



ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

**ПОЛТАВСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО
ПЕДАГОГІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ В. Г. КОРОЛЕНКА**

ВИПУСК 1 (22)

**СЕРІЯ
«ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ
НАУКИ»**

**ПОЛТАВА
2002**

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

**ПОЛТАВСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО
ПЕДАГОГІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ В.Г.КОРОЛЕНКА**

ВИПУСК 1 (22)

**СЕРІЯ
«ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ
НАУКИ»**

ПОЛТАВА 2002

Методи відсікання в нелінійній оптимізації на розміщеннях та їх застосування до розв'язування однієї інвестиційної задачі

Проблема вибору портфеля цінних паперів має, як відомо, оптимізаційний характер, і в деяких випадках може розглядатися як задача евклідової комбінаторної оптимізації на полірозміщеннях або розміщеннях[1]. У даній роботі пропонується модель одного виду інвестиційних задач, а також розроблений метод розв'язування поставленої задачі на розміщеннях. У подальшому використовуватиметься термінологія та система позначень з [2].

Розглянемо такий варіант задачі одержання заданого середнього прибутку P при мінімальному ризику. Нехай протягом інвестиційного періоду передбачається надходження η пакетів вільного капіталу. Вартості пакетів становлять $e_1, \dots, e_n$ грошових одиниць (без порушення загальності можна вважати, що $0 < e_1 < \dots < e_n$), причому надходить η_j пакетів вартістю e_j грошових одиниць. Очевидно, що $\eta = \eta_1 + \dots + \eta_n$. Кожний пакет вільного капіталу може бути або повністю вкладений у акції одного з k підприємств, або направлений на задоволення інших потреб інвестора. Згідно з політикою інвестора, якщо акції деякого підприємства купуються протягом інвестиційного періоду, то на їх придбання витрачається тільки один пакет вільного капіталу. Таким чином, акції кожного з k підприємств можуть купуватися пакетами заздалегідь визначених вартостей $e_1, \dots, e_n$ грошових одиниць, причому купується не більше η_j пакетів вартістю e_j грошових одиниць.

Нехай x_i — вартість придбаних акцій i -ого підприємства ($i \in J_k$, тут і далі під J_n розуміємо множину n перших натуральних чисел). Розглянемо мультимножину $G = \{g_1, \dots, g_\eta\}$ з основою $S(G) = (e_1, \dots, e_n)$ та первинною специфікацією $[G] = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, де $\eta = \eta_1 + \dots + \eta_n$. Тоді інвестиційна політика може бути представлена у вигляді комбінаторного обмеження:

$$x = (x_1, \dots, x_k) \in E_{\eta_n}^k(G), \quad (1)$$

де $E_{\eta_n}^k(G)$ — загальна множина розміщень з мультимножини G .

Нехай $p(i, t)$ — вартість акцій підприємства i ($i \in J_k$) на початку інвестиційного періоду t ($t \in J_T$), $d(i, t)$ — сумарні дивіденди за цей період. Загальний прибуток $P(i, t)$ в періоді t на одну грошову одиницю вкладень у i -ий вид акцій

$$P(i, t) = p(i, t+1) - \frac{d(i, t)}{p(i, t)}, i \in J_k, t \in J_T, \quad (2)$$

а середній прибуток a_i за останні T інвестиційних періодів на одну грошову одиницю вкладень від акцій i -ого підприємства

$$a_i = \frac{\sum_{t=1}^T P(i, t)}{T}, i \in J_k. \quad (3)$$

Оскільки середній прибуток повинен становити не менше P грошових одиниць, то необхідним є виконання нерівності

$$\sum_{i=1}^k a_i x_i \geq P. \quad (4)$$

Інвестиційний ризик характеризується (див., наприклад, [1]) величиною

$$R(x) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sigma_{ij}^2 x_i x_j, \quad (5)$$

де величина

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |P(i, t) - a_i| \cdot |P(j, t) - a_j|, i, j \in J_k, \quad (6)$$

виражає співвідношення рівнів прибутковості для кожної пари видів акцій.

Тоді інвестиційна задача, що розглядається, може бути адекватно представлена такою моделлю. Знайти пару $\langle R(x^*), x^* \rangle$ таку, що

$$R(x^*) = \min_{x \in R^k} R(x), x^* = \arg \min_{x \in R^k} R(x), \quad (7)$$

при обмеженнях (1), (4), де P — задана величина, $R(x)$ обчислюється за формулами (5) — (6), a_i ($i \in J_k$) — за формулами (2)-(3).

