Ф
10

Емельяно

ISSN 1025-6415

Доповіді

НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

МАТЕМАТИКА
ПРИРОДОЗНАВСТВО
ТЕХНІЧНІ НАУКИ

ГОЛОВНИЙ
РЕДАКТОР ЖУРНАЛУ
академік НАН УКРАЇНИ
П.Г. КОСТЮК

11 2006

Засновник — Президія Національної академії наук України

Свідоцтво про державну реєстрацію журналу —
серія КВ № 8889, видане 21 червня 2004 р.

Адреса редакції:
Україна, 01601, Київ, 1, вул. Терещенківська, 3
Тел. (044) 235-12-16

«ДОПОВІДІ НАН УКРАЇНИ» публікують короткі повідомлення про оригінальні і ніде не надруковані дослідження в галузі математики, природознавства і техніки, авторами яких є дійсні члени та члени-кореспонденти НАН України. Журнал публікує також повідомлення інших авторів, подані дійсними членами та членами-кореспондентами НАН України з відповідної спеціальності, які тим самим беруть на себе відповідальність за наукові достоїнства поданої статті.
Призначення «ДОПОВІДЕЙ НАН УКРАЇНИ» полягає перш за все в публікації повідомлень про нові наукові дослідження, що мають пріоритетний характер.
«ДОПОВІДІ НАН УКРАЇНИ» не публікують статті полемічні, класифікаційні і вузькоспеціальні, що містять розв'язки стандартних задач; статті описові, оглядові та методичні (якщо метод не є принципово новим); статті з систематики рослин, тварин і мікроорганізмів; статті, в яких викладаються окремі етапи досліджень або матеріал, поділений на кілька послідовних публікацій; статті про рядові дослідження, що не становлять загального інтересу і не містять значущих висновків.
Публікація в «ДОПОВІДЯХ НАН УКРАЇНИ» не перешкоджає опублікуванню розширеного варіанта статті в інших періодичних виданнях.

Доповіді Національної академії наук України

11 • 2006

Науково-теоретичний журнал Президії Національної академії наук України

Заснований у 1939 р.

Виходить щомісяця

Зміст

Contents

5. *Орлов И. В.* Достаточные условия экстремума и K-экстремума в произведении двух ядерных ЛВП (общий случай) // Уч. зап. Таврич. нац. ун-та. Математика. Механика. Информатика и кибернетика. – 2004. – **17(56)**, № 1. – С. 68–77.
6. *Божонок Е. В.* Достаточные условия экстремума интегральных функционалов в произведении ядерных пространств // Динамич. системы. – 2005. – Вып. 19. – С. 100–117.
7. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. – Москва: Физматгиз, 1961. – 228 с.
8. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – Москва: Мир, 1971. – 392 с.
9. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.

Таврійський національний університет ім. В. І. Вернадського, Сімферополь

Надійшло до редакції 03.05.2006

УДК 519.85

О. О. Ємець, Т. М. Барболіна, О. О. Черненко

Розв'язування умовних задач з дробово-лінійною функцією цілі на множині розміщень

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. Г. Стояном)

A method of solution of the problem of optimization on arrangements with a linear-fractional objective function and with linear additional restrictions is offered.

Розвиток теорії евклідових комбінаторних множин та оптимізації на них (див., зокрема, [1–4]) вимагає розробки спеціальних методів і алгоритмів розв'язування комбінаторних задач. У багатьох публікаціях (див., зокрема, [1–5]) досліджені властивості евклідових комбінаторних множин, описані методи та алгоритми розв'язування лінійних умовних задач на переставленнях, поліпереставленнях, розміщеннях. Серед евклідових комбінаторних оптимізаційних задач таких, що не мають ефективних методів розв'язування, важливим є клас задач з дробово-лінійною функцією цілі на евклідовій комбінаторній множині розміщень.

У даній роботі пропонується метод розв'язування оптимізаційних задач з дробово-лінійними цільовими функціями та лінійними додатковими обмеженнями на множині розміщень.

Як відомо [1], опуклою оболонкою евклідової комбінаторної множини розміщень $E_{\eta n}^{k}(G) \subset \mathbb{R}^m$, де $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_\eta\}$, є многогранник розміщень $\Pi_{\eta n}^{k}(G)$, що описується системою нерівностей (через $|\omega|$ позначена кількість елементів у множині ω)

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j \leqslant \sum_{i\in\omega} x_i \leqslant \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta-j+1} \qquad \forall\omega \subset J_k, \tag{1}$$

тут і далі $J_k = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Сукупність нерівностей системи (1), які мають однакове значення $|\omega| = i$, назвемо i-ю спілкою.

