МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

ISSN 1

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА
И
ИНФОРМАТИКА

Научно-технический журнал **Основан в 1997 г.**

№ 2(37), апрель – июнь 2007 **Выходит 4 раза в год**

Свидетельство о государственной регистрации КВ № 2657 от 02.06.97

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

вих досліджень вчених ІКНІТ (а саме, методів оцінювання ризиків інформаційної безпеки, проектування систем електронної комерції та ін.) при побудові інформаційної системи електронної комерції. Практична цінність статті визначається можливістю використання підходів до побудови інформаційної системи електронної комерції з врахуванням методів оцінювання ризиків інформаційної безпеки. Авторами запропоновано прогнозування результатів масових випробувань ризиків у системах електронної комерції. Такі прогнози поки що можна здійснювати стосовно повторних вибірок, спираючись на класичне означення ймовірності, тобто за умови, що дослід здійснюється відносно порівняно обмеженої за обсягом сукупності об'єктів. Така ситуація зустрічається у ІБ порівняно рідко. Найчастіше ІБ доводиться мати справу з безповторною вибіркою, яка досліджує одиниці загроз, що рідко зустрічаються. За таких умов розподіл ймовірностей появи загрози (події) підпорядковується гіпергеометричному закону.

Література: **1.** *Берко А.Ю., Висоцька В.А., Чирун Л.В.* Алгоритми опрацювання інформаційних ресурсів в системах електронної комерції //Вісник НУ "Львівська політехніка". Інформаційні системи та мережі. 2004. №519. С.10-20. **2.** *Берко А.Ю., Висоцька В.А.* Проектування навігаційного графу web - сторінок бази даних систем електронної комерції //Вісник НУ "Львівська політехніка". Комп'ютерні науки та інформаційні технології. 2004. №521. С.48-57. **3.** *Береза А.М.* Електронна комерція. Київ, 2002. **4.** *Верес О.М., Верес О.О., Рішняк І.В.* Методи оцінки та моделі управління банківськими ризиками //Вісник НУ "Львівська політехніка". Інформаційні системи та мережі. 2004. №519. **5.** *Катренко А.В.* Ситемний аналіз об'єктів та процесів комп'ютеризації. Львів: Новий світ, 2000, 2003. С. 286 - 322. **6.** *Крупник А.* Бизнес в интернет. М.: Микроарт, 2002. **7.** *Рішняк І.В.* Роль інформації в управлінні ризиками прийняття рішень // Вісник НУ "Львівська політехніка". Інформаційні системи та мережі. 2004. №519. **8.** *Питерсон Дж.* Теория сетей Петри и моделирование систем. М.: Мир, 1984.

Надійшла до редколегії 07.05.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Матвійчук Я.М.

Рішняк Ігор Васильович, асистент кафедри «Інформаційні системи та мережі», Національний університет "Львівська політехніка". Адреса: Україна, 79000, Львів, вул. Ст. Бандери, 12, тел. 39-825-38, тел.: (032)225-64-09, 8-067-6742286, e-mail: rishnyak_iv@mail.ru.

Висоцька Вікторія Анатоліївна, асистент кафедри «Інформаційні системи та мережі» Національного університету "Львівська політехніка". Адреса: Україна, 79000, Львів, вул. Ст. Бандери, 12, тел. 39-825-38, тел.: (032)228-18-96, 8-067-7575176, e-mail: victana@bk.ru.

УДК 519.85

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ С УЧЕТОМ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДАННЫХ, ОПИСАННОЙ НЕЧЕТКИМИ ЧИСЛАМИ

РОСКЛАДКА А.А., ЕМЕЦ А. О.

Рассматривается постановка общей задачи евклидовой комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности. Описывается модель упаковки на множестве перестановок с учетом неопределенности данных, заданных нечеткими числами. Предлагаются методы решения, даются оценки этих методов.

1. Введение

Развитие евклидовой комбинаторной оптимизации [1-10] и необходимость учитывать нечеткую информацию [11] привели к появлению новых моделей, которые используют нечеткие данные.

Цель исследования – развитие подходов решения задач евклидовой комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности. Для достижения этой цели ставится общая *задача* евклидовой комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности. В рамках общей задачи исследуется задача упаковки прямоугольников с нечеткими данными и предлагаются методы решения.

Приведем необходимые понятия и определения евклидовой комбинаторной оптимизации [1]. Обозначим через J_m – множество первых m натуральных чисел, т.е. $J_m = \{1,...,m\}$. Пусть $G = \{g_1, g_2,...,g_\eta\}$ – мультимножество, которое представляет собой совокупность η элементов, среди которых могут быть и одинаковые. Мультимножество G, которое имеет k разных элементов, можно задавать его основанием $S(G) = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ – кортежем всех разных элементов из G, а также первичной спецификацией $[G] = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$, которая определяет количество повторений каждого элемента основания в мультимножестве.

Рассмотрим упорядоченную n-выборку из мультимножества G:

$$e = (g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_n}), \qquad (1)$$

где $g_{i_j} \in G,\ i_j \neq i_t\ \forall\, i_j, i_t \in J_\eta,\ \forall\, j, t \in J_n$.

Множество Е, элементами которого есть n-выборки $\bar{e} = (\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$, $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ из мультимножества G вида (1), назовем евклидовым комбинаторным множеством, если из условия $\exists j \in J_n$, $\bar{e}_j \neq \tilde{e}_j$ следует $\bar{e} \neq \tilde{e}$.

Другими словами, множество Е имеет такое свойство: два элемента $\bar{e}$ и $\tilde{e}$, которые принадлежат множеству Е, отличны друг от друга, если они независимо от других отличий отличаются порядком следования символов, которые их образуют.

Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что элементы мультимножества G упорядочены по возрастанию, т.е. имеет место неравенство: $g_1 \leq g_2 \leq \ldots \leq g_\eta$.

Одним из наиболее распространенных евклидовых комбинаторных множеств является общее множество перестановок $E_{nk}(G)$ – множество всех n-выборок вида (1), где $n = \eta > k$, из мультимножества G, состоящего из n действительных чисел, среди которых k разных. Если наличие и количество одинаковых чисел среди элементов мультимножества не является существенным, то соответствующее множество перестановок будем обозначать $E_n(G)$.

Под общей задачей евклидовой комбинаторной оптимизации понимают задачу нахождения

$$F(x^*) = \min_{x \in E} F(x), \tag{2}$$

$$x^* = \arg \min_{x \in E} F(x), \tag{3}$$

при ограничениях

$$\psi^i(x) \le 0 \quad \forall i \in J_r; \tag{4}$$

$$\psi^{r+i}(x) = 0 \quad \forall i \in J_s, \tag{5}$$

r, s – некоторые целые неотрицательные константы; E – евклидовое комбинаторное множество в пространстве R^n, а $F(x)$, $\psi^i(x), \psi^{r+i}(x)$ – некоторые функции.

2. Постановка общей задачи евклидовой комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности

В силу наличия в реальных процессах недетерминированных параметров актуальным является рассмотрение задач оптимизации, в которых исходные данные имеют тот или иной элемент неопределенности, обуславливаются тем или иным фактором неопределенности. К основным факторам неопределенности данных следует отнести: стохастичность; интервальное задание; нечеткость; параметричность.

Приведем необходимые в дальнейшем понятия и определения.

Определение 1. Нечетким числом [9] G назовем нечеткое множество [11] вида $\tilde{G} = \{(g_1|\mu_1), \ldots, (g_\eta|\mu_\eta)\}$, где $\{g_1, g_2, \ldots, g_\eta\}$, $g_i \in R^1$, $\forall i \in J_m$ – носитель нечеткого множества; $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\eta\}$, $\mu_i \in R^1$, $\forall i \in J_\eta$ – множество значений функции принадлежности, $0 \le \mu_i \le 1$, $\forall i \in J_\eta$.

