

Емелюк

ISSN 1025-6415

Д О П О В І Д І

НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

МАТЕМАТИКА
ПРИРОДОЗНАВСТВО
ТЕХНІЧНІ НАУКИ

ГОЛОВНИЙ
РЕДАКТОР ЖУРНАЛУ
академік НАН УКРАЇНИ
П.Г. КОСТЮК

11

2006

Засновник — Президія Національної академії наук України

Свідомство про державну реєстрацію журналу —
серія КВ № 8889, видане 21 червня 2004 р.

Адреса редакції:

Україна, 01601, Київ, 1, вул. Терещенківська, 3

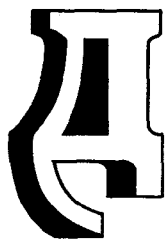
Тел. (044) 235-12-16

«ДОПОВІДІ НАН УКРАЇНИ» публікують короткі повідомлення про оригінальні і ніде не надруковані дослідження в галузі математики, природознавства і техніки, авторами яких є дійсні члени та члени-кореспонденти НАН України. Журнал публікує також повідомлення інших авторів, подані дійсними членами та членами-кореспондентами НАН України з відповідної спеціальності, які тим самим беруть на себе відповідальність за наукові достоїнства поданої статті.

Призначення «ДОПОВІДЕЙ НАН УКРАЇНИ» полягає перш за все в публікації повідомлень про нові наукові дослідження, що мають пріоритетний характер.

«ДОПОВІДІ НАН УКРАЇНИ» не публікують статті полемічні, класифікаційні і вузькоспеціальні, що містять розв'язки стандартних задач; статті описові, оглядові та методичні (якщо метод не є принципово новим); статті з систематики рослин, тварин і мікроорганізмів; статті, в яких викладаються окремі етапи досліджень або матеріал, поділений на кілька послідовних публікацій; статті про рядові дослідження, що не становлять загального інтересу і не містять значущих висновків.

Публікація в «ДОПОВІДЯХ НАН УКРАЇНИ» не перешкоджає опублікуванню розширеного варіанта статті в інших періодичних виданнях.



ОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

11 • 2006

Науково-теоретичний журнал Президії Національної академії наук України

Заснований у 1939 р.

Виходить щомісяця

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ ЖУРНАЛУ

П. Г. Костюк (головний редактор), С. А. Андронаті, В. Г. Бар'яхтар, А. Ф. Булат,
Г. М. Гавричкова (заст. головного редактора), В. В. Гончарук, Я. М. Григоренко,
В. Т. Грінченко, Д. М. Гродзінський, О. М. Гузь, В. М. Єремєєв, В. П. Кухар,
І. М. Коваленко, С. В. Комісаренко, В. С. Королук, Ю. О. Митропольський,
О. О. Мойбенко, А. Г. Наумовець (заст. головного редактора), І. М. Неклюдов,
Г. Г. Полікарпов, В. Д. Походенко, І. К. Походня, А. М. Самойленко,
В. П. Семиноженко, І. В. Сергієнко, О. О. Созинов, В. І. Старостенко,
Б. С. Стогній, В. М. Шестопалов, А. П. Шпак, М. П. Щербак, Я. С. Яцків

Математика

<i>Аврамов К. В., Пьерр К., Ширяева Н. В.</i> Нелинейные нормальные формы колебаний системы с гироскопическими силами	7
<i>Боженок К. В., Орлов І. В.</i> Умови Лежандра–Якобі для компактних екстремумів інтегральних функціоналів	11
<i>Ємець О. О., Барболіна Т. М., Черненко О. О.</i> Розв’язування умовних задач з дробово-лінійною функцією цілі на множині розміщень	15
<i>Пемох Г. П., Богай Н. А.</i> Про асимптотично періодичні розв’язки систем лінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом	19
<i>Ромашенко Г. С.</i> Про сумісну подібність операторів згортки в просторах Соболева	23
<i>Сохацький Ф. М.</i> Про медіальність універсальних алгебр та схрещених ізотопів груп ...	29