Задача (1), (4), (7) є частковим випадком задачі оптимізації на розміщеннях з лінійною цільовою функцією і лінійними й угнутими додатковими обмеженнями: знайти пару $\langle C(x^*), x^* \rangle$

$$C(x^*) = \min_{x \in R^{k+1}} \sum_{j=0}^k c_j x_j, x^* = (x_0^*, x_1^*, \dots, x_k^*) = \arg \min_{x \in R^{k+1}} \sum_{j=0}^k c_j x_j, \quad (8)$$

при комбінаторному обмеженні

$$(x_r, \dots, x_s) \in E_{\eta n}^{\tilde{k}}(G), r, s \in J_k, \tilde{k} = s - r + 1 > 1, \quad (9)$$

та додаткових (некомбінаторних) обмеженнях

$$Q_i(x) \geq 0 \quad i \in J_{m_1}, \quad (10)$$

$$q_i(x) \geq 0 \quad i \in J_{m_2}, \quad (11)$$

де $E_{\eta n}^{\tilde{k}}(G)$ — загальна множина розміщень з мультимножини G , функції $Q_i(x)$ — лінійні, а $q_i(x)$ — угнуті.

Дійсно, задача (1), (4), (7) зводиться до задачі (8)-(11), якщо покласти

$$C(x) = x_0, \quad m_1 = m_2 = 1, \quad Q_1(x) = \sum_{i=1}^k a_i x_i - P, \quad q_1(x) = x_0 - R(x), \quad r = 1,$$

$$s = \tilde{k} = k.$$

Угнутість функції $q_1(x)$ впливає з того, що її гесіан

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2\sigma_{11}^2 & \dots & -\sigma_{1s}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\sigma_{s1}^2 & \dots & -2\sigma_{ss}^2 \end{pmatrix}$$

є недодатно визначеною матрицею.

Як відомо [3], для розв'язування задач мінімізації лінійної цільової функції при лінійних та вгнутих обмеженнях може бути використаний метод відсікаючих площин Келлі, який базується на побудові грубого наближення допустимої області з наступним її уточненням шляхом накладання додаткових обмежень. Ідеї відсікання, як було показано в [4, 5], можуть використовуватися і при розв'язуванні лінійних умовних задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставленнях та розміщеннях. У даній роботі розглядається метод розв'язування задач (8)-(11), який ґрунтується на синтезі ідей методу Келлі та методу комбінаторного відсікання.

Розглянемо релаксовану задачу: знайти пару (8) при умовах

$$x_j \in S(G) \quad \forall j \in \{r, r+1, \dots, s\}, \quad (12)$$

$$x \in Z_{h-1}, \quad (13)$$

де Z_{h-1} — многогранна множина така, що гарантується включення $F \subset Z_{h-1}$.

Нехай $\langle C(x^h), x^h \rangle (x^h = (x_0^h, \dots, x_k^h))$ — одержаний на h -ій ітерації розв'язок задачі дискретної оптимізації (8), (12)-(13). Його можна знайти за допомогою, наприклад, методу Дальтона-Ллевеліна [6]. Можливі такі три випадки:

$$(x_r^h, \dots, x_s^h) \in E_{\eta n}^{\tilde{k}}(G), q_i(x^h) \geq 0 \quad \forall i \in J_{m_2};$$

$$(x_r^h, \dots, x_s^h) \in E_{\eta n}^{\tilde{k}}(G), \exists i \in J_{m_2} \quad q_i(x^h) < 0;$$

$$(x_r^h, \dots, x_s^h) \notin E_{\eta n}^{\tilde{k}}(G).$$

У першому випадку, очевидно, розв'язано і задачу (8)-(11). У другому випадку уточнюємо допустиму область Z_{h-1} , виключаючи при цьому точку x^h . З цією метою знаходимо нелінійне обмеження, яке порушується найбільш сильно, тобто таке $q_u(x)$, що

$$-q_u(x^h) = \max_{i \in J_{m_2}} \{-q_i(x^h)\}, \quad (14)$$

і лінеаризуючи $q_u(x)$, додаємо обмеження-відсікання

$$w_h = q_u(x^h) + \nabla q_u(x^h)(x - x^h) \geq 0. \quad (15)$$

Оскільки допустима область визначається лінійними й угнутими функціями, то вона є опуклою множиною, і отже, накладання додаткового обмеження (15) не веде до втрати частини допустимої області [3]. Допустима область Z_h задачі, що розв'язується на наступній ітерації, одержується як переріз множини Z_{h-1} та множини, що визначається нерівністю (15).