Далее термины нечеткое число и нечеткое множество будем понимать как равнозначные, используя термин число для арифметических (алгебраических) операций, а множество – для теоретико-множественных операций.

Случайной величиной [12] называется величина, значение которой зависит от случая и наперед неизвестно и для которой известна функция распределения вероятностей.

Как известно [13] элемент интервального пространства $I(R^n)$ задается упорядоченной парой $\langle x, \nu_x \rangle$, где x – центр интервала, ν_x – погрешность измерения.

Определение 2. Если центром интервала является нечеткое число $\tilde{x}$ со значением функции принадлежности, равным μ_x, то элемент интервального пространства будем называть нечетким элементом интервального пространства $I(R^n)$ и обозначать $\langle \tilde{x} \rangle = (\langle x, \nu_x \rangle | \mu_x)$. С геометрической точки зрения центр интервала, выраженный нечетким числом $\tilde{x} = \{(x_1 | \mu_1), \ldots, (x_\eta | \mu_\eta)\}$, представляет собой множество точек числовой прямой с координатами $x_1, \ldots, x_\eta$, которым приписаны значения функции принадлежности $\mu_1, \ldots, \mu_\eta$.

Общую задачу евклидовой комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности, которая включает в себя перечисленные выше факторы неопределенности, можно представить в таком виде:

$$S\{F(\langle \tilde{x} \rangle, \omega)\} \to \text{extr}, \tag{6}$$

$$\varphi_i(\langle \tilde{x} \rangle, \omega) \le 0 \quad \forall i \in J_m, \tag{7}$$

$$(\langle \tilde{x} \rangle, \omega) \in \tilde{E}, \tag{8}$$

$$\omega \in \Omega, \tag{9}$$

где $\langle \tilde{x} \rangle$ – нечеткий элемент интервального пространства; m – целая неотрицательная константа; ω – случайный параметр, который характеризует определенное состояние среды; Ω – множество этих состояний; $F(\langle \tilde{x} \rangle, \omega)$ – аргумент целевой функции задачи, который, вообще говоря, зависит от случайных чисел, нечетких чисел, элементов интервального пространства; $S(F)$ – некоторая детерминированная функция случайных величин (например, математическое ожидание, дисперсия и т.п.); φ_i, $i \in J_m$ – некоторые, зависящие, вообще говоря, от $\tilde{x}$ и ω функции; $\tilde{E}$ – евклидовое комбинаторное множество из элементов интервального пространства: $\tilde{E} \subset I(R^n)$.

Каждый из элементов модели (6)-(9) можно рассматривать как зависимый от ряда параметров.

3. Постановка и решение одной задачи евклидовой комбинаторной оптимизации в условиях нечеткой неопределенности, обуславливаемой нечеткостью данных

3.1. Перестановочное множество нечетких чисел

В случае, когда элементы мультимножества являются нечеткими числами, будем говорить о мультимножестве нечетких чисел $\tilde{G} = \{(g_1|\mu_1), \ldots, (g_\eta|\mu_\eta)\}$, где $\{g_1, g_2, \ldots, g_\eta\}$, $g_i \in R^1, \forall i \in J_\eta$ – носитель нечеткого множества, $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\eta\}$, $\mu_i \in R^1, \forall i \in J_\eta$ – множество значений функции принадлежности, $0 \le \mu_i \le 1$, $\forall i \in J_\eta$. Общее множество перестановок $E_{nk}(\tilde{G})$ назовем общим множеством перестановок нечетких чисел.

3.2. Основные операции с нечеткими числами

Использование методов решения такой задачи предполагает знание результатов операций нахождения суммы, минимума и максимума нечетких величин.

Определение 3. Суммой двух нечетких чисел

$$A=\{(a_1\mid\mu_1^A),\ldots,(a_\alpha\mid\mu_\alpha^A)\}\ \text{и}$$
$$B=\{(b_1\mid\mu_1^B),\ldots,(b_\beta\mid\mu_\beta^B)\}$$

назовем нечеткое число $A+B$, которое образуется с помощью построения множества пар

$$\tilde{C}=\left\{\left(\tilde{c}_1\middle|\mu_1^{\tilde{C}}\right),\ldots,\left(\tilde{c}_\eta\middle|\mu_\eta^{\tilde{C}}\right)\right\}=$$
$$=\{(a_1+b_1\mid\min[\mu_1^A,\mu_1^B]),\ldots,(a_1+b_\beta\mid\min[\mu_1^A,\mu_\beta^B]),$$
$$(a_2+b_1\mid\min[\mu_2^A,\mu_1^B]),\ldots,(a_2+b_\beta\mid\min[\mu_2^A,\mu_\beta^B]),$$
$$\ldots,\qquad(10)$$
$$(a_\alpha+b_1\mid\min[\mu_\alpha^A,\mu_1^B]),\ldots,(a_\alpha+b_\beta\mid\min[\mu_\beta^A,\mu_\beta^B])\}.$$

Первые элементы $\tilde{c}_1,\ldots,\tilde{c}_\eta$, где $\eta=\alpha\beta$, этих пар образуют мультимножество $\tilde{C}=\left\{\tilde{c}_1,\ldots,\tilde{c}_\eta\right\}$. Основание $S(\tilde{C})$ мультимножества $\tilde{C}$: $S(\tilde{C})=\{c_1,\ldots,c_r\}$ – это носитель нечеткого числа $A+B=\left\{(c_1\mid\mu_1),\ldots,(c_r\mid\mu_r)\right\}$. Значение функции принадлежности находят по правилу:

$$\mu_t=\max_{\forall i\in J_\eta:\ c_t=\tilde{c}_i}\{\mu_i^{\tilde{C}},i\in J_\eta\},\quad t\in J_r,\qquad(11)$$

т.е. значение μ_t выбирается как максимальное среди чисел $\mu_i^{\tilde{C}}$, для которых $\tilde{c}_i=c_t$, а r – число различных элементов в $\tilde{C}$.

Определение 4. Суммой трех нечетких чисел

$$A=\{(a_1|\mu_1^A),\ldots,(a_\alpha|\mu_\alpha^A)\},$$
$$B=\{(b_1|\mu_1^B),\ldots,(b_\beta|\mu_\beta^B)\}\ \text{и}$$
$$D=\{(d_1|\mu_1^D),\ldots,(d_\delta|\mu_\delta^D)\}$$

назовем нечеткое число $A+B+D=E+D$, где $E=A+B$.

Утверждение 1. Операция суммы для нечетких чисел коммутативна, т.е. $A+B=B+A$.

Доказательство. При образовании множества пар $\tilde{C}$ используются две операции: сложения a_i+b_j и нахождения минимума $\min(\mu_i^A,\mu_j^B)$, $i\in J_\alpha$, $j\in J_\beta$. Поскольку эти операции коммутативны: $a_i+b_j=b_j+a_i$, $\min(\mu_i^A,\mu_j^B)=\min(\mu_j^B,\mu_i^A)$, то множество пар $\tilde{C}^{A+B}$, полученное при сложении чисел A и B, будет идентичным множеству пар $\tilde{C}^{B+A}$, полученному при сложении чисел B и A.

Утверждение 2. Операция суммы для нечетких чисел ассоциативна, т.е. $(A+B)+D=A+(B+D)$.

