

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія прикладна математика
та інформатика

ВИПУСК 5

Видається з 1999 р.



Львівський національний університет імені Івана Франка
Львів - 2002

В І С Н И К ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

**Серія прикладна математика
та інформатика**

ВИПУСК 5

Видається з 1999 р.

Львівський національний університет ім. Івана Франка

Львів – 2002

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика.
2002. Випуск № 5. 193 с.

Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Computer Science.
2002. No 5. 193 p.

У Віснику вміщені статті з математичного моделювання, чисельних методів розв'язування задач математичного аналізу, диференціальних рівнянь, рівнянь математичної фізики й оптимізації та з прикладних проблем інформатики. Статті друкуються українською або англійською мовами.

Редакційна колегія: д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г. Шинкаренко* (відп. редактор); д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г. Цегелик* (заст. відп. редактора); канд. фіз.-мат. наук, доц. *Ю. Щербина* (відп. секретар); канд. фіз.-мат. наук, доц. *М. Бартіш*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Войтович*; чл. кор НАН України, д-р тех. наук, проф. *В. Грицик*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *С. Лавренюк*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Недашківський*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Б. Попов*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Притула*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Я. Савула*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г. Сулим*; канд. фіз.-мат. наук, доц. *Р. Ханко*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Є. Чапля*.

Адреса редакційної колегії:
Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра оптимальних процесів.
вул. Університетська, 1, 79000, м. Львів
Тел. 79-47-91
E-mail: kis@franko.lviv.ua

Відповідальний за випуск *Г. Шинкаренко*

Редактор *М. Мартиняк*

Друкується за ухвалою Вченої Ради
Львівського національного університету імені Івана Франка

УДК 519.85

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ЕВКЛІДОВОЇ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ПЕРЕСТАВЛЕННЯХ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

О. Ємець, Н. Романова, О. Роскладка

Полтавський державний технічний університет ім. Ю.Кондратюка

Розглянуто умови еквівалентності багатогранників переставлень зі спільною первинною специфікацією мультимножин. Це дає змогу класифікувати загальні багатогранники переставлень для подальшого вивчення їхніх комбінаторних властивостей. Описано метод розв'язування лінійної умовної задачі оптимізації на переставленнях, у якому розв'язки одержують будь-яким переборним методом, а оптимальність перевіряється методом відтинання.

Ключові слова: поліноміальний метод, параметрична оптимізація, переставлення

1. ДЕЯКІ НОВІ ВЛАСТИВОСТІ ЗАГАЛЬНОГО БАГАТОГРАННИКА ПЕРЕСТАВЛЕНЬ

Вивчення властивостей комбінаторних багатогранників дає змогу розробляти нові методи й алгоритми розв'язування задач евклідової комбінаторної оптимізації. Розглянемо нові властивості багатогранників загальної множини переставлень.

Будь-яку мультимножину $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$, що містить k елементів, можна зобразити її основою – кортежем – $S(G) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, тобто упорядкованим набором усіх її n різних елементів, і кратністю r_i – кількістю повторень елемента e_i основи в мультимножині. Кортеж кратностей мультимножини називають її первинною специфікацією і позначають $[G] = (r_1, r_2, \dots, r_n)$.

Як відомо [1], кількість $\gamma(\Gamma_\nu)$ гіперграней, які інцидентні довільній вершині Γ_ν загального багатогранника переставлень $\Pi_{kn}(G)$, що його описує незвідна система

$$\sum_{j=1}^i x_{\alpha_j} \geq \sum_{j=1}^i g_j, \quad \sum_{j=1}^k x_j = \sum_{j=1}^k g_j, \quad (1)$$

де $\alpha_j \in J_k, \alpha_j \neq \alpha_i, \forall j \neq i, j \in J_i, i \in J_{k-1} \setminus \{J_n \setminus \{1\}\} \cup J_{k-2} \setminus J_{k-n-1}\}$,
дорівнює

$$\gamma(\Gamma_\nu) = r_1 + r_n + \sum_{i=2}^{n-1} 2^{r_i} - (n-1). \quad (2)$$

Теорема 1. Багатогранник $\Pi_{kn}(G)$, що його описує незвідна система (1), є невивордженим тоді і тільки тоді, якщо $r_i = 1 \quad \forall i \in J_{n-1} \setminus \{1\}$.

Доведення.