Зауваження. Для розглянутої інвестиційної задачі (15) матиме вигляд:

$$w_h = x_0 - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k 2\sigma_{ij}^2 x_j^h x_i - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sigma_{ij}^2 x_i^h x_j^h \geq 0.$$

У третьому випадку, коли не виконується умова (9), здійснюємо побудову правильного відсікання, під яким по аналогії з дискретною оптимізацією [6] розуміємо лінійну нерівність, яку задовольняють усі допустимі точки задачі й не задовольняє одержаний недопустимий розв'язок x^h . Оскільки за припущенням $(x_r^h, \dots, x_s^h) \notin E_{\eta n}^{\tilde{k}}(G)$, то для деякого елемента e_l

$$\exists V = \{v_1, \dots, v_{|V|}\} \subset \{r, r+1, \dots, s\} \quad \forall v \in V \quad x_v^h = e_l, |V| > \eta_l. \quad (16)$$

Якщо умова (16) виконується для декількох елементів основи мультимножини, то вибір елемента для побудови відсікання здійснюємо за таким правилом.

Правило. Якщо умова (16) виконується для e_1 та e_n (але не для обох одразу), то покладемо l рівним номеру цього елемента. Якщо умова (16) виконується і для e_1 , і для e_n , то покладемо l рівним номеру того елемента, для якого більше різниця $|V| - \eta_l$ (якщо ці величини рівні, то покладемо, наприклад, $l=1$). Якщо умова (16) не виконується ні для e_1 , ні

для e_n , то l — найменший номер ($0 < l < n$) такий, що для e_l виконується умова (16).

Додаткове обмеження будуватимемо у вигляді

$$w_h = \sum_{j \in J} \gamma_j x_j - \gamma_0 \geq 0, \quad (17)$$

де J — множина номерів небазисних змінних, а коефіцієнти γ_0 та γ_j ($j \in J$) обчислюються за формулами:

$$\gamma_0 = \begin{cases} \sum_{i=1}^{|V|} g_i - |V| \cdot e_1, & \text{якщо } l=1, \\ e_l - e_{l-1}, & \text{якщо } 1 < l < n, \\ - \sum_{i=1}^{|V|} g_{\eta-i+1} + |V| \cdot e_n, & \text{якщо } l=n, \end{cases} \quad (18)$$

$$\gamma_j = \begin{cases} \sum_{v \in V} (-\alpha_{vj}), & \text{якщо } l=1, \\ \max \{\gamma_j^v\}, & \text{якщо } 1 < l < n, \\ \sum_{v \in V} \alpha_{vj}, & \text{якщо } l=n, \end{cases} \quad (19)$$

$$\gamma_j^v = \begin{cases} \alpha_{vj}, & \text{якщо } \alpha_{vj} \geq 0, \\ \frac{e_l - e_{l-1}}{e_{l+1} - e_l} (-\alpha_{vj}), & \text{якщо } \alpha_{vj} < 0 \end{cases}$$

(тут α_{vj} — елементи симплекс-таблиці в повній формі [6], яка дає точку x^h).

Було показано [5], що при $1 < l < n$ нерівність (17) є правильним відсіканням. Покажемо виконання умов правильного відсікання також для $l=1$.

Оскільки $\eta_1 < |V|$, то принаймні $g_{|V|} > e_1$, звідки

$$\sum_{j \in J} \gamma_j x_j^h - \sum_{i=1}^{|V|} g_i + |V| \cdot e_1 < 0 - \sum_{i=1}^{|V|} e_i + |V| \cdot e_1 = 0,$$

тобто точка x^h не задовольняє нерівність (17).

Перевіримо тепер, чи всі допустимі точки задачі (8)-(11) задовольняють нерівність (17). Із симплекс-таблиці, з якої одержана точка x^h як розв'язок задачі лінійного програмування, випливає, що для довільної координати x_v допустимої точки x справедлива рівність

$$x_v = \alpha_{v0} + \sum_{j \in J} (-\alpha_{vj}) x_j.$$

Тоді, враховуючи, що $\alpha_{v0} = e_1 \quad \forall v \in V$, одержимо

$$\sum_{v \in V} x_v = \sum_{v \in V} \alpha_{v0} + \sum_{v \in V} \left(\sum_{j \in J} (-\alpha_{vj}) x_j \right) = \sum_{i=1}^{|V|} e_i + \sum_{j \in J} \left(\sum_{v \in V} (-\alpha_{vj}) \right) x_j = \\ = |V| \cdot e_1 + \sum_{j \in J} \gamma_j x_j.$$