Доказательство. При образовании множества пар $\tilde{C}$ используются две операции: сложения и нахождения минимума. Поскольку эти операции ассоциативны:

$$(a_i+b_j)+d_k=a_i+(b_j+d_k)\ \text{и}$$
$$\min(\min(\mu_i^A,\mu_j^B),\mu_k^D)=\min(\mu_i^A,\min(\mu_j^B,\mu_k^D)),\ i\in J_\alpha,$$
$$j\in J_\beta,\ k\in J_\delta,$$

то множество пар $\tilde{C}^{(A+B)+D}$ будет идентичным множеству пар $\tilde{C}^{A+(B+D)}$.

Определение 5. Максимум и минимум двух нечетких чисел

$$A=\left\{(a_1|\mu_1^A),\ldots,(a_\alpha|\mu_\alpha^A)\right\}\ \text{и}\ B=\left\{(b_1|\mu_1^B),\ldots,(b_\beta|\mu_\beta^B)\right\}$$

введем так: если $\sum_{i=1}^{\alpha}a_i\mu_i^A>\sum_{i=1}^{\beta}b_i\mu_i^B$,

то нечеткое число A будем называть максимумом, а нечеткое число B – минимумом. Аналогично можно рассматривать максимум, минимум из нескольких чисел.

Определение 6. Будем считать два нечетких числа $A=\left\{(a_1|\mu_1^A),\ldots,(a_\alpha|\mu_\alpha^A)\right\}$ и $B=\left\{(b_1|\mu_1^B),\ldots,(b_\beta|\mu_\beta^B)\right\}$ упорядоченными по невозрастанию $A\geq B$ тогда, когда $\sum_{i=1}^{\alpha}a_i\mu_i^A\geq\sum_{i=1}^{\beta}b_i\mu_i^B$.

Определение 7. Будем считать два нечетких числа A и B упорядоченными по возрастанию A>B тогда, когда $\sum_{i=1}^{\alpha}a_i\mu_i^A>\sum_{i=1}^{\beta}b_i\mu_i^B$. Пусть $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_\alpha$ и $b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_\beta$. Два нечетких числа A и B будем называть, следуя [11], равными $A=B$, если $\alpha=\beta$ и $a_i=b_i$, $\mu_i^A=\mu_i^B$, $i\in J_\alpha$.

3.3. Построение математической модели задачи упаковки при неопределенности, обусловленной нечеткостью данных

Рассмотрим пример построения математической модели одной задачи упаковки [1, 2, 5, 6, 8] в виде (6) – (9).

Пусть есть некоторая полубесконечная (достаточно длинная) полоса, которая разделена на полоски одинаковой ширины h (рис.1).

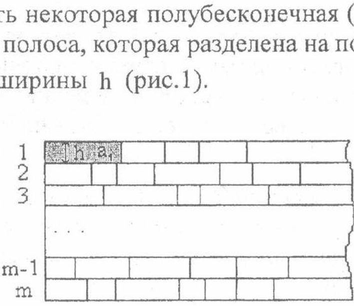

Рис. 1 . Иллюстрация к задаче упаковки прямоугольников

Задано еще p прямоугольников, длины которых равны $a_1, \dots, a_p$, ширина – h. Задача лежит в размещении прямоугольников без наложений в полосе таким образом, чтобы длина занятой от начала части полосы была минимально возможной.

Приближенные методы решения этой детерминированной задачи упаковки были рассмотрены в [1, 5, 6, 8], а точные – в [2]. Однако на практике длины прямоугольников $a_1, a_2, \dots, a_p$ заданы с некоторой неопределенностью, например из-за погрешности измерения. Поэтому рассмотрение задачи с учетом неопределенности в задании начальных данных является актуальной проблемой.

Построим математическую модель задачи. Будем считать, что a_i – нечеткие числа. В каждой полоске в оптимальном решении, очевидно, может стоять от одного до $p-(m-1)=p-m+1$ прямоугольников, где m – количество полосок, на которое разделена полоса, т.е. целая часть от деления ширины полосы на h. Обозначим $n = m(p-m+1)$ и введем в рассмотрение $n-p$ прямоугольников с шириной h и длиной a_0, где $a_0 = \{0 \mid 1\}$, т.е. является обычным нулем, другими словами $a_0 \in R^1$.

Тогда можно считать, что в каждой полоске стоит ровно $p-m+1$ прямоугольников. Обозначим x_{ij} – задаваемую нечетким числом длину прямоугольника, который стоит в i-й полоске на j-м от начала полоски месте, $i \in J_m$, $j \in J_{p-m+1}$. Рассмотрим вектор x вида:

$x = (x_{11}, \dots, x_{1,p-m+1}, x_{21}, \dots, x_{2,p-m+1}, \dots, x_{i1}, \dots, x_{i,p-m+1}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{m,p-m+1})$.

Образуем мультимножество $G = \{a_1, \dots, a_p, a_0, \dots, a_0\}$, в котором элемент a_0 встречается $n-p$ раз. Тогда вектор x можно рассматривать как элемент множества перестановок нечетких чисел $E_n(\tilde{G})$ из элементов мультимножества $\tilde{G}$. При этом каждой перестановке x будет соответствовать определенное размещение прямоугольников в полосе, и наоборот.

Используя введенные операции суммы, нахождения максимума и минимума, математическая модель сформулированной задачи упаковки прямоугольников при неопределенности, обусловленной нечеткими исходными величинами задачи, представляется [10] в таком виде:

найти

$$F^*(x^*) = \min_{x \in E_n(\tilde{G})} \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{p-m+1} x_{ij}; \qquad (12)$$

$$x^* = \arg \min_{x \in E_n(\tilde{G})} \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{p-m+1} x_{ij}, \qquad (13)$$

где $\arg f(x)$ обозначает точку x, которая доставляет значение $f(x)$ функции f.

Формула (12) дает минимально возможную длину занятой части полосы в виде нечеткого числа, а формула (13) – нечеткую перестановку x^*, на которой эта длина $F^*(x^*)$ достигается.

Как и всякую задачу оптимизации на дискретном множестве, поставленную задачу можно решать с помощью метода ветвей и границ [14] – метода направленного перебора, а для небольших размерностей – с помощью метода полного перебора.

Очевидно, что оценка сложности метода полного перебора допустимых решений для задачи (12)-(13) не является полиномиальной, поскольку полный перебор множества перестановок из n чисел (даже действительных) определяется величиной $n!$. Однако обусловленность рассмотрения такого метода и проведения его анализа состоит в том, что, осуществив его, мы получим верхнюю оценку сложности решения задачи упаковки (12)-(13).

Метод полного перебора состоит в том, чтобы для каждого x из множества нечетких перестановок $E_n(\tilde{G})$ вычислить целевую функцию – длину занятой части полосы:

$$F(x) = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{p-m+1} x_{ij}. \qquad (14)$$

При изложении методов длиной занятой части полоски i будем называть $\sum_{j=1}^{q} x_{ij}$ длин q размещенных в ней прямоугольников длины x_{ij} каждый, $j \in J_q$.

В основе метода ветвей и границ [14] лежит система ветвлений и отсечений, которая позволяет, вообще говоря, значительно уменьшить объем перебора.

Очевидно, что прямоугольники с длинами a_0 не влияют на результат: $A + a_0 = A$, где A – произвольное нечеткое число, поэтому при решении задачи методом ветвей и границ их не рассматриваем.

Рассмотрим алгоритм метода ветвей и границ, который предлагается для решения задачи (12)-(13).

1. Упорядочим нечеткие длины прямоугольников по невозрастанию $a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_p$.

2. Формируем начальное размещение $\tilde{x}$ следующим образом: каждый следующий прямоугольник из упорядоченного по убыванию набора длин, начиная с прямоугольника с длиной a_1, размещается в ту полоску, длина занятой части которой есть наименьшей после размещения предыдущего. Запоминаем начальное размещение $\tilde{x}$ и значение целевой функции $\tilde{F}(\tilde{x})$ при этом размещении.