Нехай задана задача вигляду: знайти впорядковану пару $\langle F(x^*), x^* \rangle$:

$$F(x^*) = \operatorname*{extr}_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} c_j x_j + c_0}{\sum\limits_{j=1}^{m} d_j x_j + d_0}, \qquad x^* = \operatorname*{arg\,extr}_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} c_j x_j + c_0}{\sum\limits_{j=1}^{m} d_j x_j + d_0} \tag{2}$$

за комбінаторної умови

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in E_{\eta n}^{k}(G) \subset \mathbb{R}^m, \qquad k \leqslant m, \tag{3}$$

та додаткових лінійних обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \qquad i \in J_p. \tag{4}$$

Вважаємо, що виконується умова

$$\sum_{i=1}^{m} d_i x_i + d_0 > 0$$

для будь-якої точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, що належить області визначення задачі (2)–(4), і цільова функція (2) максимізується.

Здійснимо релаксацію (2)–(4): умову (3) замінимо (1). До задачі (1), (2), (4) застосуємо перетворення

$$y_0 = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} d_i x_i + d_0}, \qquad y_i = x_i y_0 \quad \forall i \in J_m, \qquad x \in \mathbb{R}^m, \tag{5}$$

отримаємо задачу, яку згідно з методом послідовного приєднання обмежень (МППО) [1] (τ — номер ітерації) запишемо у вигляді

$$F(y^\tau) = \max_{y \in D^\tau} \sum_{i=0}^{m} c_i y_i, \qquad y^\tau = \arg\max_{y \in D^\tau} \sum_{i=0}^{m} c_i y_i, \tag{6}$$

де $y^\tau = (y_0^\tau, y_1^\tau, \ldots, y_m^\tau) \in \mathbb{R}^{m+1}$ і область D_τ описується системою S_τ, яка при $\tau = 0$ має вигляд

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j - b_i y_0 \leqslant 0, \qquad i \in J_p, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j y_0 \leqslant \sum_{i \in \omega} y_i \leqslant \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta-j+1} y_0 \qquad \forall \omega \subset J_k, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} d_i y_i + d_0 y_0 = 1, \qquad y_0 > 0, \qquad y_i \geqslant 0 \quad \forall i \in J_m. \tag{9}$$

Задача (1), (2), (4) та задача (6)–(9) еквівалентні, тобто якщо $y = (y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — розв'язок задачі (6)–(9), то розв'язок $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ задачі (1), (2), (4) отримаємо із співвідношення $x_i = y_i/y_0$ $\forall i \in J_m$, що випливає з перетворення (5).

Розглянемо розв'язування задачі (6)–(9). Застосуємо такий алгоритм МППО.

1. $\tau = 1$: формуємо систему S_1 лінійних обмежень, що описує область $D_1 \supset D_0$ і включає нерівності (7), (9) та (8) при $|\omega| = 1$.

2. Розв'язуємо (6) на області D_τ при значенні індексу τ ($\tau \geqslant 1$) модифікованим симплекс-методом. Якщо задача не має розв'язку, то не має розв'язку і (6)–(9), інакше нехай $y^\tau = (y_0^\tau, y_1^\tau, \ldots, y_k^\tau, \ldots, y_m^\tau) \in \mathbb{R}^{m+1}$ — розв'язок (6)–(9), отриманий на ітерації τ.

3. Якщо $\tau \leqslant 2$, то переходимо на п. 4, інакше працює процедура відкидання обмежень (для зменшення вимірності розв'язуваної задачі) [6, с. 337].

4. За знайденою точкою $y^\tau = (y_0^\tau, y_1^\tau, \ldots, y_k^\tau, \ldots, y_m^\tau) \in \mathbb{R}^{m+1}$ визначаємо точку $y^\tau = (y_0^\tau, y_1^\tau, \ldots, y_k^\tau)$ та перевіряємо виконання всіх обмежень системи (8).

Якщо точка y^τ задовольняє не всі обмеження (8), то переходимо на п. 5, інакше $y^\tau = (y_0^\tau, y_1^\tau, \ldots, y_k^\tau, \ldots, y_m^\tau) = \bar{y} \in \mathbb{R}^{m+1}$ — розв'язок (6)–(9).

5. Формуємо систему $S_{\tau+1}$, включаючи до S_τ нерівності з (8), що не виконуються в точці y^τ. Відповідно, $S_{\tau+1}$ описує область $D_{\tau+1}$, $D_{\tau+1} \subset D_\tau$. Приймаємо $\tau = \tau + 1$ і переходимо на п. 2.

Зауваження. Для ефективної перевірки обмежень системи (8) сформульована та доведена теорема, застосування якої дозволяє шукати розв'язок задачі (6)–(9) не на допустимій області, а на області, яка її містить. За рахунок цього кількість обмежень у системі значно зменшується і ефективніше працює МППО.

Враховуючи, що $E = \psi(E_{\eta n}^k(G))$ [5], запишемо таку теорему.

