15, 16 та відповідні попередні означення еквівалентні.

Зауважимо, що підхід, розглянутий у даній статті, може бути застосований до будь-якого узагальнення прямокутника (чи то з “інтервальними” розмірами (як інтервал), чи то з “ймовірніс-

ними” (як випадкова величина) тощо), що враховують невизначеність вимірювання розмірів.

**Означення 17.** Нечітке число  $A_1$  називається мінімальним серед нечітких чисел  $A_1, A_2, \dots, A_k$  числом, якщо  $A_1 \prec A_2 \prec \dots \prec A_k$ .

**Означення 18.** Нечітке число  $A_k$  називається максимальним серед нечітких чисел  $A_1, A_2, \dots, A_k$  числом, якщо  $A_1 \prec A_2 \prec \dots \prec A_k$ .

Побудуємо математичну модель сформульованої задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами, вважаючи, що довжини прямокутників  $a_i$  задаються нечіткими числами.

У кожній смужці в оптимальному розв’язку, очевидно, може розміщуватися від одного до  $p - (m - 1) = p - m + 1$  прямокутників, де  $m$  – кількість смужок, на яку розділено смугу, тобто ціла частина частки від ділення ширини смуги на  $h$ . Позначимо  $n = m(p - m + 1)$  та введемо до розгляду  $n - p$  прямокутників з шириною  $h$  та довжиною  $a_0$ , де  $a_0$  є нечітким числом вигляду  $a_0 = \{(0|1)\}$ , тобто звичайним нулем,  $a_0 \in R^1$ .

Тоді можна вважати, що в кожній смужці стоїть рівно  $p - m + 1$  прямокутників. Позначимо  $x_{ij}$  – нечітку довжину прямокутника, що стоїть у  $i$ -ї смужці на  $j$ -му від початку смуги місці,  $i \in J_m$ ,  $j \in J_{p-m+1}$ .

Розглянемо вектор  $x$  вигляду

$$x = (x_{11}, \dots, x_{1,p-m+1}, x_{21}, \dots, x_{2,p-m+1}, \dots,$$

$$x_{i1}, \dots, x_{i,p-m+1}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{m,p-m+1}).$$

Утворимо мультимножину  $G = \{a_1, \dots, a_p, a_0, \dots, a_0\}$ , в якій елемент  $a_0$  зустрічається  $n - p$  раз. Тоді вектор  $x$  можна розглядати як елемент множини  $E_n(G)$  переставень з елементів мультимножини  $G$ , тобто  $x \in E_n(G)$ . При цьому кожному переставленню  $x$  буде відповідати певне розміщення прямокутників у смузі і навпаки.

Використовуючи введені операції додавання, лінійної впорядкованості, знаходження максимального і мінімального нечіткого числа, математичну модель сформульованої задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами можна подати в такому вигляді:

$$F^*(x^*) = \min_{x \in E_n(G)} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{p-m+1} x_{ij}, \quad (10)$$

$$x^* = \arg \min_{x \in E_n(G)} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{p-m+1} x_{ij}, \quad (11)$$

де  $\arg f(x)$  позначає точку  $x$ , що доставляє значення  $f(x)$  функції  $f$ .

Формула (10) дає мінімально можливу довжину зайнтої частини смуги у вигляді нечіт-

кого числа, а формула (11) – переставлення  $x^*$ , че який ця довжина  $F^*(x^*)$  досягається. Задача може бути розв'язана методом гілок та меж, аналогично, як це зроблено в [11].

## Висновки

У задачах комбінаторної оптимізації використовуються, як правило, параметри, що не містять невизначеності, оскільки їх важко враховувати. У статті здійснено врахування невизначеності в одній із комбінаторних оптимізаційних

задач – задачі упакування прямокутників у випадку, коли один із параметрів прямокутника є нечітким числом. Розглянутий підхід до моделювання такої ситуації може поширюватися на будь-які інші задачі евклідової комбінаторної оптимізації, якщо необхідно враховувати ту чи іншу невизначеність за допомогою нечіткої множини.

У подальшому доцільно направити зусилля на розробку точних та наближених методів розв'язування таких задач.

О.А. Емец, А.О. Емец

### ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ С НЕЧЕТКИМИ РАЗМЕРАМИ

Определено расположение прямоугольников с нечеткими размерами в полосе: касание, пересечение, непересечение, а также расположение прямоугольников с нечеткими размерами в полосе нечеткого размера: попадание в полосу, касание, пересечение, непересечение. Построена новая математическая модель одной задачи упаковки прямоугольников в виде задачи комбинаторной оптимизации на множестве нечетких перестановок.

Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы исследования, решения. – К.: Наук. думка, 2003. – 264 с.

Стоян Ю.Г., Емець О.О. Теория і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.

Стоян Ю.Г., Емець О.О., Емець Е.М. Оптимізація на відрозміщеннях: теорія та методи. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. – 104 с.

Емець О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. – К.: Наук. думка, 2008. – 160 с.

Лєнишев А.В., Плечистий Д.Д. Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера. – Житомир: ЖГТУ, 2006. – 300 с.

Гуляницький Л.Ф. Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 01.05.02 / Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України. – К., 2005. – 32 с.

Гребенник І.В. Математичні моделі та методи комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні: Ав-

Oleg O. Yemets', Oleksandra O. Yemets'

### THE CONSTRUCTION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE ONE COMBINATORIAL PROBLEM OF RECTANGLES PACKING WITH FUZZY SIZES

In this paper, we define the arrangement of rectangles with fuzzy sizes in a breadth – tangency, intersection, non-intersection. We also define the arrangement of rectangles with fuzzy sizes in the fuzzy size breadth – tangency, intersection, non-intersection. Finally, we construct a new mathematical model of the one problem of the rectangle packing as a problem of the Euclidian combinatorial optimization on a set of fuzzy permutations.

тореф. дис. ... д-ра техн. наук: 01.05.02 / Ін-т проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного. – Харків, 2006. – 34 с.

8. Павлов О.А., Павлова Л.О. Принцип розпаралелювання обчислень як засіб підвищення ефективності ПДС-алгоритмів для важкорозв'язуваних комбінаторних задач // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 1997. – № 1. – С. 22–26.
9. Емец О.А., Росскладка А.А. О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 5. – С. 35–44.
10. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
11. Росскладка А.А., Емец А.О. Решение одной комбинаторной задачи упаковки с учетом неопределенности данных, описанной нечеткими числами // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 2. – С. 132–141.
12. Емец О.О., Емец Ол-ра О. Деякі операції та відношення над нечіткими числами // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 5. – С. 39–46.

## РЕФЕРАТИ

УДК 336.767:330.322

Розвиток фондового ринку України як складової національної інвестиційної політики / Дергачова В.В. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 5–13.

Розглянуто альтернативні джерела фінансування відтворювальних процесів у реальному секторі національної економіки, виявлено економічні та історичні передумови знецінення ресурсної бази національної економіки, досліджено сучасний стан державної амортизаційної політики як економічного ресурсу розвитку фондового ринку України, розглянуто проблеми та перспективи розвитку ринку цінних паперів як складової національної інвестиційної політики.

Іл. 1. Табл. 1. Бібліогр.: 16 назв.

УДК 621.383

Оптичні і пасивувальні властивості нітриду кремнію / Мариненко О.А. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 14–19.

Розглянуто фізико-технологічні процеси підвищення ефективності перетворення фотоелектричних перетворювачів на основі монокристалічного і мультикристалічного кремнію. Досліджено оптичні і пасивувальні властивості піловок нітриду кремнію, отриманих плазмохімічним осадженням.

Іл. 6. Бібліогр.: 20 назв.

УДК 51-74

Стратегічне планування функціональності ERP/MRP-систем із врахуванням множинних заміщень / Грища С.М., Іотко О.А. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 20–24.

Розглядається розширенна задача стратегічного планування функціональності ERP-систем з відношенням заміщення, заданим на дугах графа. Для розв'язання задачі запропоновано використовувати гібридний алгоритм, що складається з поліноміальної та експоненційної частин. Алгоритм розв'язує поліноміальну складову задачі методом редукції до задачі про максимальний потік на мережі, а експоненційну – за допомогою оригінального генетичного алгоритму. Наводяться результати обчислювального алгоритму.

Табл. 1. Бібліогр.: 6 назв.

УДК 519.85

Побудова математичної моделі однієї комбінаторної задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами / Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 25–33.

Визначено розміщення прямокутників з нечіткими розмірами у смузі дотик, перетин, неперетин, а також розміщення прямокутників з нечіткими розмірами у смузі нечіткого розміру попід час розміщення в смузі дотик, перетин, неперетин. Побудовано нову математичну модель однієї задачі упакування прямокутників у вигляді задачі комбінаторної оптимізації на множині нечітких переставлень.

Іл. 7. Бібліогр.: 12 назв.

УДК 004.75

Системна інженерія проектів інформатизації організаційних систем / Маслянко П.П., Майстренко О.С. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 34–42.