3. Шаг $t=1$. На этом шаге размещаем прямоугольник с длиной a_1 в первую полоску, т.е. $x_{11} = a_1$.

Обозначим полученное множество как S^1. Оценку множества ξ для любого множества находим как длину занятой части полосы. На этом шаге оценка $\xi(S^1) = a_1$. Значение t увеличиваем на 1.

4. Шаг $t = 2$. Разбиваем множество S^1 на m подмножеств $S_1^2, S_2^2, \ldots, S_m^2$: $S^1 = S_1^2 \cup S_2^2 \cup \ldots \cup S_m^2$, $S_i^2 \cap S_j^2 = \varnothing$, $i \neq j$, $\forall i, j \in J_m$, где m – количество полосок, размещая прямоугольник с длиной a_2: в первую полоску, во вторую и т.д. Для каждого подмножества $S_i^2, i \in J_m$ находим оценку множества $\xi(S_i^2)$ (как длину занятой части полосы). Сравниваем $\xi(S_i^2)$ и $\tilde{F}(\tilde{x})$. Если $\xi(S_i^2) > \tilde{F}(\tilde{x})$, то узел S_i^2 отсекаем. Среди неотсеченных подмножеств $S_j^2, j \in J_m$ выбираем для разветвления то, для которого оценка множества наименьшая. Все подмножества, кроме подмножества, выбранного для разветвления, пересмотренных и отсеченных, переобозначаем на $S_i^3, \ldots, S_j^3$, где i, j – некоторые натуральные числа. Значение t увеличиваем на 1.

5. На каждом шаге $t = z \geq 3$ разбиваем множество S_υ^{z-1} на m подмножеств $S_{\upsilon 1}^z, S_{\upsilon 2}^z, \ldots, S_{\upsilon m}^z$: $S_\upsilon^{z-1} = S_{\upsilon 1}^z \cup S_{\upsilon 2}^z \cup \ldots \cup S_{\upsilon m}^z$, $S_i^z \cap S_j^z = \varnothing$, $i \neq j$, $\forall i, j \in J_m$, где m – количество полосок, т.е. размещаем прямоугольник с длиной a_z: в первую полоску, во вторую и т.д. Для каждого подмножества S_i^z, где i – некоторое натуральное число, находим оценку $\xi(S_i^z)$ (как длину занятой части полосы). Сравниваем $\xi(S_i^z)$ и $\tilde{F}(\tilde{x})$. Если $\xi(S_i^z) > \tilde{F}(\tilde{x})$, то узел S_i^z отсекаем. Если узел дерева представляет перестановку из множества перестановок $E_n(\tilde{G})$ и $\xi(S_i^z) < \tilde{F}(\tilde{x})$, то значению $\tilde{F}(\tilde{x})$ присваиваем значение $\xi(S_i^z)$, а размещению $\tilde{x}$ присваиваем размещение, которое отображает узел S_i^z. Для разветвления выбираем такое подмножество S_j^z, для которого оценка наименьшая. Все подмножества, кроме подмножества, выбранного для разветвления, пересмотренных и отсеченных, переобозначаем на $S_i^{z+1}, \ldots, S_j^{z+1}$, где i, j – некоторые натуральные числа. Значение t увеличиваем на 1.

6. Процесс продолжается до тех пор, пока не разветвим или не отсечем все узлы. Оптимальным значением целевой функции будет последнее значение $\tilde{F}(\tilde{x})$, а последняя точка $\tilde{x}$ – точкой, доставляющей оптимальное решение.

Замечание. В рассмотренном алгоритме метода ветвей и границ к поставленной задаче целесообразно использовать также следующее правило отсечения: если на некотором шаге длина занятой части полоски с номером i' равняется длине занятой части полоски с номером i'', где i', i'' – некоторые натуральные числа, $i' < i''$, то после размещения прямоугольника a_j в эти полоски, где j – некоторое натуральное число, подмножество, в котором a_j стоит в полоске с номером i'', отсекаем (рис. 2).

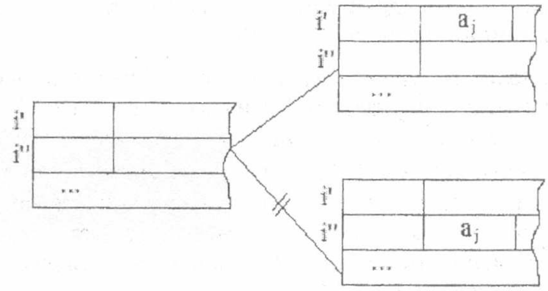

Рис. 2. Иллюстрация отсечения

3.4. Оценка сложности решения задачи

Найдем время работы алгоритма для нахождения наибольшего или наименьшего из двух нечетких чисел a_1 и a_2, $a_i = \{(g_1^i \mid \mu_1^i), \ldots, (g_{q_i}^i \mid \mu_{q_i}^i)\}$, $i \in J_2$, где $\{g_1^i, \ldots, g_{q_i}^i\}$ – носитель нечеткого множества a_i, а $\{\mu_1^i, \ldots, \mu_{q_i}^i\}$ – множество значений функции принадлежности. Обозначим $q = \max(q_1, q_2)$.

Согласно [15], под временем работы алгоритма тут и дальше понимаем число элементарных шагов, которые алгоритм выполняет. В нашем случае элементарными шагами будут операции сложения, умножения и сравнения.

Для нахождения $\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1$ необходимо выполнить операцию умножения не больше, чем q раз, а операцию сложения не больше, чем q-1 раз. Для определения максимума или минимума среди величин $\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1$ и $\sum_{i=1}^{q_2} g_i^2 \mu_i^2$ нужно выполнить одну операцию сравнения. Таким образом, для нахождения наибольшего или наименьшего значения из двух нечетких чисел a_1 и a_2 время работы алгоритма составляет не больше, чем $q + (q-1) + q + (q-1) + 1 = 4q - 1$, т.е. $\Theta(q)$, где Θ – асимптотически точная оценка ([15, с. 36].

Аналогично находим время работы алгоритма при определении наибольшего или наименьшего среди s ($s \geq 2$) нечетких чисел a_i, $a_i = \{(g_1^i \mid \mu_1^i), \ldots, (g_{q_i}^i \mid \mu_{q_i}^i)\}$, $i \in J_s$, где $\{g_1^i, \ldots, g_{q_i}^i\}$ – носитель нечеткого множества a_i, а $\{\mu_1^i, \ldots, \mu_{q_i}^i\}$ – множество значений функции принадлежности. Пусть $q = \max q_i$, $i \in J_s$. Для нахождения $\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1$ необходимо выполнить операцию умножения не больше, чем q раз, а операцию сложения не больше, чем q-1 раз, т.е. для s чисел операция умножения выполняется не больше, чем sq раз, а операция сложения – не больше, чем $s(q-1)$ раз. Для сравнения величин $\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1$, $\sum_{i=1}^{q_2} g_i^2 \mu_i^2$, ..., $\sum_{i=1}^{q_s} g_i^s \mu_i^s$ необходимо: сравнить суммы $\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1$ и $\sum_{i=1}^{q_2} g_i^2 \mu_i^2$, и большую (меньшую) сумму запомнить, затем сравнить ту сумму, что запомнили, с суммой $\sum_{i=1}^{q_3} g_i^3 \mu_i^3$ и большую (меньшую) сумму запомнить, и т.д, т.е. для сравнения величин $\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1$, $\sum_{i=1}^{q_2} g_i^2 \mu_i^2$, ..., $\sum_{i=1}^{q_s} g_i^s \mu_i^s$ необходимо выполнить $s-1$ операцию сравнения. Таким образом, для нахождения наибольшего или наименьшего среди s нечеткого числа время работы алгоритма будет не больше, чем $sq+s(q-1)+(s-1)=2sq-1$, т.е. $\Theta(sq)$.