Механіка

<i>Богданова О. С., Каминский А. А.</i> О характере разрушения ортотропной пластины с периодической системой коллинеарных трещин при двухосном нагружении	36
<i>Дзюба В. В.</i> Взаимодействие тел разной геометрической формы в потенциальном потоке жидкости. Внутренняя осесимметричная задача	41
<i>Зубко В. И.</i> Аналитическое решение задач о колебаниях регулярных систем цепной структуры с использованием аналогии с пакетами пластин	51
<i>Меньшиков В. А.</i> Сингулярные ядра интегральных уравнений в задаче о трещине на границе раздела полупространств при гармоническом нагружении	58
<i>Шульга М. О., Шульга В. М.</i> До теорії магнітострикції феритів кубічної системи	63

Фізика

<i>Глушко О. Є., Карачевцева Л. А.</i> Динаміка фотонної забороненої зони у двовимірних фотонних кристалах на основі кремнію	68
<i>Егоров Р. И., Орлова Т. Н., Теренецкая И. П.</i> Применение Стокс-поляриметрии для исследования УФ-индуцированных трансформаций холестерических жидких кристаллов	73
<i>Малюта Ю. М., Обиход Т. В.</i> Физика высоких энергий и производные категории	77

Інформатика

<i>Сергиенко И. В., Дейнека В. С.</i> Численное моделирование прогибов составного стержня с одной степенью свободы	81
--	----

Енергетика

<i>Афонин А. А.</i> Формирование однородного магнитного поля в магнитных системах электротехнического и медицинского оборудования	90
<i>Божко А. Е.</i> К анализу помехоустойчивых ждущих блокинг-генераторов	96

Матеріалознавство

<i>Буланова М. В., Подрезов Ю. Н., Фартушина Ю. В., Рафал А. Н., Фирстов С. А.</i> Структура и механические свойства сплавов системы Ti – Sn	101
--	-----

Contents

Mathematics

<i>Avramov K. V., Pierre C., Shiryayeva N. V.</i> Nonlinear normal modes of oscillations of a system with gyroscopic forces	7
<i>Bozhonok K. V., Orlov I. V.</i> The Legendre–Jacobi conditions for the compact extrema of integral functionals	11
<i>Emets O. O., Barabolina T. M., Chernenko O. O.</i> The solution of conditional problems with linear-fractional target function on a set of arrangements	15
<i>Pelyukh G. P., Bogai N. A.</i> On the asymptotically periodic solutions of the systems of linear difference equations with continuous argument	19
<i>Romashchenko G. S.</i> On the common similarity of convolution operators in the Sobolev spaces	23
<i>Sokhats'kyi F. M.</i> On the mediality of the universal algebras and cross isotopes of groups ...	29

Mechanics

<i>Bogdanova O. S., Kaminsky A. A.</i> On the character of the fracture of an orthotropic plate with the periodic system of collinear cracks under biaxial loading	36
<i>Dzyuba V. V.</i> The interaction of bodies with different geometric forms in a potential flow of fluid The internal axisymmetric problem	41
<i>Zubko V. I.</i> An analytic solution of the problems on oscillations of the regular system with chain structure with the use of the analogy with the packages of plates	51
<i>Men'shikov V. A.</i> The singular kernels of integral equations in the problem on a crack on the interface of two-half-spaces under harmonic loading	58
<i>Shul'ga M. O., Shul'ga V. M.</i> On the magnetostriction theory of ferrites in a cubic system ...	63

Physics

<i>Glushko O. E., Karachevtseva L. A.</i> The dynamics of a photonic band gap in 2D Si-based photonic crystals	68
<i>Egorov R. I., Orlova T. N., Terenetskaya I. P.</i> Application of the Stokes polarimetry in the study of UV-induced transformations of cholesteric liquid crystals	73
<i>Malyuta Yu. M., Obikhod T. V.</i> High-energy physics and derived categories	77

Information Science

<i>Sergienko I. V., Deineka V. S.</i> Numerical modeling of deflections of a composite rod with one degree of freedom	81
---	----

Energetics

<i>Afonin A. A.</i> The formation of a homogeneous magnetic field in magnetic systems of electrotechnical and medical equipment	90
---	----

