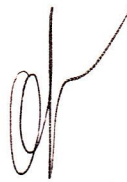


9  МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЗБІРНИК

НАУКОВИХ ПРАЦЬ

Додаток до журналу "Вісник ХНУ"
(фізико-математичні науки)

ВИПУСК 1



Хмельницький

2005 р.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

фізико-математичні науки

Додаток до журналу
“Вісник Хмельницького
національного університету”

ВИПУСК 1

Хмельницький 2005

У збірнику наукових праць публікуються оригінальні результати з теоретичних і прикладних проблем математики, математичного моделювання, інформатики та механіки. Статті друкуються українською, російською або англійською мовами.

Додаток до журналу “Вісник Хмельницького національного університету”.
Збірник наукових праць (фізико-математичні науки).
Випуск 1' 2005.

Редакційна колегія:

д-р фіз.-мат. наук, проф. Хома Г.П. – відповідальний редактор (Хмельницький, ХНУ);
д-р тех. наук, проф. Камбург В.Г. – заступник відповідального редактора (Хмельницький, ХНУ);
д-р фіз.-мат. наук проф. Качурик І.І. – заступник відповідального редактора (Хмельницький, ХНУ);
канд. фіз.-мат. наук, доц. Грипинська Н.В. – відповідальний секретар (Хмельницький, ХНУ);
академік НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. Гузь О.М. (Київ, інститут механіки НАН України);
д-р фіз.-мат. наук, проф. Цегелик Г.Г. (Львів, ЛНУ ім. І.Франка); д-р фіз.-мат. наук, проф. Черевко І.М. (Чернівці, ЧНУУ ім. Ю. Федьковича); д-р фіз.-мат. наук, проф. Шинкаренко Г.А. (Хмельницький, ХНУ);
д-р тех. наук, проф. Ройзман В.П. (Хмельницький, ХНУ); д-р тех. наук, д-р економ. наук, проф. Гольденгорін Б.І. (Хмельницький, ХНУ); д-р тех. наук, проф. Сілін Р.І. (Хмельницький, ХНУ); канд. фіз.-мат. наук, доц. Момот І.П. (Хмельницький, ХНУ); д-р тех. наук, проф. Рудницький В.Б. (Хмельницький, ХНУ); д-р фіз.-мат. наук, проф. Ємець О.О. (Полтава, Полтавський університет споживчої кооперації України); д-р фіз.-мат. наук, проф. Теплінський (Кам'янець-Подільський, Кам'янець-Подільський Державний педагогічний університет); чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. Перестюк М.О. (Київ); д-р фіз.-мат. наук, проф. Ляшенко І.М. (Київ, НУУ ім. Т.Г. Шевченко); д-р фіз.-мат. наук, проф. Макаренко О.С. (Київ, НТУ “КПІ” – ІПСА); д-р фіз.-мат. наук, проф. Петришин Р.І. (Чернівці, ЧНУУ ім. Ю. Федьковича); чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. Ляшко С.І. (Київ, НУУ ім. Т.Г. Шевченко); д-р фіз.-мат. наук, проф. Кривий С.Л. (Хмельницький, ХНУ); д-р техн. наук, проф. Кузьменко А.Г. (Хмельницький, ХНУ).

Відповідальний за випуск д.фіз.-мат.н., проф. Хома Г.П.
Технічний редактор Горященко К.Л.

Друкується за ухвалою Вченої Ради
Хмельницького національного університету

Адреса редакції: Україна, 29016, м. Хмельницький, вул. Інститутська, 11,
Хмельницький національний університет
редакція журналу “Вісник Хмельницького національного університету”
☎ (8-03822) 2-51-08
e-mail: patent_1@beta.tup.km.ua
web: <http://visniktup.narod.ru>
http://library.tup.km.ua/visnyk_tup.htm