Найдем время работы алгоритма для определения суммы двух нечетких чисел a_1 и a_2.

Для образования множества пар $\tilde{C}$ по формуле (10) необходимо выполнить максимум $q \cdot q = q^2$ операций сложения и столько же операций сравнения. Для образования основания $S(\tilde{C})$ необходимо отсортировать массив чисел максимальной размерности $q \cdot q$. Воспользуемся, например, алгоритмом быстрой сортировки [15, стр. 151]. Время работы алгоритма быстрой сортировки в худшем случае составляет $\Theta((q \cdot q)^2) = \Theta(q^4)$.

Каждому элементу основания ставим в соответствие, согласно формуле (11), функцию принадлежности, т.е. в наихудшем случае надо выполнить $q \cdot q\text{-}1 + q \cdot q\text{-}1 = 2q^2 - 2$ операций сравнения. Таким образом, время работы для образования суммы двух нечетких чисел a_1 и a_2 будет не больше, чем $q^2+q^2+q^4+2q^2-2=q^4+4q^2-2$, т.е. $\Theta(q^4)$.

Аналогично находим время работы алгоритма для нахождения суммы s нечетких чисел a_i, $i \in J_s$, $s \geq 2$. Время работы будет не больше, чем $q^s+q^s+q^{2s}+2q^s-2=q^{2s}+4q^s-2$, т.е. $\Theta(q^{2s})$.

Проведем анализ алгоритма метода полного перебора для решения задачи (12)-(13).

Для одной перестановки имеем: в каждой полоске складываем максимум $p-m+1$ прямоугольников, т.е. выполняем максимум $q^{2(p-m+1)}+4q^{(p-m+1)}-2$ операций, имеем оценку $\Theta(q^{2(p-m+1)})$. Для m полосок выполняем максимум $m(q^{2(p-m+1)}+4q^{(p-m+1)}-2)$ операций, оценка составляет $\Theta(mq^{2(p-m+1)})$. Среди занятых длин полосок находим наибольшую длину, т.е. выполняем не больше, чем $2mq-1$ операций.

Для каждой перестановки время работы составляет не больше, чем $m(q^{2(p-m+1)}+4q^{(p-m+1)}-2)+2mq-1$, т.е. имеем оценку $\Theta(mq^{2(p-m+1)})$.

Для $n!$ перестановок время работы будет не больше, чем

$$n!(m(q^{2(p-m+1)}+4q^{(p-m+1)}-2)+2mq-1)+(2qn!-1)$$

в последних скобках – количество операций, необходимых для выбора из $n!$ целевых функций наибольшей, т.е. имеем оценку $\Theta(n!\,mq^{2(p-m+1)})$.

Учитывая, что $n=m(p-m+1)$, имеем: время работы алгоритма метода полного перебора будет не больше, чем

$$(m(p-m+1))!\big(m\big(q^{2(p-m+1)}+4q^{(p-m+1)}-$$
$$-2\big)+2mq-1\big)+2q(m(p-m+1))!-1.$$

Оценка принимает вид $\Theta\big((m(p-m+1))!\,mq^{2(p-m+1)}\big)$.

Проанализируем последнее выражение. Для этого проанализируем отдельно все его слагаемые.

а) Оценка выражения

$(m(p-m+1))!\big(mq^{2(p-m+1)}+4mq^{(p-m+1)}-2m+2mq-1\big)$ составляет $T(m)=\Theta\big(m^2!\,mq^{2(p-m+1)}\big)$,

$$T(p)=\Theta\big(p!\,q^{2(p-m+1)}\big),\ T(q)=\Theta\big(q^{2(p-m+1)}\big).$$

б) Оценка выражения $2q(mp-m^2+m)!-1$ составляет $T(m)=\Theta(m^2!)$, $T(p)=\Theta(p!)$, $T(q)=\Theta(q)$.

Таким образом, время работы метода полного перебора зависит от количества полосок как $T(m)=\Theta\big(m^2!\,mq^{2(p-m+1)}\big)$, от количества прямоугольников как $T(p)=\Theta\big(p!\,q^{2(p-m+1)}\big)$, от максимальной мощности нечетких множеств, характеризующих длины прямоугольников, как $T(q)=\Theta\big(q^{2(p-m+1)}\big)$.

Проведем анализ алгоритма метода ветвей и границ для решения задачи (12)-(13).

Подсчитаем количество узлов дерева решений в худшем случае (без учета количества операций для нахождения начального размещения $\tilde{x}$ и значения целевой функции $\tilde{F}(\tilde{x})$). После размещения прямоугольника с длиной a_1 имеем 1 узел. После размещения прямоугольника с длиной a_2 добавляется еще m узлов. После размещения прямоугольника с длиной a_3 добавляется еще m^2 узлов и т. д., т.е. после размещения последнего прямоугольника с длиной a_p всего получим $1+m+m^2+m^3+\ldots+m^{p-1}$ узлов. Полученная последовательность является геометрической прогрессией, первый член которой равняется 1, а знаменатель геометрической прогрессии равняется m. Сумма p первых членов геометрической прогрессии равняется $1+m+m^2+\ldots+m^{p-1}=\frac{m^p-1}{m-1}$.

Таким образом, в худшем случае количество узлов дерева решений составляет не больше, чем $\frac{m^p-1}{m-1}$. Для каждого узла определяем, сколько прямоугольников в худшем случае складываем: для узлов 1-го уровня прямоугольники не складываем, для узлов 2-го уровня в худшем случае складываем 2 прямоугольника, для узлов 3-го уровня – 3 прямоугольника, …, для узлов уровня p – p прямоугольников, т.е. в худшем случае количество операций для нахождения суммы прямоугольников для узлов 1-го уровня – 0, для узлов 2-го уровня – $m(q^4+4q^2-2)$, для узлов 3-го уровня $m(q^6+4q^3-2)$, …, для узлов уровня p $m(q^{2p}+4q^p-2)$. Итого, в худшем случае количество операций для нахождения суммы прямоугольников для всех узлов составляет

$$0\cdot 1+m\cdot m(q^4+4q^2-2)+m^2\cdot m(q^6+4q^3-2)+$$
$$+m^3\cdot m(q^8+4q^3-2)+\ldots+m^{p-1}\cdot m(q^{2p}+4q^p-2)=$$
$$=m(m(q^4+4q^2-2)+m^2(q^6+4q^3-2)+\ldots+$$
$$+m^{p-1}(q^{2p}+4q^p-2))=$$
$$=m((mq^4+4mq^2-2m)+(m^2q^6+4m^2q^3-2m^2)+\ldots+$$
$$+(m^{p-1}q^{2p}+4m^{p-1}q^p-2m^{p-1}))=$$
$$=m((mq^4+m^2q^6+\ldots+m^{p-1}q^{2p})+4(mq^2+m^2q^3+\ldots+m^{p-1}q^p)-$$
$$-2(m+m^2+\ldots+m^{p-1}))=$$
$$=m(\frac{mq^4(1-(mq^2)^{p-1})}{1-mq^2}+4\frac{mq^2(1-(mq)^{p-1})}{1-mq}-2\frac{m(1-m(p-1))}{1-m}).$$

Для каждого узла сравниваем длины занятых частей полосок и выбираем наибольшую длину – это еще $\frac{m^p-1}{m-1}(2mq-1)$ операций. Для каждого узла наибольшую длину сравниваем со значением целевой функции $\tilde{F}(\tilde{x})$ – это еще $\frac{m^p-1}{m-1}(4q-1)$ операций. Таким образом, для всех узлов имеем не больше, чем

$$\frac{m^p-1}{m-1}(2mq-1+4q-1)+$$
$$+m(\frac{mq^4(1-(mq^2)^{p-1})}{1-mq^2}+4\frac{mq^2(1-(mq)^{p-1})}{1-mq}-2\frac{m(1-m(p-1))}{1-m})$$

операций.