5. Орлов И. В. Достаточные условия экстремума и K -экстремума в произведении двух ядерных ЛВП (общий случай) // Уч. зап. Таврич. нац. ун-та. Математика. Механика. Информатика и кибернетика. – 2004. – 17(56), № 1. – С. 68–77.
6. Божонок Е. В. Достаточные условия экстремума интегральных функционалов в произведении ядерных пространств // Динамич. системы. – 2005. – Вып. 19. – С. 100–117.
7. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. – Москва: Физматгиз, 1961. – 228 с.
8. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – Москва: Мир, 1971. – 392 с.
9. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.

Таврійський національний університет
ім. В. І. Вернадського, Сімферополь

Надійшло до редакції 03.05.2006

УДК 519.85

© 2006

О. О. Ємець, Т. М. Барболіна, О. О. Черненко

Розв'язування умовних задач з дробово-лінійною функцією цілі на множині розміщень

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. Г. Стояном)

A method of solution of the problem of optimization on arrangements with a linear-fractional objective function and with linear additional restrictions is offered.

Розвиток теорії евклідових комбінаторних множин та оптимізації на них (див., зокрема, [1–4]) вимагає розробки спеціальних методів і алгоритмів розв'язування комбінаторних задач. У багатьох публікаціях (див., зокрема, [1–5]) досліджені властивості евклідових комбінаторних множин, описані методи та алгоритми розв'язування лінійних умовних задач на переставленнях, поліпереставленнях, розміщеннях. Серед евклідових комбінаторних оптимізаційних задач таких, що не мають ефективних методів розв'язування, важливим є клас задач з дробово-лінійною функцією цілі на евклідовій комбінаторній множині розміщень.

У даній роботі пропонується метод розв'язування оптимізаційних задач з дробово-лінійними цільовими функціями та лінійними додатковими обмеженнями на множині розміщень.

Як відомо [1], опуклою оболонкою евклідової комбінаторної множини розміщень $E_{\eta}^k(G) \subset \mathbb{R}^m$, де $G = \{g_1, g_2, \dots, g_{\eta}\}$, є многогранник розміщень $\Pi_{\eta}^k(G)$, що описується системою нерівностей (через $|\omega|$ позначена кількість елементів у множині ω)

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j \leq \sum_{i \in \omega} x_i \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta-j+1} \quad \forall \omega \subset J_k, \quad (1)$$

тут і далі $J_k = \{1, 2, \dots, k\}$.

Сукупність нерівностей системи (1), які мають однакове значення $|\omega| = i$, назовемо i -ю спілкою.

Нехай задана задача вигляду: знайти впорядковану пару $\langle F(x^*), x^* \rangle$:

$$F(x^*) = \operatorname{extr}_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{\sum_{j=1}^m c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^m d_j x_j + d_0}, \quad x^* = \arg \operatorname{extr}_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{\sum_{j=1}^m c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^m d_j x_j + d_0} \quad (2)$$

за комбінаторної умови

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in E_{\eta n}^k(G) \subset \mathbb{R}^m, \quad k \leq m, \quad (3)$$

та додаткових лінійних обмеженнях

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in J_p. \quad (4)$$

Вважаємо, що виконується умова

$$\sum_{i=1}^m d_i x_i + d_0 > 0$$

для будь-якої точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, що належить області визначення задачі (2)–(4), і цільова функція (2) максимізується.

Здійснимо релаксацію (2)–(4): умову (3) замінимо (1). До задачі (1), (2), (4) застосуємо перетворення

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m d_i x_i + d_0}, \quad y_i = x_i y_0 \quad \forall i \in J_m, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad (5)$$

отримаємо задачу, яку згідно з методом послідовного приєднання обмежень (МППО) [1] (τ — номер ітерації) запишемо у вигляді

$$F(y^\tau) = \max_{y \in D^\tau} \sum_{i=0}^m c_i y_i, \quad y^\tau = \arg \max_{y \in D^\tau} \sum_{i=0}^m c_i y_i, \quad (6)$$