ЗМІСТ

А.В. АТАМАНЮК

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ВИБОРУ ЛІДЕРІВ У КОЛЕКТИВАХ ЛЮДЕЙ МЕТОДАМИ ОРІЄНТОВАНИХ МЕРЕЖ 5

В.А. БАЖЕНОВ, О.І. ГУЛЯР, С.О. ПИСКУНОВ, О.О.ШКРИЛЬ

РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ 9

А.П. ВЛАСЮК, М.Б. ДЕМЧУКМАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ТА ПЛОСКОВЕРТИКАЛЬНОЇ ЗАДАЧ ЗАКРІПЛЕННЯ
ОСНОВИ ГІДРОСПОРУДИ В ДЕФОРМОВАНОМУ ҐРУНТОВОМУ МАСИВІ (ПРУЖНИЙ РЕЖИМ) 14**А.П. ВЛАСЮК, П.М. МАРТИНЮК**ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ҐРУНТОВОГО
МАСИВУ ПРИ НАЯВНОСТІ ПЕРЕНОСУ СОЛЕЙ В НЕІЗОТЕРМІЧНОМУ РЕЖИМІ 20**Н.В. ГРИПИНСЬКА, Г.Г.ЦЕГЕЛИК**НОВИЙ ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 28**З.В. ДУДАРЬ, М.В. ЗБИТНЕВА, А.В. КОМИССАРОВ**

КЛАССИФИКАЦІЯ ПРОГРАММНИХ СРЕДСТВ И МЕТОДОВ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ 33

О.О. ЄМЕЦЬ, А.А. РОСКЛАДКА, ОЛ-РА О. ЄМЕЦЬ

ЗАДАЧА ЕВКЛІДОВОЇ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ 40

Т.О. ІВОЛГІНА, О.В. КОЧЕТКОВА, М.С. РУДНЄВААЛГОРИТМІЧНИЙ СИНТЕЗ КЕРУВАННЯ КООРДИНАТНО-ВИМІРЮВАЛЬНОЮ МАШИНОЮ З
ВИКОРИСТАННЯМ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ХОПФІЛДА 46**І.І. КАНТЕМИР**

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РУХУ КОНСЕРВАТИВНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ 49

М.М. КОСПЮК

ІНФОРМАЦІЙНА СИСТЕМА ПРАЦЕВЛАШТУВАННЯ ВИПУСКНИКІВ УНІВЕРСИТЕТУ 55

С.Л. КРЫВЫЙ, А.В. НЕВМЕРЖИЦКИЙ

НЕСОВМЕСТИМОСТЬ ОДНОГО ТИПА УРАВНЕНИЙ В МНОЖЕСТВЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ 57

О.Я. КУЧЕРУКАСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО ТИПУ НЕОДНОРІДНИХ ЛІНІЙНИХ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ N-ГО ПОРЯДКУ 63**М.П. ЛЕНЮК, Г.Я. СТОПЕНЬ**КВАЗІСТАТИЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНОСТІ ДЛЯ (N+1)-ШАРОВОГО ОДНОВИМІРНОГО
ПІВПРОСТОРУ 66

І.І. ЛЕСЮК, Л.О. ЛISOBA ДО ПИТАННЯ ПРО НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ КООРДИНАТ ЦЕНТРІВ МАС	69
А.С. МАКАРЕНКО МОДЕЛИ ОБЩЕСТВЕННЫХ ЯВЛЕНИЙ И СЦЕНАРНЫЕ ПОДХОДЫ В ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ	73
С.В. МАТНЯК РЕШЕНИЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПК	86
Ю.О. МИТРОПОЛЬСКИЙ, Г.П. ХОМА, С.Г. ХОМА-МОГИЛЬСЬКА ПРО ОДИН МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	94
І.П. МОМОТ ЕЛЕМЕНТАРНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ І ПЕРЕТВОРЮЮЧІ МАТРИЦІ	100
В.В. МОРОЗ СКІНЧЕННІ ГІБРИДНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГАНКЕЛЯ 2-ГО РОДУ – ФУР'Є – БЕССЕЛЯ – ... – ФУР'Є – БЕССЕЛЯ	106
Б.Б. НЕСТЕРЕНКО, М.А. НОВОТАРСЬКИЙ АПРО-МЕРЕЖІ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ ТА СТРУКТУР	111
С.Б. ПРИХОДЬКО ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ ЧИСЕЛЬНОГО РІШЕННЯ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ОЦІНКИ ЇХ ПАРАМЕТРІВ ПРИ СТВОРЕННІ АПАРАТУРИ ПЕРЕДАЧІ ДАНИХ	120
Р.В. СЛОНЬОВСЬКИЙ, Р.Р. СТОЛЯРЧУК БАГАТОКРОКОВІ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ ЖОРСТКИХ НОРМАЛЬНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	126
Е.В. СОЛОВЬЕВА МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ МОДЕЛЕЙ ЭКСПРЕСС-АНАЛИЗА ДИНАМИКИ ГЕТЕРОГЕННЫХ СТРУКТУР	133
І.І. ФЕДОРЧУК МЕТОД МОДЕЛЮВАННЯ ЧАСТИНКАМИ У ФІЗИЦІ	143