Оскільки $(x_r^h, \dots, x_s^h) \in E_{\eta n}^{\tilde{k}}(G)$ як допустима точка, то вона задовольняє систему нерівностей, що описує опуклу оболонку множини розміщень [2], і зокрема нерівність

$$\sum_{v \in V} x_v \geq \sum_{i=1}^{|V|} g_i.$$

Тоді

$$\sum_{j \in J} \gamma_j x_j - \gamma_0 = \sum_{j \in J} \gamma_j x_j + |V| \cdot e_1 - \sum_{i=1}^{|V|} g_i = \sum_{v \in V} x_{v0} - \sum_{i=1}^{|V|} g_i \geq 0.$$

Отже, нерівність (17) виконується для всіх допустимих точок задачі (8)-(11), а враховуючи, що точка x^h цю нерівність не задовольняє, одержуємо, що нерівність (17) задає правильне відсікання у випадку $l=1$. Доведення у випадку $l=n$ аналогічне. Таким чином, нерівність (17), де коефіцієнти обчислюються за формулами (18)-(19), задає правильне відсікання. Як і у випадку 2, допустима область Z_h наступної підзадачі

$$Z_h = Z_{h-1} \cap \{x \mid w_h(x) \geq 0\},$$

тут $w_h(x)$ обчислюється за формулами (17)–(19).

Враховуючи все вищевикладене, можна запропонувати такий алгоритм розв'язування задачі (8)-(11).

1. Покладаємо $h=1$.
2. Розв'язуємо задачу (8), (12)-(13) методом Дальтона-Ллевеліна.
3. Якщо задача (8), (12)-(13) не має розв'язків, то їх не має і вихідна задача (8)-(11).
4. Нехай $\langle C(x^h), x^h \rangle (x^h = (x_0^h, \dots, x_k^h))$ — одержаний розв'язок. Якщо $(x_r^h, \dots, x_s^h) \notin E_{\eta n}^v(G)$, то будуємо відсікання $w_h(x) \geq 0$ за формулами (17)-(19).
5. Якщо умова (9) виконується, то знаходимо таке u , для якого виконується (14). Якщо $q_u(x^h) \geq 0$, то задачу (8)-(11) розв'язано, інакше будуємо відсікання $w_h(x) \geq 0$ за формулою (15).
6. Покладаємо $Z_h = Z_{h-1} \cap \{x \mid w_h(x) \geq 0\}$.
7. Збільшуємо значення h на одиницю. Переходимо на крок 2.
8. Скінченність запропонованого алгоритму залежить тільки від скінченності розв'язування підзадач на кожній ітерації, оскільки послідовність таких підзадач скінченна. Дійсно, у результаті розв'язування задачі (8), (12)-(13) одержується точка, усі координати

якої є елементами скінченної множини $S(G)$. Оскільки в процесі розв'язування задач методом Дальтона-Ллевеліна одержується лексикографічно спадна послідовність точок [6], то неможливе одержання двічі однієї й тієї самої точки як розв'язку задачі. Звідси і впливає скінченність послідовності підзадач.

Як відомо [6], скінченність алгоритму Дальтона-Ллевеліна гарантується при виконанні таких умов:

- 1) при виборі рядка для відсікання враховується належність значень цільової функції деякій скінченній або зчисленній множині;
- 2) цільова функція обмежена на множині допустимих значень.

Оскільки множина допустимих точок задачі (8), (12)-(13) скінченна, то цільова функція обмежена на цій множині. Отже, умови скінченності запропонованого алгоритму можуть бути сформульовані у вигляді такої теореми.

Теорема. Якщо для розв'язування проміжних задач використовується алгоритм Дальтона-Ллевеліна, причому при виборі рядка для відсікання в цьому алгоритмі враховується належність значень цільової функції деякій скінченній або зчисленній множині, то запропонований алгоритм завершує свою роботу за скінченне число кроків.

Таким чином, запропоновано алгоритм відсікання, який дозволяє одержати точний розв'язок задачі оптимізації на розміщеннях з лінійною цільовою функцією і лінійними та угнутими додатковими обмеженнями. Його застосування проілюстровано на одній інвестиційній задачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Емец О.А., Емец Е.М. Моделирование некоторых инвестиционных задач с помощью евклидовой комбинаторной оптимизации // Экономика и математические методы. — 2000. — Т.36, №2. С. 141—144.
2. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — К.: ІСДО, 1993. — 188 с.
3. Реклейтис Г.В., Рейвиндран А., Рэгсдел К.М. Оптимизация в технике. — Т.1. — М.: Мир, 1986. — 352с.
4. Ємець О.О., Ємець Є.М. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової комбінаторної оптимізації. //Доп. НАН України.— 2000.—№9.—С.105-109
5. Ємець О.О., Барболіна Т.М. Метод відсікання розв'язування лінійних умовних задач оптимізації на розміщеннях // У кн.: М.В.Остроградський — видатний математик, механік і педагог. Матеріали Міжнародної конференції, присвяченої 200-річчю з дня народження. 26-27 вересня 2001 року. — Полтава, 2001. — С. 27—28.
6. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. — М.: Наука, 1969. — 368 с.