Достатність. Нехай $r_i = 1 \quad \forall i \in J_{n-1} \setminus \{1\}$. Тоді за формулою (2)

$$\gamma(\Gamma_\nu) = r_1 + r_n + \sum_{i=2}^{n-1} 2^1 - (n-1) = \left(r_1 + r_n + \sum_{i=2}^{n-1} r_i \right) + \sum_{i=2}^{n-1} r_i - (n-1) = \sum_{i=1}^n r_i - 1 = k - 1.$$

Оскільки $\dim \Pi_{kn}(G) = k - 1$, то багатогранник $\Pi_{kn}(G)$ є простим [2]. А оскільки система (1) не містить надлишкових обмежень, то достатність доведено.

Необхідність. Нехай багатогранник $\Pi_{kn}(G)$ є невивірдженим [2]. Тоді $\Pi_{kn}(G)$ – простий. Отже, $\gamma(\Gamma_\nu) = k - 1$. Використавши (2), маємо:

$$\gamma(\Gamma_\nu) = r_1 + r_n + \sum_{i=2}^{n-1} 2^{r_i} - n + 1 = k - 1.$$

Оскільки $k = \sum_{i=1}^n r_i = r_1 + \sum_{i=2}^{n-1} r_i + r_n$, то

$$r_1 + r_n + \sum_{i=2}^{n-1} 2^{r_i} - (n - 1) = r_1 + \sum_{i=2}^{n-1} r_i + r_n - 1.$$

Звідси $\sum_{i=2}^{n-1} 2^{r_i} - (n - 1) = \sum_{i=2}^{n-1} r_i - 1$, отже,

$$\sum_{i=2}^{n-1} (2^{r_i} - r_i) = n - 2. \quad (3)$$

Проаналізуємо розв'язки рівняння (3) відносно змінної r_i . Кількість доданків у лівій частині (3) дорівнює $n - 1 - 2 + 1 = n - 2$. Очевидно, що $2^{r_i} > r_i$ і різниця $2^{r_i} - r_i > 0$ є цілим числом. Тоді сума додатних цілих чисел дорівнює їх кількості. Це можливо в єдиному випадку, якщо $r_i = 1$. Теорему доведено.

Позначимо через $[G^*]$ первинну специфікацію підмультимножини G^* мультимножини G , $[G^*] \subset [G]$, нехай $r_i \in [G]$, $r_i^* \in [G^*]$ і елементи r^* задовольняють умову $r_i^* = r_i \quad \forall i \in J_{n-1} \setminus \{1\}$.

Теорема 2. Нехай $\Pi_{kn}(G_1)$ – невивірджений багатогранник в R^k . Якщо $[G_1^*] = [G_2^*]$, то $\Pi_{kn}(G_2)$ також є невивірдженим.

Доведення. Оскільки $\Pi_{kn}(G_1)$ – невивірджений, то за теоремою 1 для $[G_1]$ маємо $r_i = 1 \quad \forall i \in J_{n-1} \setminus \{1\}$, тобто $[G_1^*] = (1, 1, \dots, 1)$. За умови $[G_1^*] = [G_2^*] = (1, 1, \dots, 1)$. Отже, за теоремою 1 $\Pi_{kn}(G_2)$ також є невивірдженим, що і треба було довести.

Нехай система обмежень, що задає багатогранник M , така:

$$A \cdot X \geq b. \quad (4)$$

Розглянемо еквівалентність багатогранників при фіксованій матриці A . Позначимо багатогранник, що його описує (4), $M(b)$.

Не обмежуючи загальності міркувань, можна вважати, що елементи мультимножини G задовольняють умову $g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_k$.

Теорема 3. Два невивіржені багатогранники переставлень $\Pi_{kn}(G_1)$ і $\Pi_{kn}(G_2)$ у просторі R^k є еквівалентними, якщо збігаються первинні специфікації мультимножин G_1 і G_2 , тобто $[G_1] = [G_2]$.

Доведення. Позначимо вектор правих частин нерівностей багатогранника $\Pi_{kn}(G_1)$ через b_1 , а для $\Pi_{kn}(G_2)$ – через b_2 . Тоді, для еквівалентності цих багатогранників [2] треба довести, що багатогранник $\Pi_{kn}(G_\lambda)$ з вектором

$$b_\lambda = \lambda b_1 + (1 - \lambda) b_2, \quad (5)$$

де

$$\lambda \in (0, 1), \quad (6)$$

є невідродженим.