- уведомление пользователя о “последней успешной регистрации” и “числе ошибок при регистрации” информирует пользователя об использовании его регистрационного имени.

Применение этих механизмов в разной мере необходимо для обеспечения предотвращения несанкционированного использования ресурсов системы и данных в зависимости от уровня секретности защищаемой информации и принятой политики безопасности.

Построенная классификация отражает существующие технологии современных средств защиты, их достоинства и недостатки, а также сферы применения и функциональные возможности. В результате анализа выявлены наиболее типичные угрозы информационной системы, а также программные средства, технологии и методы их устранения. Данная классификация, сопоставляющая вероятные угрозы информации с соответствующими программными средствами защиты, ориентирована на использование при формировании политики безопасности. Перспективным аспектом развития данной классификации является ее дальнейшее расширение, поиск и систематизация средств и методов защиты, выявление новых видов угроз.

Литература

1. Майкл Ховард, Дэвид Лебланк. Защищенный код. – М.: изд. “Русская редакция”, 2004г. – 699 стр.
2. Домарев В.В. Безопасность информационных технологий. Методология создания систем защиты. – К.: изд. ООО “ТИД “ДС”, 2001 г. – 895 с.
3. А.В. Соколов, О.М. Степанюк. Защита от компьютерного терроризма. – СПб.: изд. “БХВ”, 2002г. – 496 с.
4. Джерри Ли Форд. Персональная защита от хакеров. – М.: изд. “Кудиц-Образ”, 2002г. – 272с.
5. Медведовский И.Д., Семьянов П.В., Платонов В.В. Атака через Интернет. – НПО “Мир и семья-95”, 1997г. – 362 с.
6. Кейт Е.Страссберг, Ричард Г.Гондек, Гари Роли. Полный справочник по брандмауэрам. – М.: изд. “Вильямс”, 2004 г. – 836 с.
7. Павел Ломакин, Даниэль Шрейн. Антихакинг. – М.: изд. Осипенко А.И., 2002г. – 510с.
8. Филимонов А. Протоколы Интернета. – СПб.: изд. “ВНУ-СПб”, 2003 г. – 516 с.
9. Домарев В.В. Безопасность информационных технологий. Методология создания систем защиты/ В.В. Домарев. – К.: ООО ТИД «ДС», 2001. – 688 с.

УДК 519.85

О.О. ЄМЕЦЬ, А.А. РОСКЛАДКА, ОЛ-РА О. ЄМЕЦЬ
Полтавський університет споживчої кооперації України

ЗАДАЧА ЕВКЛІДОВОЇ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

В роботі сформульована загальна задача евклідової комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності. Єдиний підхід до постановки задачі в умовах невизначеності дає можливість побудови універсальних алгоритмів, котрі використовують властивості евклідових комбінаторних множин. Як приклад побудована математична модель задачі упаковки прямокутників як задача комбінаторної оптимізації на евклідовій множині нечітких розбиттів.

Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок з важливими науковими завданнями. Розвиток дискретної оптимізації сприяв появі нового напрямку в області оптимізації на комбінаторних множинах, занурених в арифметичний евклідів простір. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації [1] ефективно використовуються для моделювання економічних, соціальних та інших задач.

Введемо необхідні позначення. Позначимо через J_m – множину перших m натуральних чисел, тобто

$J_m = \{1, \dots, m\}$. Нехай $G = \{g_1, g_2, \dots, g_\eta\}$ – мультимножина, що являє собою сукупність η елементів, серед яких можуть бути й однакові. Мультимножину G , що має n різних елементів, можна задати її основою $S(G) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ – кортежем всіх різних елементів з G , а також первинною специфікацією $[G] = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, яка визначає кількість повторень кожного елемента основи в мультимножині.

Розглянемо упорядковану k -вибірку з мультимножини G :

$$e = (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_k}), \quad (1)$$

де $g_{i_j} \in G, i_j \neq i_t \forall i_j, i_t \in J_\eta, \forall j, t \in J_k$,

Множину E , елементами якої є k -вибірки $\bar{e} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k), \tilde{e} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k)$ з мультимножини G вигляду (1), назовемо евклідовою комбінаторною множиною, якщо з умови $\exists j \in J_k, \bar{e}_j \neq \tilde{e}_j$ випливає $\bar{e} \neq \tilde{e}$.

Іншими словами, множина E має таку властивість: два елементи $\bar{e}$ і $\tilde{e}$, що належать множині E , відмінні один від одного, якщо вони незалежно від інших відмінностей відрізняються порядком слідування символів, що їх утворюють.

Не порушуючи загальності міркувань, вважатимемо, що елементи мультимножини G упорядковані за не спаданням, тобто має місце нерівність: $g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_\eta$.

Найвідомішими серед евклідових комбінаторних множин є загальна множина переставлень $E_{kn}(G)$ – множина всіх k -вбірок вигляду (1), де $k = \eta > n$, з мультимножини G , що складається з k дійсних чисел, серед яких n різних; загальна множина розміщень $E_{\eta n}^k(G)$ – сукупність усіх упорядкованих k -вбірок вигляду (1) з мультимножини G , що складається з η дійсних чисел, серед яких n різних за умови $\eta_i \leq k \forall i \in J_k$; загальна множина сполучень $S_{\eta n}^k(G)$ – сукупність усіх неупорядкованих k -вбірок вигляду (1) з мультимножини G , що складається з η дійсних чисел, серед яких n різних за умови $\eta_i \leq k \forall i \in J_k$.

Під загальною задачею евклідової комбінаторної оптимізації розуміють задачу знаходження

$$F(x^*) = \min_{x \in E} F(x), \quad (2)$$

$$x^* = \arg \min_{x \in E} F(x), \quad (3)$$

при обмеженнях

$$\psi^i(x) \leq 0 \forall i \in J_r; \quad (4)$$

$$\psi^{r+i}(x) = 0 \forall i \in J_s, \quad (5)$$

r, s – деякі цілі невід'ємні константи, E – евклідова комбінаторна множина в просторі R^k , а $F(x)$ – деяка функція.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми та виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Дослідниками теорії і методів евклідової комбінаторної оптимізації було знайдено розв'язки для задач оптимізації (2), (3) на більшості евклідових комбінаторних множинах з лінійними, дробово-лінійними, опуклими та вгнутими цільовими функціями, а також відповідних лінійних задач з додатковими обмеженнями вигляду (4), (5).

Подальший розвиток цього напрямку привів до можливості розгляду оптимізаційних задач на евклідових комбінаторних множинах в умовах невизначеності. Часто реальні процеси моделюються без урахування випадкових факторів. Проте, ігнорування невизначеності параметрів задачі, як правило, приводить до спотворення результатів і втрати адекватності розглядуваної моделі.