де $y^\tau = (y_0^\tau, y_1^\tau, \dots, y_m^\tau) \in \mathbb{R}^{m+1}$ і область D_τ описується системою S_τ , яка при $\tau = 0$ має вигляд

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j - b_i y_0 \leq 0, \quad i \in J_p, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j y_0 \leq \sum_{i \in \omega} y_i \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta-j+1} y_0 \quad \forall \omega \subset J_k, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^m d_i y_i + d_0 y_0 = 1, \quad y_0 > 0, \quad y_i \geq 0 \quad \forall i \in J_m. \quad (9)$$

Задача (1), (2), (4) та задача (6)–(9) еквівалентні, тобто якщо $y = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_m)$ — розв'язок задачі (6)–(9), то розв'язок $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ задачі (1), (2), (4) отримаємо із співвідношення $x_i = y_i/y_0 \ \forall i \in J_m$, що випливає з перетворення (5).

Розглянемо розв'язування задачі (6)–(9). Застосуємо такий алгоритм МППО.

1. $\tau = 1$: формуємо систему S_1 лінійних обмежень, що описує область $D_1 \supset D_0$ і включає нерівності (7), (9) та (8) при $|\omega| = 1$.

2. Розв'язуємо (6) на області D_τ при значенні індексу τ ($\tau \geq 1$) модифікованим симплекс-методом. Якщо задача не має розв'язку, то не має розв'язку і (6)–(9), інакше нехай $y^\tau = (y_0^\tau, y_1^\tau, \dots, y_k^\tau, \dots, y_m^\tau) \in \mathbb{R}^{m+1}$ — розв'язок (6)–(9), отриманий на ітерації τ .

3. Якщо $\tau \leq 2$, то переходимо на п. 4, інакше працює процедура відкидання обмежень (для зменшення вимірності розв'язуваної задачі) [6, с. 337].

4. За знайденою точкою $y^\tau = (y_0^\tau, y_1^\tau, \dots, y_k^\tau, \dots, y_m^\tau) \in \mathbb{R}^{m+1}$ визначаємо точку $y^\tau = (y_0^\tau, y_1^\tau, \dots, y_k^\tau)$ та перевіряємо виконання всіх обмежень системи (8).

Якщо точка y^τ задовольняє не всі обмеження (8), то переходимо на п. 5, інакше $y^\tau = (y_0^\tau, y_1^\tau, \dots, y_k^\tau, \dots, y_m^\tau) = \bar{y} \in \mathbb{R}^{m+1}$ — розв'язок (6)–(9).

5. Формуємо систему $S_{\tau+1}$, включаючи до S_τ нерівності з (8), що не виконуються в точці y^τ . Відповідно, $S_{\tau+1}$ описує область $D_{\tau+1}$, $D_{\tau+1} \subset D_\tau$. Приймаємо $\tau = \tau + 1$ і переходимо на п. 2.

Зауваження. Для ефективної перевірки обмежень системи (8) сформульована та доведена теорема, застосування якої дозволяє шукати розв'язок задачі (6)–(9) не на допустимій області, а на області, яка її містить. За рахунок цього кількість обмежень у системі значно зменшується і ефективніше працює МППО.

Враховуючи, що $E = \psi(E_{\eta n}^k(G))$ [5], запишемо таку теорему.

Теорема. Нехай $y = (y_0, y_1, \dots, y_k, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $y = (y_0, y_1, \dots, y_k) \in \text{conv } E$, де $E = \psi(E_{\eta n}^k(G))$ та $y_i \leq y_{i+1} \ \forall i \in J_{k-1}^0$, тоді з виконання для нерівності спілки за номером i обмежень

$$y_1 + y_2 + \dots + y_i \geq (g_1 + g_2 + \dots + g_i)y_0, \quad (10)$$

$$y_k + y_{k-1} + \dots + y_{k-i+1} \leq (g_\eta + g_{\eta-1} + \dots + g_{\eta-i+1})y_0 \quad (11)$$

випливає виконання всіх інших обмежень i -ї спілки в точці $y = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_k)$.