Спираючись на теорему 2, достатньо довести, що перетворення (5) дає багатогранник $\Pi_{kn}(G_\lambda)$, який можна розглядати як опуклу оболонку загальної множини переставлень $E_{kn}(G_\lambda)$, причому $[G_1] = [G_\lambda] = [G_2]$, де елементи $g_i^\lambda \in G_\lambda$ визначені так: $g_i^\lambda = \lambda g_i^1 + (1 - \lambda) g_i^2 \quad \forall i \in J_k$, оскільки, як видно з (1), праві частини системи обмежень багатогранника переставлень є лінійними комбінаціями елементів мультимножини. Рівність первинних специфікацій означає таке:

$$\begin{cases} g_j^1 = g_l^1 \\ g_j^2 = g_l^2 \end{cases} \Rightarrow g_j^\lambda = g_l^\lambda \quad \forall j, l \in J_k; \quad (7)$$

$$\begin{cases} g_j^1 \neq g_l^1 \\ g_j^2 \neq g_l^2 \end{cases} \Rightarrow g_j^\lambda \neq g_l^\lambda \quad \forall j, l \in J_k. \quad (8)$$

Тут $g_j^1, g_l^1 \in G_1, g_j^2, g_l^2 \in G_2, g_j^\lambda, g_l^\lambda \in G_\lambda, j \neq l$.

Доведемо (7). Розглянемо рівність $g_j^\lambda = g_l^\lambda$

$$\begin{aligned} \lambda g_j^1 + (1 - \lambda) g_j^2 &= \lambda g_l^1 + (1 - \lambda) g_l^2; \\ \lambda (g_j^1 - g_l^1) &= (1 - \lambda) (g_l^2 - g_j^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Оскільки $g_j^1 = g_l^1$ і $g_j^2 = g_l^2$, то $g_j^1 - g_l^1 = g_l^2 - g_j^2 = 0$, і рівність (9) виконується для будь-яких значень λ . Доведемо (8) від супротивного.

Нехай

$$\begin{cases} g_j^1 \neq g_l^1 \\ g_j^2 \neq g_l^2 \end{cases} \Rightarrow g_j^\lambda = g_l^\lambda. \quad (10)$$

Тоді $\lambda (g_j^1 - g_l^1) = (1 - \lambda) (g_l^2 - g_j^2)$, $\frac{1 - \lambda}{\lambda} = \frac{g_j^1 - g_l^1}{g_l^2 - g_j^2}$. Позначимо $\frac{g_j^1 - g_l^1}{g_l^2 - g_j^2} = A$.

Нехай для визначеності $j > l$. Тоді з (8) та упорядкованості елементів мультимножини за неспаданням випливає $g_j^1 > g_l^1$ і $g_j^2 > g_l^2$, а величина $A < 0$. Знайдемо λ :

$$\lambda = \frac{1}{A + 1} \quad (11)$$

Очевидно, що A не може дорівнювати -1 . Розглянемо два можливі випадки оцінки значень λ у виразі (11):

1) якщо $-1 < A < 0$, то $0 < A + 1 < 1 \Rightarrow \lambda > 1$;

2) якщо $A < -1$, то $A + 1 < 0 \Rightarrow \lambda < 0$.

Отже, жодне із значень λ не належить інтервалу $(0; 1)$. Тому виконання умови (10) суперечить (6). Теорему доведено.

2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ УМОВНИХ ЗАДАЧ ЕВКЛІДОВОЇ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ПЕРЕСТАВЛЕННЯХ

Розглянемо розв'язування лінійних умовних евклідових комбінаторних задач оптимізації на множинах, що збігаються з множинами вершин своїх опуклих оболонок, на основі поєднання ідей відтинання [3-4] та перебору [5].

У разі моделювання та розв'язування багатьох задач в економіці та інших галузях виробництва виникає потреба розв'язувати лінійні умовні комбінаторні задачі евклідової комбінаторної оптимізації [3], тобто задачі вигляду

$$C(y^*) = \text{extr}_{y \in R^m} \sum_{j=1}^m c_j y_j, \quad (12)$$

$$y^* = \arg \text{extr}_{y \in R^m} \sum_{j=1}^m c_j y_j \quad (13)$$

за умови

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in E \subset R^k \quad (14)$$

і додаткових обмежень

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \leq b_i, \quad i \in J_r, \quad (15)$$

де E – евклідова комбінаторна множина, $J_k = \{1, 2, \dots, k\}$ – множина перших k натуральних чисел, $y = (x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_m) \in R^m$; m, r, k – натуральні константи ($m \geq k$), c_j, a_{ij}, b_i – задані дійсні числа $\forall j \in J_m, \forall i \in J_r$.