Поняття невизначеності вочевидь є надзвичайно широким: від чіткого вказування меж і характеру зміни випадкових факторів до випадків з високим ступенем невизначеності, в яких можна говорити лише про

гіпотези, що характеризують поведінку випадкових параметрів задачі. Проте, в постановках задач оптимізації, можна виділити такі основні види невизначеності, які мають реальні перспективи дослідження:

- невизначеність даних із відомими законами розподілу ймовірностей (стохастичні фактори);
- невизначеність даних, значення яких лежать у відомих інтервалах (інтервальні фактори);
- невизначеність даних, заданих у вигляді елементів нечітких множин із відомими значеннями функції приналежності (нечіткі фактори);
- невизначеність даних, значення яких залежать від деякого параметру (параметричні фактори).

Дослідження задач першої групи спирається на апарат стохастичного програмування [2, 3] з урахуванням специфіки постановки M -, V - та P - моделей [4, 5] та моделювання задач стохастичної оптимізації евклідовими комбінаторними множинами.

В основі другого підходу лежать поняття інтервальної геометрії [6], які дають можливість розглядати задачі евклідової комбінаторної оптимізації з урахуванням похибок початкових даних [7, 8].

Положення теорії нечітких множин [9] дозволяють враховувати невизначеність як міру належності вибірки евклідовій комбінаторній множині [10, 11].

Четвертий підхід до врахування невизначеності реалізується засобами дослідження стійкості та параметричного аналізу [12], який вивчає залежність оптимального розв'язку задач оптимізації на евклідових комбінаторних множинах від параметричної зміни початкових умов задачі [13, 14].

Формулювання цілей статті. Значна різноманітність у заданні невизначеності спонукала до пошуку єдиного підходу, в постановці якого враховані всі основні види невизначеності.

Виклад основного матеріалу. Загальна задача евклідової комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності має вид:

$$S\{F(\langle \tilde{x} \rangle, \omega)\} \rightarrow \text{extr} \quad (6)$$

$$\varphi_i(\langle \tilde{x} \rangle, \omega) \leq 0 \quad \forall i \in J_m \quad (7)$$

$$\langle \tilde{x} \rangle \in \tilde{E}, \quad (8)$$

$$\omega \in \Omega \quad (9)$$

де $\langle \tilde{x} \rangle = (\langle x, v_x \rangle | \mu_x)$ – нечітко визначений елемент інтервального простору $I(R^n)$, заданий із похибкою вимірювання v_x та із значенням функції приналежності, рівним μ_x , m – ціла невід'ємна константа; ω – випадковий параметр, що характеризує певний стан середовища; Ω – множина цих станів; $F(\langle \tilde{x} \rangle, \omega)$ – інтервальнозначний цільовий функціонал, що залежить також від ω ; S – деяка стохастична функція статистичного змісту; φ_i , $i \in J_m$ – деякі, взагалі кажучи, стохастичні функції; $\tilde{E}$ – нечітко задана евклідова комбінаторна множина із рандомізованими властивостями з елементів інтервального простору: $\tilde{E} \subset I(R^n)$.

Кожний з елементів моделі (6) – (9) можна розглядати як залежний від ряду параметрів.

Розглянемо приклад побудови математичної моделі у вигляді (6) – (9).

Нехай є деяка напівскінчена (достатньо довга) смуга, яка розділена на смужки однакової ширини h . Задано ще p прямокутників, довжини яких є $a_1, \dots, a_p$, ширина – h . Задача полягає в розміщенні прямокутників без накладань в смугі на її початку таким чином, щоб довжина зайнятої частини смуги була мінімально можливою.

Побудуємо математичну модель цієї задачі, вважаючи, що довжини прямокутників задаються нечіткими числами [9], тобто $a_i = (\{g_i | \mu_i\}, \dots, \{g_{q_i} | \mu_{q_i}\})$, де $\{g_1, \dots, g_{q_i}\}$ – носій нечіткої множини a_i , а $\{\mu_1, \dots, \mu_{q_i}\}$ – множина значень функції приналежності.

Нехай N – натуральне число. Розіб'ємо його на доданки:

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_j + \dots + n_s, \quad n_j > 0, j \in J_s.$$

Тоді $(n_1, n_2, \dots, n_s)$ називається розбиттям числа N на s частин (див. наприклад [15]).