За розв'язком (6)–(9) $y^\tau = (y_0^\tau, y_1^\tau, \dots, y_k^\tau, \dots, y_m^\tau) = \bar{y}$ визначаємо точку $x^\tau = (x_0^\tau, x_1^\tau, \dots, x_k^\tau) = \bar{x}$ — розв'язок (1), (2), (4), де $x_i^\tau = y_i^\tau/y_0^\tau \ \forall i \in J_k$. Якщо при цьому $\bar{x} \in E_{\eta n}^k(G)$, то задача (2)–(4) розв'язана. В іншому разі здійснюємо перегляд точок множини $E_{\eta n}^k(G)$ [3], які задовольняють умову (4), аж до отримання екстремуму та екстремалі задачі (2)–(4). Перегляд починаємо з точки, що є елементом множини розміщень, найближчої до $\bar{x}$ відповідно до лінійного порядку з [3]. При цьому з розгляду виключаються точки, які надають цільовій функції значення менше, ніж отримане на попередніх ітераціях σ , тобто ті, що не задовольняють нерівність $F(x) \geq \sigma$. Остання нерівність рівносильна лінійній

$$\sum_{j=1}^m (c_j x_j + c_0) - \sigma \sum_{j=1}^m (d_j x_j + d_0) \geq 0. \quad (12)$$

Оскільки перегляд здійснюється саме точок множини розміщень (точка задовольняє умови (3), (4) — область допустимих точок), причому на кожній наступній ітерації точка

надає цільовій функції значення не менше попереднього σ внаслідок (12) (умова оптимальності), то алгоритм дає точний розв'язок (2)–(4).

Аналогічно [4] доводиться, що алгоритм розв'язування задачі (2)–(4) є скінченним.

Запропонований метод реалізовано в середовищі Delphi мовою Object Pascal. Проведена оцінка ефективності алгоритму шляхом числових експериментів. Розглядалися задачі, генеровані випадковим чином: елементи G вибиралися як випадкові рівномірно розподілені числа на інтервалах $[1; 10]$, $[1; 20]$, $[1; 50]$, $[1; 100]$. Таким же чином вибиралися коефіцієнти цільової функції та додаткових обмежень. Програмна реалізація методу виявилася практично ефективною для задач вимірності $m \leq 33$ при $2 \leq k \leq m$. Час розрахунку задач становить від долей секунди до години на ПК Celeron з частотою 2.40 ГГц.

Таким чином, побудовано метод розв'язування умовної задачі з дробово-лінійною функцією на розміщеннях, який застосовний як для розв'язування частково комбінаторних задач, так і для повністю комбінаторних, як для умовних, так і для безумовних задач оптимізації з дробово-лінійною функцією цілі.

У перспективі вважаємо за доцільне проаналізувати ефективність роботи алгоритму для різних класів задач та залежність часу розв'язування від параметрів цих задач.

1. Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – Київ: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.
2. Стоян Ю. Г., Ємець О. О., Ємець Є. М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с.
3. Емец О. А., Барболина Т. Н. Решение задач евклидовой комбинаторной оптимизации методом построения лексикографической эквивалентности // Кибернетика и систем. анализ. – 2004. – № 5. – С. 115–125.
4. Барболина Т. М. Методи и алгоритмы розв'язування оптимізаційних задач на розміщеннях з додатковими умовами: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.01 / Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – Київ, 2005. – 19 с.
5. Черненко О. О. Дослідження множини допустимих розв'язків задачі оптимізації дробово-лінійної функції на евклідовій комбінаторній множині розміщень // Матеріали X Міжнар. наук. конф. ім. ак. М. Кравчука (13–15 травня 2004 р., Київ). – Київ, 2004. – С. 548.
6. Реклейтис Г. В., Рейвиндран А., Рэгсдел К. М. Оптимизация в технике. Т. 1. – Москва: Мир, 1986. – 352 с.

Полтавський університет споживчої
кооперації України

Полтавський державний педагогічний
університет ім. В. Г. Короленка

Надійшло до редакції 17.04.2006

Індекс 74137

Доповіді

НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

ISSN 1025-6415 Доповіді Національної академії наук України. 2006. № 11, 1-204