Системна інженерія проектів інформатизації організаційних систем охоплює всі етапи життєвого циклу інформаційно-комунікаційних систем. Ітеративно-інкрементний процес розробки, відповідно до міжнародних стандартів, на всіх фазах і ітераціях забезпечує виділення множини сутностей необхідних і достатніх для реалізації проекту інформатизації Орг.С, розробку бізнес-моделі Орг.С та розробку проекту інформаційно-комунікаційної системи для реалізації та досягнення мети проекту інформатизації Орг.С. Процес бізнес-моделювання реалізується за допомогою бізнес-профіля, який викрімлює системні сутності та відношення між ними.

Іл. 9. Бібліогр.: 17 назв.

УДК 581.52

Динамічні і часові характеристики процесу співіснування / Повещенко Г.П. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 43–50.

В наш час існує нагальна загальнонавілізаційна проблема створення системної інформації типу "як співіснувати". Наведені динамічні і часові характеристики розглядаються як певна спроба створення такої системної інформації про процес співіснування видів.

Іл. 6. Табл. 1. Бібліогр.: 5 назв.

УДК 661.74:669.14.046.554

Механічні властивості сплаву ВАЛ11 при різних режимах температурно-часової обробки / Кулініч А.А. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 51–54.

Досліджено вплив температурно-часових параметрів обробки розплаву і швидкості охолодження при кристалізації на структуру та рівень механічних властивостей сплаву ВАЛ11. Встановлено оптимальні технологічні параметри обробки досліджуваного сплаву, які дозволяють підвищити рівень його характеристик міцності до 20%, а пластичність – у три рази.

Іл. 3. Табл. 3. Бібліогр.: 5 назв.

УДК 531+534

Узагальнення варіаційної задачі про брахістохрону у випадку кочення однорідного циліндра / Легеза В.П. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 55–59.

Рух важкого однорідного циліндра розглядається як кочення вздовж шуканої кривої без ковзання. Знайдено функціонал у вигляді сумарного часу кочення циліндра і розв'язано відповідну варіаційну задачу з мінімізацією цього функціонала. У параметричному вигляді визначено алгебричне рівняння напрямної лінії найшвидшого спуску циліндра.

Іл. 1. Бібліогр.: 16 назв.

## АВТОРИ НОМЕРА

**Антоненко Лариса Олександрівна,**  
асpirантка Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Астрелін Ігор Михайлович,**  
доктор технічних наук, професор, професор, декан, завідувач кафедри Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Бісько Ніна Анатоліївна,**  
доктор біологічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник Інституту ботаніки ім. М.Г. Холодного НАН України.

**Будзигін Валерій Володимирович,**  
доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Вірченко Ніна Опанасівна,**  
доктор фізико-математичних наук, професор, професор Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Гриша Сергій Миколайович,**  
заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Громадський Денис Геннадійович,**  
асpirант Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Дергачова Вікторія Вікторівна,**  
доктор економічних наук, доцент, професор Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Донченко Маргарита Іванівна,**  
доктор технічних наук, старший науковий співробітник Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Ємець Олег Олексійович,**  
доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри Полтавського університету споживчої кооперації України.

**Ємець Олександра Олегівна,**  
асpirантка Полтавського університету споживчої кооперації України.

**Зайкіна Світлана Михайлівна,**  
асистент Волгоградського державного університету.

**Іванюк Олена Володимирівна,**  
кандидат технічних наук, асистент Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Ізотов Володимир Юрійович,**  
кандидат хімічних наук, завідувач лабораторії Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Іотко Олександр Анатолійович,**  
асpirант Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Капустян Володимир Омелянович,**  
доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Касьянов Павло Олегович,**  
кандидат фізико-математичних наук, докторант Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Клечак Інна Рішардівна,**  
кандидат технічних наук, доцент, доцент Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Когут Ольга Петрівна,**  
асpirантка Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Кулініч Андрій Альбертович,**  
кандидат технічних наук, старший викладач Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Курило Надія Анатоліївна,**  
асpirантка Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Легеза Віктор Петрович,**  
доктор технічних наук, професор, професор Національного аграрного університету України.

**Летвицька Ірина Василівна,**  
студентка Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Магазій Петро Миколайович,**  
старший викладач Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Майстренко Олександр Сергійович,**  
магістр Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

**Малежик Михайло Павлович,**  
доктор фізико-математичних наук, доцент, професор Національного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова.

**Малєтін Юрій Андрійович,**  
доктор хімічних наук, професор, завідувач кафедри Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.