Нехай $s = N$. Розглянемо розбиття числа N $(n_1, n_2, \dots, n_N)$, де $n_j \geq 0, \forall j \in J_n$. Задамо порядок елементів в розбитті $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_j \geq \dots \geq n_N$. Таке розбиття $(n_1, n_2, \dots, n_N)$ назовемо евклідовим, а множину всіх таких розбиттів числа N назовемо евклідовою множиною розбиттів і позначимо її $R(N)$.

У кожній смужці в оптимальному розв'язку очевидно може стояти від одного до $p - (m - 1) = p - m + 1$ прямокутників, де m – це кількість смужок, на яку розділено смугу, тобто ціла частина частки від ділення ширини смуги на h . Позначимо $n = m(p - m + 1)$ та введемо до розгляду $n - p$ прямокутників з шириною h та довжиною a_0 , де a_0 є нечітким числом вигляду $a_0 = \{0|1\}$, тобто звичайним нулем.

Тоді можна вважати, що в кожній смужці стоїть рівно $p - m + 1$ прямокутників. Позначимо x_{ij} – нечітку довжину прямокутника, що стоїть у i -ій смужці на j -ому від початку смуги місці, $i \in J_m$, $j \in J_{p-m+1}$.

Розглянемо вектор x вигляду:

$$x = (x_{11}, \dots, x_{1,p-m+1}, x_{21}, \dots, x_{2,p-m+1}, \dots, x_{i1}, \dots, x_{i,p-m+1}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{m,p-m+1}).$$

Утворимо мультимножину $G = \{a_1, \dots, a_p, a_0, \dots, a_0\}$, в якій елемент a_0 зустрічається $n - p$ раз.

Тоді вектор x можна розглядати як елемент евклідової множини $R(G, m)$ розбиттів мультимножини G на m частин, тобто $x \in R(G, m)$. При цьому кожному x буде відповідати певне розташування прямокутників у смугі і навпаки. Виходячи з [9], під сумою двох нечітких чисел $A = \left\{ \left(a_1 | \mu_1^A \right), \dots, \left(a_k | \mu_k^A \right) \right\}$ і $B = \left\{ \left(b_1 | \mu_1^B \right), \dots, \left(b_l | \mu_l^B \right) \right\}$ будемо розуміти нечітке число $A + B$, яке утворюється за допомогою побудови множини пар

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \left\{ \left(\tilde{c}_1 | \mu_1^{\tilde{C}} \right), \dots, \left(\tilde{c}_\eta | \mu_\eta^{\tilde{C}} \right) \right\} = \\ &= \left\{ \left(a_1 + b_1 | \min[\mu_1^A, \mu_1^B] \right), \dots, \left(a_1 + b_l | \min[\mu_1^A, \mu_l^B] \right), \right. \\ &\quad \left(a_2 + b_1 | \min[\mu_2^A, \mu_1^B] \right), \dots, \left(a_2 + b_l | \min[\mu_2^A, \mu_l^B] \right), \\ &\quad \dots, \\ &\quad \left. \left(a_k + b_1 | \min[\mu_k^A, \mu_1^B] \right), \dots, \left(a_k + b_l | \min[\mu_k^A, \mu_l^B] \right) \right\}. \end{aligned}$$

Перші елементи $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_\eta$, де $\eta = kl$, цих пар утворюють мультимножину $\tilde{C} = \{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_\eta\}$. Основа $S(\tilde{C})$ мультимножини $\tilde{C}$: $S(\tilde{C}) = \{c_1, \dots, c_r\}$ є носієм нечіткого числа $A + B = \{c_1 | \mu_1\}, \dots, \{c_r | \mu_r\}$. Значення функції приналежності знаходяться за правилом:

$$\mu_t = \max_{\forall i \in J_\eta: c_i = \tilde{c}_i} \left\{ \mu_i^{\tilde{C}}, i \in J_\eta \right\}.$$

Тобто, значення μ_t вибирається як максимальне серед чисел $\mu_i^{\tilde{C}}$, для яких $\tilde{c}_i = c_t$.