Великий клас таких задач становлять задачі, де множина E збігається з множиною вершин своєї опуклої оболонки, тобто $E = \text{vert conv } E$. Тут розглядаємо тільки задачі такого класу.

Прикладом такої задачі може бути задача кольорового упакування прямокутників з урахуванням похибок початкових даних на множині поліпереставлень [6]. Розв'язування таких задач за достатньо великої кількості змінних є трудомістким. Перебір допустимих розв'язків великий, на це не вистачає ресурсів ЕОМ. З іншого боку, метод відтинання в евклідовій комбінаторній оптимізації на проміжних кроках дає розв'язки релаксованої задачі, що ще не є допустимими для задачі вихідної. Збіжність значень цільової функції в релаксованій задачі та на допустимому розв'язку в переборному методі доводить оптимальність цього методу.

З огляду на це під час розв'язування задач кольорового упакування та інших лінійних комбінаторних задач оптимізації на переставленнях та поліпереставленнях доцільно дослідити можливість поєднання ідей методу відтинання та методу гілок та меж (і переборних методів взагалі).

Нехай E – множина переставлень. Зазначимо, що опукла оболонка множини E – загальний переставний багатогранник $P = \text{conv } E$. Система лінійних обмежень багатогранника відома (див. наприклад [7]).

Під час застосування методу гілок та меж до задачі (12-15) маємо при кожному проходженні дерева розв'язків деяку точку, що належить множині вершин переставного багатогранника, однак не знаємо, чи є ця точка оптимальною. Водночас у разі застосування методу відсікання [3, 4] до задачі (12-15) маємо на кожній ітерації оптимальне значення цільової функції в точці, що не належить множині вершин переставного багатогранника. Якщо за одночасного розв'язування задачі (12-15) обома методами на якійсь ітерації виявиться, що значення цільових функцій однакові, то це означає, що оптимальний розв'язок у вершині переставного багатогранника, яка знайдена під час перебору.

Зробимо релаксацію задачі (12-15), замінивши (14) на умову $x \in \Pi$. Нехай задача в канонічному вигляді. Знайти

$$C(y^*) = \max_{y \in R^m} \sum_{j=1}^m c_j y_j ; \quad (16)$$

$$y^* = \arg \max_{y \in R^m} \sum_{j=1}^m c_j y_j ; \quad (17)$$

за умов

$$x \in \Pi \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = b_i, \forall i \in J_s, y_j \geq 0, \forall j \in J_m, i \in J_r. \quad (19)$$

Розглянемо схему алгоритму.

Перша задача лінійного програмування (ЗЛП), яку розглядають, це задача (16-19).

Крок 1. Симплекс-методом розв'язуємо ЗЛП. (Практично це роблять із застосуванням методу послідовного приєднання обмежень [7] та модифікованого чи двоїстого симплекс-методу). Якщо задача нерозв'язна, то нерозв'язна й вихідна. Зупинка алгоритму. Інакше знаходимо розв'язок, який позначимо $\langle C(y^*), y^* \rangle$.

Перехід на крок 2.

Крок 2. За точкою $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ формуємо $x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*)$, $x_i^* = y_i^*, \forall i \in J_k$. Перевіряємо умову (14): $x^* \in E$. Якщо умова (14) виконується для x^* , то задача (12-15) розв'язана. Зупинка алгоритму. Інакше йдемо на крок 3.

Крок 3. Переборним методом (наприклад методом гілок та меж) знаходимо допустимий розв'язок задачі (12-15) $z^* = (z_1^*, \dots, z_m^*)$. Порівнюємо значення $C(z^*)$ цільової функції зі значенням $C(y^*)$. Якщо значення однакові, то задача (12-15) розв'язана. Розв'язком є $\langle C(z^*), z^* \rangle$; зупинка алгоритму. Інакше перехід на крок 4.

Крок 4. Додаємо до ЗЛП сформовану нерівність – відтинання [3-4], що виконано через суміжні з y^* вершини допустимої області задачі (16-19). Перехід на крок 1.