Теорема. *Нехай* $y = (y_0, y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $y = (y_0, y_1, \ldots, y_k) \in \operatorname{conv} E$, *де* $E = \psi(E_{\eta n}^k(G))$ *та* $y_i \leqslant y_{i+1}$ $\forall i \in J_{k-1}^0$, *тоді з виконання для нерівності спілки за номером i обмежень*

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_i \geqslant (g_1 + g_2 + \ldots + g_i) y_0, \tag{10}$$

$$y_k + y_{k-1} + \ldots + y_{k-i+1} \leqslant (g_\eta + g_{\eta-1} + \ldots + g_{\eta-i+1}) y_0 \tag{11}$$

випливає виконання всіх інших обмежень i-ї спілки в точці $y = (y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k)$.

За розв'язком (6)–(9) $y^\tau = (y_0^\tau, y_1^\tau, \ldots, y_k^\tau, \ldots, y_m^\tau) = \bar{y}$ визначаємо точку $x^\tau = (x_0^\tau, x_1^\tau, \ldots, x_k^\tau) = \bar{x}$ — розв'язок (1), (2), (4), де $x_i^\tau = y_i^\tau / y_0^\tau$ $\forall i \in J_k$. Якщо при цьому $\bar{x} \in E_{\eta n}^k(G)$, то задача (2)–(4) розв'язана. В іншому разі здійснюємо перегляд точок множини $E_{\eta n}^k(G)$ [3], які задовольняють умову (4), аж до отримання екстремуму та екстремалі задачі (2)–(4). Перегляд починаємо з точки, що є елементом множини розміщень, найближчої до $\bar{x}$ відповідно до лінійного порядку з [3]. При цьому з розгляду виключаються точки, які надають цільовій функції значення менше, ніж отримане на попередніх ітераціях σ, тобто ті, що не задовольняють нерівність $F(x) \geqslant \sigma$. Остання нерівність рівносильна лінійній

$$\sum_{j=1}^{m} (c_j x_j + c_0) - \sigma \sum_{j=1}^{m} (d_j x_j + d_0) \geqslant 0. \tag{12}$$

Оскільки перегляд здійснюється саме точок множини розміщень (точка задовольняє умови (3), (4) — область допустимих точок), причому на кожній наступній ітерації точка надає цільовій функції значення не менше попереднього σ внаслідок (12) (умова оптимальності), то алгоритм дає точний розв'язок (2)–(4).

Аналогічно [4] доводиться, що алгоритм розв'язування задачі (2)–(4) є скінченним.

Запропонований метод реалізовано в середовищі Delphi мовою Object Pascal. Проведена оцінка ефективності алгоритму шляхом числових експериментів. Розглядалися задачі, генеровані випадковим чином: елементи G вибиралися як випадкові рівномірно розподілені числа на інтервалах [1; 10], [1; 20], [1; 50], [1; 100]. Таким же чином вибиралися коефіцієнти цільової функції та додаткових обмежень. Програмна реалізація методу виявилася практично ефективною для задач вимірності $m \leqslant 33$ при $2 \leqslant k \leqslant m$. Час розрахунку задач становить від долей секунди до години на ПК Celeron з частотою 2.40 ГГц.

Таким чином, побудовано метод розв'язування умовної задачі з дробово-лінійною функцією на розміщеннях, який застосовний як для розв'язування частково комбінаторних задач, так і для повністю комбінаторних, як для умовних, так і для безумовних задач оптимізації з дробово-лінійною функцією цілі.

У перспективі вважаємо за доцільне проаналізувати ефективність роботи алгоритму для різних класів задач та залежність часу розв'язування від параметрів цих задач.

1. *Стоян Ю. Г., Ємець О. О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – Київ: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.
2. *Стоян Ю. Г., Ємець О. О., Ємець Є. М.* Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с.
3. *Емец О. А., Барболина Т. Н.* Решение задач евклидовой комбинаторной оптимизации методом построения лексикографической эквивалентности // Кибернетика и систем. анализ. – 2004. – № 5. – С. 115–125.
4. *Барболіна Т. М.* Методи и алгоритми розв'язування оптимізаційних задач на розміщеннях з додатковими умовами: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.01 / Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – Київ, 2005. – 19 с.
5. *Черненко О. О.* Дослідження множини допустимих розв'язків задачі оптимізації дробово-лінійної функції на евклідовій комбінаторній множині розміщень // Матеріали X Міжнар. наук. конф. ім. ак. М. Кравчука (13–15 травня 2004 р., Київ). – Київ, 2004. – С. 548.
6. *Реклейтис Г. В., Рейвиндран А., Рэгсдел К. М.* Оптимизация в технике. Т. 1. – Москва: Мир, 1986. – 352 с.

Полтавський університет споживчої кооперації України
Полтавський державний педагогічний університет ім. В. Г. Короленка

Надійшло до редакції 17.04.2006

Індекс 74137

Доповіді

НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

ISSN 1025-6415 Доповіді Національної академії наук України. 2006. № 11, 1-204