Під максимумом двох нечітких чисел $A = \{a_1 | \mu_1^A\}, \dots, \{a_k | \mu_k^A\}$ і $B = \{b_1 | \mu_1^B\}, \dots, \{b_l | \mu_l^B\}$ будемо

розуміти нечітке число $\max(A, B)$, яке утворюється побудовою з множини пар

$$\begin{aligned}\tilde{C} &= \left\{ \left(\tilde{c}_1 \mid \mu_1^{\tilde{C}} \right), \dots, \left(\tilde{c}_\eta \mid \mu_\eta^{\tilde{C}} \right) \right\} = \\ &= \left\{ \left(\max[a_1, b_1] \mid \min[\mu_1^A, \mu_1^B] \right), \dots, \left(\max[a_1, b_l] \mid \min[\mu_1^A, \mu_l^B] \right), \right. \\ &\quad \left(\max[a_2, b_1] \mid \min[\mu_2^A, \mu_1^B] \right), \dots, \left(\max[a_2, b_l] \mid \min[\mu_2^A, \mu_l^B] \right), \\ &\quad \dots, \\ &\quad \left. \left(\max[a_k, b_1] \mid \min[\mu_k^A, \mu_1^B] \right), \dots, \left(\max[a_k, b_l] \mid \min[\mu_k^A, \mu_l^B] \right) \right\}.\end{aligned}$$

Перші елементи $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_\eta$, де $\eta = kl$, цих пар утворюють мультимножину $\tilde{C} = \{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_\eta\}$. Основа $S(\tilde{C})$ мультимножини $\tilde{C}$: $S(\tilde{C}) = \{c_1, \dots, c_r\}$ є носієм нечіткого числа $\max(A, B) = \{(c_1 \mid \mu_1), \dots, (c_r \mid \mu_r)\}$. Значення функції приналежності знаходяться за правилом:

$$\mu_t = \max_{\forall i \in J_\eta: c_i = \tilde{c}_i} \left\{ \mu_i^{\tilde{C}}, i \in J_\eta \right\}.$$

Тобто, значення μ_t вибирається як максимальне серед чисел $\mu_i^{\tilde{C}}$, для яких $\tilde{c}_i = c_t$.

Під мінімумом двох нечітких чисел $A = \{(a_1 \mid \mu_1^A), \dots, (a_k \mid \mu_k^A)\}$ і $B = \{(b_1 \mid \mu_1^B), \dots, (b_l \mid \mu_l^B)\}$ будемо розуміти нечітке число $\min(A, B)$, яке утворюється побудовою з множини пар

$$\begin{aligned}\tilde{C} &= \left\{ \left(\tilde{c}_1 \mid \mu_1^{\tilde{C}} \right), \dots, \left(\tilde{c}_\eta \mid \mu_\eta^{\tilde{C}} \right) \right\} = \\ &= \left\{ \left(\min[a_1, b_1] \mid \min[\mu_1^A, \mu_1^B] \right), \dots, \left(\min[a_1, b_l] \mid \min[\mu_1^A, \mu_l^B] \right), \right. \\ &\quad \left(\min[a_2, b_1] \mid \min[\mu_2^A, \mu_1^B] \right), \dots, \left(\min[a_2, b_l] \mid \min[\mu_2^A, \mu_l^B] \right), \\ &\quad \dots, \\ &\quad \left. \left(\min[a_k, b_1] \mid \min[\mu_k^A, \mu_1^B] \right), \dots, \left(\min[a_k, b_l] \mid \min[\mu_k^A, \mu_l^B] \right) \right\}.\end{aligned}$$

Перші елементи $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_\eta$, де $\eta = kl$, цих пар утворюють мультимножину $\tilde{C} = \{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_\eta\}$. Основа $S(\tilde{C})$ мультимножини $\tilde{C}$: $S(\tilde{C}) = \{c_1, \dots, c_r\}$ є носієм нечіткого числа $\max(A, B) = \{(c_1 \mid \mu_1), \dots, (c_r \mid \mu_r)\}$. Значення функції приналежності знаходяться за правилом:

$$\mu_t = \max_{\forall i \in J_\eta: c_i = \tilde{c}_i} \left\{ \mu_i^{\tilde{C}}, i \in J_\eta \right\}.$$

Тобто, значення μ_t вибирається як максимальне серед чисел $\mu_i^{\tilde{C}}$, для яких $\tilde{c}_i = c_t$.