Проанализируем последнее выражение. Для этого проанализируем отдельно все его слагаемые.

а) Оценка выражения $\frac{m^p-1}{m-1}(2mq+4q-2)$ составляет $T(m)=\Theta(m^p)$, $T(q)=\Theta(q)$, $T(p)=\Theta(m^p)$.

б) Оценка выражения

$$\frac{m^2q^4(1-(mq^2)^{p-1})}{1-mq^2}=\frac{m^2q^4-m^{p+1}q^{2p+1}}{1-mq^2}$$

составляет $T(m)=\Theta(m^p)$, $T(q)=\Theta(q^{2p})$, $T(p)=\Theta(m^pq^{2p})$.

в) Оценка выражения $\frac{4m^2q^4-4m^{p+1}q^{p+1}}{1-mq}$ составляет $T(m)=\Theta(m^p)$, $T(q)=\Theta(q^p)$, $T(p)=\Theta(m^pq^p)$.

г) Оценка выражения $\frac{-2m^2+2m^3p-2m^3}{1-m}$ составляет $T(m)=\Theta(m^2)$, от q не зависит, $T(p)=\Theta(p)$.

Таким образом, время работы метода ветвей и границ зависит от количества полосок как $T(m)=\Theta(m^p)$, от количества прямоугольников как $T(p)=\Theta(m^pq^{2p})$, от максимальной мощности нечетких множеств, характеризующих длины прямоугольников, как $T(q)=\Theta(q^{2p})$.

3.5. Численный пример

Проиллюстрируем методы нахождения решения задачи упаковки прямоугольников, длины которых заданы нечеткими числами.

Пусть задано три полоски и пять прямоугольников: $m=3$, $p=5$. Пусть длины прямоугольников заданы такими нечеткими числами:

$$a_1=\{(14|0,5),(15|0,7),(16|0,2)\},$$
$$a_2=\{(8|0,2),(9|0,9),(10|0,1)\},$$
$$a_3=\{(6|0,3),(7|0,7),(8|0,1)\},$$
$$a_4=\{(5|0,1),(6|0,9),(7|0,1)\},$$
$$a_5=\{(4|0,2),(5|0,8),(6|0,1)\}.$$

Определим $n=m\cdot(p-m+1)=3\cdot(5-3+1)=9$. Вводим в рассмотрение $n-p=9-5=4$ прямоугольника с длиной $a_0=\{(0|1)\}$. Вектор x имеет вид $x=(x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23},x_{31},x_{32},x_{33})$. Образуем мультимножество $G: G=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_0,a_0,a_0,a_0\}$.

а) Решим задачу (12)-(13) методом полного перебора.

Множество перестановок из элементов мультимножества G $E_n(G)$ имеет вид:

$$E_n(G)=E_9(G)=\{a_1a_2a_3a_4a_5a_0a_0a_0a_0,$$
$$a_1a_5a_0a_2a_0a_0a_3a_4a_0, a_0a_0a_0a_2a_0a_0a_3a_4a_5,\ldots\}.$$

Находим значения $F(x)$ для каждого элемента множества $E_n(G)$ по формуле (14). Так, для первого элемента длина занятой части полосы будет такой:

$$F(x)=\{(28|0,2),(29|0,3),(30|0,5),$$
$$(31|0,7),(32|0,2),(33|0,1),(34|0,1)\},$$

для второго –

$$F(x)=\{(18|0,2),(19|0,5),(20|0,7),$$
$$(21|0,2),(22|0,1)\}$$

для третьего –

$$F(x)=\{(15|0,1),(16|0,2),(17|0,2),$$
$$(18|0,7),(19|0,1),(20|0,1),(21|0,1)\}$$

и т.д.

Наименьшим будет значение функции $F^*(x^*)=\{(14|0,5),(15|0,7),(16|0,2)\}$, а одна из точек, которая доставляет оптимальное значение целевой функции, имеет вид:

$$x^*=(\{(8|0,2),(9|0,9),(10|0,1)\},\{(4|0,2),(5|0,8),(6|0,1)\},\{(0|1)\},$$
$$\{(6|0,3),(7|0,7),(8|0,1)\},\{(5|0,1),(6|0,9),(7|0,1)\},\{(0|1)\},$$
$$\{(14|0,5),(15|0,7),(16|0,2)\},\{(0|1)\},\{(0|1)\}).$$

б) Решим задачу (12)-(13) методом ветвей и границ.

Начальным будет размещение прямоугольника с длиной a_1 в первую полосу, прямоугольников с длинами a_2 и a_5 – во вторую, a_3 и a_4 – в третью. Значение целевой функции при начальном размещении:

$$\tilde{F}(\tilde{x})=\{(14|0,5),(15|0,7),(16|0,2)\}.$$

Шаг 1. Прямоугольник с длиной a_1 размещаем в первую полоску (рис. 3).

Оценка $\xi(S^0)$ равняется длине занятой части полосы, т.е. $\xi(S^1)=a_1=\{(14|0,5),(15|0,7),(16|0,2)\}$.

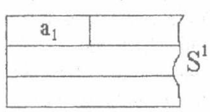

Рис. 3. Шаг 1

Шаг 2. Разбиваем множество S^1 на три подмножества S_1^2, S_2^2, S_3^2: $S^1=S_1^2\cup S_2^2\cup S_3^2$, $S_i^2\cap S_j^2=\varnothing$, $i\neq j$, $\forall i,j\in J_3$, в зависимости от возможности размещения прямоугольника с длиной a_2 (рис. 4).

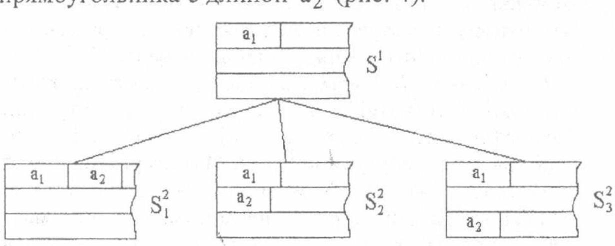

Рис. 4. Первое ветвление

Оценки $\xi(S_1^2)$, $\xi(S_2^2)$, $\xi(S_3^2)$ равняются:

$$\xi(S_1^2)=a_1+a_2=\{(22|0,2),(23|0,5),(24|0,7),$$
$$(25|0,2),(26|0,1)\};$$
$$\xi(S_2^2)=\xi(S_3^2)=a_1=\{(14|0,5),(15|0,7),(16|0,2)\}.$$

Поскольку $\xi(S_1^2)>\tilde{F}(\tilde{x})$ (так как

$$22\cdot 0,2+23\cdot 0,5+24\cdot 0,7+25\cdot 0,2+26\cdot 0,1=40,3>$$
$$>14\cdot 0,5+15\cdot 0,7+16\cdot 0,1=20,1\ ),$$

то вершину S_1^2 отсекаем. Рассмотрим вершины S_2^2 и S_3^2: согласно предложенному отсечению, вершину S_3^2 отсекаем. Разветвляем множество S_2^2.