Скінченність алгоритму очевидна. Необхідним у подальшому є дослідження з метою порівняння ефективності запропонованого підходу з методом відтинання, методом гілок та меж для різних задач у разі їхньої практичної реалізації на ЕОМ.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ємець О.О., Колечкіна Л.М., Недобачій С.І. Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах. Полтава, 1999.
2. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Багатогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.
3. Ємець О.О., Ємець Є.М. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової комбінаторної оптимізації // Доп. НАН України. 2000. №9. С.105-109.
4. Емец О.А., Емец Е.М. Отсечения в линейных частично комбинаторных задачах оптимизации на перестановках // Экономика и математические методы. 2001. Т.37, №1. С.118-121.
5. Корбут А.А., Сигал И.Х., Финкельштейн Ю.Ю. Метод ветвей и границ (обзор теории, алгоритмов, программ, приложений) // Math. Operationforsch. Statist., Ser, Optimization. 1977. Bd. 8, N 2. S.253-280.
6. Емец О.А. Евсеева Л.Г., Романова Н.Г. Задача цветной упаковки прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных и ее решение // Экономика и матем. методы. 2000. Т.36, №3. С.149-152.
7. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. К.: ІСДО, 1993.

ABOUT PROPERTIES OF SOME TASKS OF EUCLID COMBINATORIAL OPTIMIZATION ON PERMUTATION AND METHODS OF THEIR SOLUTION

O. Yemets, N. Romanova, O. Roskladka

State Technical University of Poltava

Necessary and sufficient conditions of equivalence of permutation's polyhedrons with the identical primary specification of multisets in the given work are considered. It enables to classify general polyhedrons of permutations with the purpose of further study of their combinatorial properties. The method of a solution of the linear conditional task of optimization on permutations, in which the solutions turn out by some search method, and the optimality is checked by a method of cuts is considered.

Keywords: polynomial method, parametric optimization, combinatorial sets

Стаття надійшла до редколегії 17.10.2001

Прийнята до друку 11.06.2002

ЗМІСТ

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА

<i>М. Дорошенко, В. Жидик.</i> Виділення особливостей у похідних потенціалу простого шару на розімкнутих поверхнях	3
<i>Є. Крутигорова.</i> Про умови збіжності рядів експонент на межі опуклої багатокутної області.....	9
<i>І. Лісіцина, М. Тихоненко.</i> Поліноміальні квадратурні формули обчислення регулярних інтегралів на дійсній осі	14
<i>Вал. Мамчук.</i> Залежність збіжності одного ітераційного процесу від значень прискорювального параметра	19
<i>Л. Підківка, Г. Цегелик.</i> Інтерполяційний метод мажорантного типу розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь	26
<i>Б. Попов, О. Лаушник, К. Суцук.</i> Нелінійні апроксимаційні моделі	32
<i>В. Прокіп, О. Мельник, В. Кузаконь.</i> Про один клас дільників багаточленних матриць над полем	39
<i>Олена Стара.</i> Про асимптотичне зображення розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з повільнозмінними коефіцієнтами	45
<i>Світлана Ярошко.</i> Про обґрунтування модифікованого методу послідовних наближень відшукування характеристичних чисел лінійних цілком неперервних операторів	51

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

<i>П. Вагін, А. Ямелинець.</i> Розв'язування початково-крайових задач міграції домішок	61
<i>А. Власюк, П. Мартинюк.</i> Фільтраційна консолідація ґрунтового масиву в основі гідротехнічної споруди за наявності перенесення солей	68
<i>І. Дзяк, Т. Березюк.</i> Гібридні скінченно-граничноелементні апроксимації задач теорії пружності на основі методу декомпозиції області	75
<i>Я. Єлейко, Б. Копитко, Р. Гришук.</i> Ціноутворення векселів у перехідний період	83
<i>О. Ємець, Н. Романова, О. Роскладка.</i> Про властивості деяких задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставленнях та методи їх розв'язування	89
<i>Г. Квасниця, Г. Шинкаренко.</i> Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики	95
<i>О. Коссак, П. Грицак.</i> Теплообмін у циліндричній трубі в разі гідравлічно стабілізованого потоку	107
<i>Е. Марецька.</i> Математичні моделі страхування життя	112
<i>Т. Мартинович, Б. Мартинович.</i> Ряди типу Фур'є в комплексній формі на "одиничних" криволінійних замкнутих лініях у площинах	118
<i>І. Махоркін, А. Сенік.</i> Модель ефективного теплового джерела для ортотропного циліндричного тіла, яке опромінюють концентрованим потоком енергії	131
<i>В. Попович, К. Іванків.</i> Нелінійна задача теплопровідності для кулі з теплообміном	136
<i>Є. Чапля, О. Чернуха, Б. Боженко.</i> Про перенесення домішки у двофазових випадково-неоднорідних волокнистих середовищах	145