ЗМІСТ

Фізика

Л.В. Поперенко, Т. Лонер, В.С. Стащук, М.В. Вінніченко, І.В. Юргелевич, Д.В. Носач	Оптичні властивості іонно-бомбардованих мідних плівок	3
М.И. Шахпаронов, В.С. Сперкач, А.П. Руденко	Теоретические основы исследования неравновесных процессов.....	20
О.І. Єлізаров, В.В. Богобоящий, О.Ю. Гибін	Візуалізація процесів окислювання біметалічних структур за допомогою хемографічного методу	29
В.П. Сухомлин	Термічні напруги в керамічних матеріалах	43
В.В. Богобоящий	Рухливість дірок у кристалах $p\text{-Hg}_{0.8}\text{Cd}_{0.2}\text{Te}$ при низьких температурах	45
С.О. Сперкач, Я.В. Сперкач, В.К. Калаптурівський, В.І. Рачков	Акустична релаксація в ацельованих поліпропіленгліколях	53
О.В. Саєнко, В.М. Нестеренко, В.І. Мокляк	Дослідження водних розчинів хлориду нікелю методом акустичної спектроскопії	60
Н.М. Зазимко	Вивчення мікроструктури поверхні руйнування поліметакритлату при зміні амплітудо-часових параметрів імпульсу навантаження	63
С.Л. Василенко	Електрофізичні властивості металонаповненої епоксидної композиції	67
Ю.В. Музиченко	Вплив розподілу наповнювача на структуру та електрофізичні властивості полімерних композицій	71
В.В. Іванко, Т.Д. Дідора, Н.О. Овсій	Електропровідність розупорядкованих ланцюгів Хаббарда.....	74
М.Г. Махно	Застосування теорії збурень до опису термодинамічних властивостей двоокису вуглецю	78
Н.В. Глейзер, О.М. Єрмолаєв, А.І. Шурдук	Зв'язані стани електронів у полі двох домішкових атомів у двовимірних електронних системах	82

О.Д. Альохін,
Ю.Л. Остапчук,
Є.Г. Рудніков

Рівняння стану рідини в гравітаційному полі
вздовж лінії екстремумів часів релаксації 87

В.А. Одарич,
Я.А. Шибіко

Еліпсометричні дослідження структури
діелектричних шарів, які утворюються при
напиленні HfO_2 на скло К8 90

Л.В. Поперенко,
В.В. Молебний,
О.В. Луценко,
С.В. Молебний

Аналіз похибки у визначенні рефракції ока
методом рей-трейсингу 94

В.А. Липо,
А.В. Сабуть

Фуллерено-подобные структуры в трехмерных
регулярных решётках 101

Р.В. Яремко

Енергетичні стани кристалів деяких пара-
галоїдоподібних бензолу 106

Математика

О.О. Ємець,
Т.М. Барболіна

Методи відсікання в нелінійній оптимізації на
розміщеннях та їх застосування до розв'язування
однієї інвестиційної задачі 110

М.І. Бондар,
О.М. Бондар

Математичні методи дослідження впливу спектра
мікронерівностей довговічність деталей 117

О.П. Губачов

Теорема типу Фрагмена-Лінделефа для
квазілінійних еліптичних рівнянь у циліндричній
області 124

В.І. Лагно

Інваріантність рівнянь вигляду $u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx})$
відносно напівпростих алгебр Лі операторів симетрії 126

Г.О. Лагно

Про нові галілей-інваріантні рівняння з
частинними похідними другого порядку 136

А.Ф. Баранник,
Ю.Д. Москаленко

Про нові розв'язки нелінійного рівняння
Даламбера у псевдоевклідовому просторі $R_{2,3}$ 141

О.С. Мельниченко

Модифікований метод моделювання нормально
розподілених величин 146

К.Ф. Чуб

Магістральна траєкторія загальної задачі
оптимального керування для нелінійної кінетичної
системи Моно-Ієрусалимського 148

Е.Б.Яворський

Характеризація графів з обмеженнями на всі
покриваючі дерева 153

Хроніка

Пам'яті видатного математика 159

Михаил Иванович Шахпаронов 160

Наші автори

..... 163