Шаг 3. Разбиваем множество S_2^2 на три подмножества S_{21}^3, S_{22}^3, S_{23}^3: $S_2^2=S_{21}^3\cup S_{22}^3\cup S_{23}^3$, $S_{2(i)}^3\cap S_{2(j)}^3=\varnothing$, $i\neq j$, $\forall i,j\in J_3$, в зависимости от размещения прямоугольника с длиной a_3 (рис. 5).

Оценки $\xi(S_{21}^3)$, $\xi(S_{22}^3)$, $\xi(S_{23}^3)$:

$$\xi(S_{21}^3)=a_1+a_3=\{(20|0,3),(21|0,5),(22|0,7),$$
$$(23|0,2),(24|0,1)\};$$
$$\xi(S_{22}^3)=a_2+a_3=\{(14|0,2),(15|0,3),(16|0,7),$$
$$(17|0,1),(18|0,1)\};$$
$$\xi(S_{23}^3)=a_1=\{(14|0,5),(15|0,7),(16|0,2)\}.$$

Поскольку $\xi(S_{21}^3)>\tilde{F}(\tilde{x})$ и $\xi(S_{22}^3)>\tilde{F}(\tilde{x})$, то вершины S_{21}^3 и S_{22}^3 отсекаем. Разветвляем S_{23}^3.

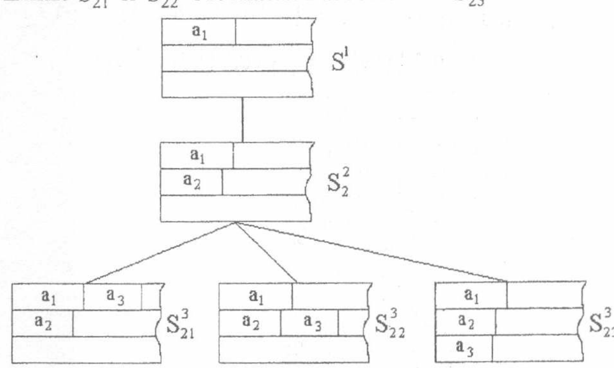

Рис. 5. Второе ветвление

Шаг 4. Разбиваем множество S_{23}^3 на три подмножества S_{231}^4, S_{232}^4, S_{233}^4: $S_{23}^3=S_{231}^4\cup S_{232}^4\cup S_{233}^4$, $S_{23(i)}^4\cap S_{23(j)}^4=\varnothing$, $i\neq j$, $\forall i,j\in J_3$, в зависимости от размещения прямоугольника с длиной a_4 (рис. 6).

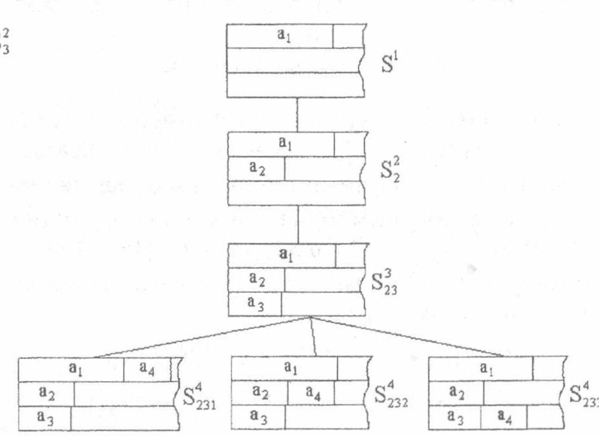

Рис. 6. Третье ветвление

Оценки $\xi\left(S^4_{231}\right)$, $\xi\left(S^4_{232}\right)$, $\xi\left(S^4_{233}\right)$:

$$\xi\left(S^4_{231}\right) = a_1 + a_4 = \{(19|0{,}1),(20|0{,}5),(21|0{,}7),(22|0{,}2),(23|0{,}1)\};$$

$$\xi\left(S^4_{232}\right) = a_2 + a_4 = \{(13|0{,}1),(14|0{,}2),(15|0{,}9),(16|0{,}1),(17|0{,}1)\};$$

$$\xi\left(S^4_{233}\right) = a_1 = \{(14|0{,}5),(15|0{,}7),(16|0{,}2)\}.$$

Поскольку $\xi\left(S^4_{231}\right) > \widetilde{F}(\widetilde{x})$ и $\xi\left(S^4_{232}\right) > \widetilde{F}(\widetilde{x})$, то вершины S^4_{231} и S^4_{232} отсекаем. Разветвляем S^4_{233}.

Шаг 5. Разбиваем множество S^4_{233} на 3 подмножества S^5_{2331}, S^5_{2332}, S^5_{2333}: $S^4_{233} = S^5_{2331} \cup S^5_{2332} \cup S^5_{2333}$, $S^5_{233(i)} \cap S^5_{233(j)} = \varnothing$, $i \neq j$, $\forall i, j \in J_3$, размещая прямоугольник с длиной a_5 (рис. 7).

Оценки $\xi\left(S^5_{2331}\right)$, $\xi\left(S^5_{2332}\right)$, $\xi\left(S^5_{2333}\right)$:

$$\xi\left(S^5_{2331}\right) = a_1 + a_5 = \{(18|0{,}2),(19|0{,}5),(20|0{,}7),(21|0{,}2),(22|0{,}1)\}.$$

$$\xi\left(S^5_{2333}\right) = a_3 + a_4 + a_5 = \{(15|0{,}1),(16|0{,}2),(17|0{,}2),(18|0{,}7),(19|0{,}1),(20|0{,}1),(21|0{,}1)\};$$

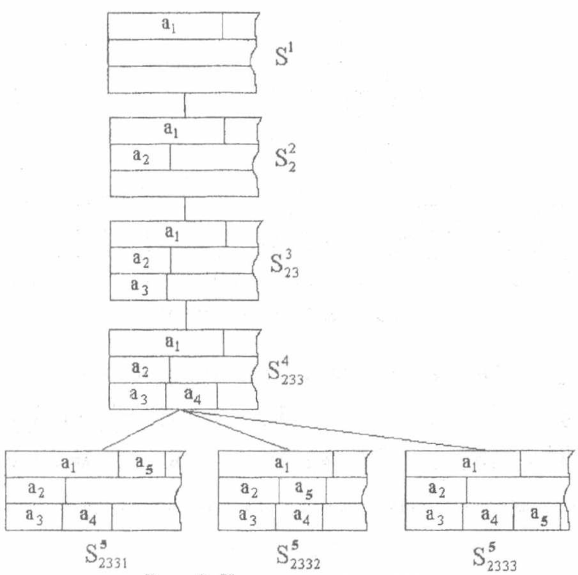

Рис. 7. Четвертое ветвление

Поскольку $\xi(S^5_{2331}) > \widetilde{F}(\widetilde{x})$ и $\xi(S^5_{2333}) > \widetilde{F}(\widetilde{x})$, то вершины S^5_{2331} и S^5_{2333} отсекаем. Таким образом, вершина S^5_{2332} отображает оптимальное решение задачи. Наименьшим будет значение функции $F^*(x^*) = \xi\left(S^4_{2332}\right) = \{(14|0{,}5),(15|0{,}7),(16|0{,}2)\}$, а точка, которая доставляет оптимальное значение целевой функции, имеет вид:

$$x^* = (\{(14|0{,}5),(15|0{,}7),(16|0{,}2)\},\{(0|1)\},\{(0|1)\},\{(8|0{,}2),(9|0{,}9),(10|0{,}1)\},\{(4|0{,}2),(5|0{,}8),(6|0{,}1)\},\{(0|1)\},\{(6|0{,}3),(7|0{,}7),(8|0{,}1)\},\{(5|0{,}1),(6|0{,}9),(7|0{,}1)\},\{(0|1)\}).$$

4. Выводы

Научная новизна. Рассмотрена постановка общей задачи евклидовой комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности, а также модель задачи упаковки, с учетом неопределенности данных, заданных нечеткими числами. Предложено и рассмотрено решение задачи методом ветвей и границ. Дана верхняя оценка сложности решения этой задачи на основании полного перебора, а также оценка решения методом ветвей и границ.