Використовуючи введені операції суми, знаходження максимуму і мінімуму, математичну модель сформульованої задачі упакування прямокутників можна зобразити у такому вигляді: знайти

$$\begin{aligned}F^*(x^*) &= \min_{x \in R(G, m)} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{p-m+1} x_{ij}; \\ x^* &= \arg \min_{x \in R(G, m)} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{p-m+1} x_{ij},\end{aligned}$$

де $\arg F^*(x^*)$ позначає точку, що доставляє відповідне значення функції.

Висновки з даного дослідження та перспективи подальших розвідок. Єдиний підхід до постановки задач в умовах невизначеності дає можливість побудови універсальних алгоритмів, що використовують властивості евклідових комбінаторних множин. В даній роботі як приклад побудована нова математична модель однієї задачі упаковки прямокутників як задача комбінаторної оптимізації на евклідовій множині розбиттів нечітких множин.

Подальші дослідження властивостей задач евклідової комбінаторної оптимізації з урахуванням невизначеності дозволять будувати ефективні алгоритми їх розв'язування, максимізувавши адекватність отриманих результатів моделювання.

Література

1. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188с.
2. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. - М.: Наука, 1976.- 240 с.
3. Юдин Д. Б. Задачи и методы стохастического программирования. – М.: Сов. Радио, 1979. – 392 с.
4. Roskladka A. Stochastic settings of the problems of Euclidean combinatorial optimization // Theory of stochastic processes. – 2003. – Vol. 9(25). - No 3-4. - P. 170-175.
5. Ємець О. О., Роскладка А. А. До моделювання на евклідових комбінаторних множинах з урахуванням випадкових факторів // Матеріали ІІ міжнародної школи-семінару „Теорія прийняття рішень” (27 вересня – 2 жовтня 2004 р, м. Ужгород). – Ужгород, УжНУ, 2004. – с. 40.
6. Стоян Ю.Г. Расширенное пространство $IS(R)$ центрированных интервалов. – Харьков, 1994. – 27 с. (Препр./ НАНУ. ИПМаш; 378).
7. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Евсеева Л.Г. Комбинаторная оптимизационная задача размещения прямоугольников с учетом погрешности исходных данных // Доповіді НАН України. – 1997. – №7. – С. 56-60.
8. Емец О.А., Евсеева Л.Г., Романова Н.Г. Интервальная математическая модель комбинаторной задачи цветной упаковки прямоугольников // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 3. – С. 131 - 138.
9. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
10. Емец О.А., Емец А.О. Комбинаторное множество нечетких размещений // Матеріали VII Міжнародної науково-практичної конференції “Наука і освіта - 2004” (10-25 лютого 2004 року). Том 70. Математика. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2004. - С.42-43.
11. Ємець Ол-ра О. Одна задача комбінаторної оптимізації на переставленнях нечітких множин // Волинський математичний вісник. – 2004. – Випуск 3. с. 51 – 58.
12. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. - К.: Наукова думка, 1995. – 453 с.
13. Ємець О. О. Параметричні задачі на загальній множині переставлень та їх розв'язування/ Полт. тех. ун-т - Полтава, 1997. - 5с. -Рус. - Деп. в ГНТБ України 21.08. 97, № 479 -Ук97.
14. Роскладка А. А. Параметричні задачі та стійкість при моделюванні евклідовими комбінаторними задачами оптимізації: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.01. – Полтава: ПДТУ, 2000. – 142с.
15. Баранов В.И., Стечкин Б.С. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. – М.: Наука, 1989. – 160 с.