Практическая значимость проведенных исследований состоит в расширении аппарата евклидовой комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности исходных данных.

Сравнение с аналогами. Задача упаковки, с учетом неопределенности данных, заданных нечеткими числами, ранее не рассматривалась и не решалась.

Перспективы исследования. Исследованные в данной статье методы и их оценки могут быть использованы для построения и анализа алгоритмов решения задач в условиях неопределенности на других евклидовых комбинаторных множествах.

Литература: 1. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. 188с. **2.** *Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М.* Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи: Монографія. Полтава, РВЦ ПУСКУ, 2005. 103 с. **3.** *Ємець О.А., Колєчкіна Л.Н.* Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями: Монографія. К.: Наук. думка, 2005. 117 с. **4.** *Ємець О.О., Роскладка О.В.* Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування: Монографія. Полтава, РВЦ ПУСКУ, 2006. 129 с. **5.** *Емец О.А.* Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании. Учеб. пособие. К.: УМК ВО. 1992. 92 с. **6.** *Ємець О.О.* Теорія і методи комбінаторної оптимізації на евклідових множинах в геометричному проектуванні: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.05.01 / Ін-т кібернетики НАН України. К., 1997. 42 с. **7.** *Гребеннік І.В.* Математичні моделі та методи комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні. Авторефер. дис. ... д-ра техн. наук: 01.05.02 / Інститут проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного. Харків, 2006. 34 с. **8.** *Емец О.А.* Комбинаторная модель и приближенный метод с априорной оценкой решения оптимизационной задачи размещения разноцветных прямоугольников // Экономика и матем. методы. 1993. Т. 29. Вып. 2. С. 294-304. **9.** *Ємець О. О., Роскладка А. А., Ємець Ол-ра О.* Задача евклідової комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності // Збірник наукових праць Хмельницького нац. ун-ту. Серія: фізико-математичні науки. 2005. Вип. 1. С. 40-45. **10.** *Ємець Ол-ра О.* Одна задача комбінаторної оптимізації на переставленнях нечітких множин // Волинський математичний вісник: Серія Прикладна математика. 2004. Вип. 2(11). С. 101-106. **11.** *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982. 432 с. **12.** *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988. 448 с. **13.** *Стоян Ю.Г.* Расширенное пространство IS(R) центрированных интервалов. Харьков. 1994. 27 с. **14.** *Корбут А.А, Финкельштейн Ю.Ю.* Дискретное программирование. М.: Наука, 1969. 368 с. **15.** *Кормен Т.,* *Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2001. 960с.

Поступила в редколлегию 11.04.2007

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Лагно В.И.

Роскладка Андрей Анатольевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования и социальной информатики Полтавского университета потребительской кооперации Украины. Научные интересы: комбинаторная оптимизация в условиях неопределенности. Увлечения, хобби: музыка, хоровое пение. Адрес: Украина, 36040, Полтава, пер. Хоткевича, 4, кв. 48. Тел. 8-097-71-34-654, раб. (8-05322) 509-204, дом. (8-05322) 3-71-79. E-mail: roskladka@gmail.com.

Емец Александра Олеговна, ассистент кафедры информационно-вычислительных систем Полтавского университета потребительской кооперации Украины. Научные интересы: комбинаторная оптимизация. Увлечения, хобби: туризм. Адрес: Украина, 36003, Полтава, а/я 1671. Тел. 8-066-50-60-860, раб. (8-05322) 2-16-71, дом. (8-05322) 7-97-18. E-mail: slemets@e-mail.pl.ua.

УДК519.21

ПРОЦЕСС ФОРМИРОВАНИЯ ПОРОШКОВЫХ МАСС В ОБЪЁМЕ АКТИВНОЙ ЖИДКОСТИ

ВОВК А.В.

Рассматривается процесс обработки порошковой массы с заданным распределением её частиц по размерам. Предполагается, что обработка смеси производится при воздействии возмущений – импульсов, подобранных специальным образом. Эти возмущения подбираются так, чтобы дисперсные характеристики порошковой массы совпадали или незначительно отличались от заданных. Производится вывод системы дифференциальных уравнений, описывающей процесс формирования смеси. Предлагается способ расщепления этой системы на системы меньших порядков.

1. Введение и постановка задачи

Процесс формирования активной смеси

Рассмотрим процесс измельчения твёрдых частиц в целях получения порошковых масс с заданными дисперсными характеристиками. Обрабатываемая смесь находятся в объёме V, заполненном активной жидкостью. Характеристики действующих на смесь импульсов зависят от времени и их положения в объёме V. Многократные возмущения всех частей V, согласованные между собой определённым образом, приводят к изменению свойств смеси во всём объёме. Малым возмущениям соответствуют малые изменения дисперсных характеристик смеси. Объём V представляет собой резервуар, разделённый на n частей, ФУ объёмы V_i ($1 \le i \le n$) которых приблизительно равны. Границы объёмов V_i таковы, что смесь, находящаяся в каждом из них, во время возмущений, перемещается в соседние с V_i объёмы.

Возмущениям подвергаются все объёмы V_i, но характеристики возмущений (степень их воздействия на смесь) в разных V_i, вообще говоря, различны. В каждом V_i эти характеристики являются функциями точки $M \in V_i$. Указанные различия обусловлены стремлением сформировать в каждом V_i смесь, распределение компонент которой по своим дисперсным свойствам отличалось бы от распределений в $V_j \neq V_i$. Каждой точке $M \in V$ ставится в соответствие её окрестность $O(M)$, удовлетворяющая следующим условиям: объёмы $O(M)$ на несколько порядков меньше объёмов из (1) (см. ниже); число частиц в $O(M)$ достаточно велико.

Возмущения, действующие на смесь, подобраны так, что при многократном их повторении в различных частях V будет получена смесь с заданным предельным распределением частиц по размерам. Характеристики этого распределения $U(M)$ являются функциями точки M (точнее функцией $O(M)$ – окрестности, в которой действовало возмущение).

Скорости изменения характеристик активной смеси, происходящие под действием возмущений, неодинаковы во всех V_i. Процесс обработки смеси в каждом V_i производится следующим образом. Объём V_i разбивается на n_i объёмов

$$V_{i,1}, V_{i,2}, \ldots, V_{i,n_i}, \ i = 1, \ldots, n. \quad (1)$$

В каждом из них искомая функция $U(M,t)$, описывающая процесс формирования компонент, заменяется её усреднением (средним значением) по каждому объёму V_r ($1 \le r \le n_i$) из (1). При этом параметр t (время) предполагается фиксированным. Считаем, что величины объёмов из (1) приблизительно одинаковы. Смесь, содержащаяся в них, подвергается возмущениям, вообще говоря, в разные моменты времени. Точность аппроксимации функции $U(M,t)$ её средними значениями по объёмам (1) возрастает с ростом n_i.

Целью работы является исследование процессов формирования порошковой массы в объёме, отдельные части которого подвергаются возмущениям с разными характеристиками. Это приводит к *задаче* об установлении связей между возмущениями, характеристики которых в разных частях объёма не одинаковы, и дисперсными характеристиками порошковой массы.

2. Исследование порошковой массы

Периодически фиксируются дисперсные характеристики обрабатываемой порошковой массы в каждом объёме V_i. С этой целью в V_i через специальные трубки, оканчивающиеся на дне объёма V_i, вдувается