ВІСНИК

ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

№337

Львів
1998

ВІСНИК

ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

№337

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

ТОМ 2

МАТЕМАТИЧНА І ТЕРЕТИЧНА ФІЗИКА

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

полі досліджуваного параметра. Це, в свою чергу, вплине на розв`язувану систему рінянь і дасть змогу знизити число обумовленості.

Перелік посилань

1. Метрологическое обеспечение измерительных информационных систем. /Под ред. Е.Т.Удовиченко. - М.: Изд-во стандартов, 1991. - 192с.
2. Форсайт Дж., Моллер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. /Пер. с англ. - М.: 1969. - 164 с.
3. Беленький Я.Б. Измерение параметров пространственных полей. - Киев: Наук. думка, 1985. - 288 с.

УДК 519.85

О.О. Ємець, Л.М. Колєчкіна

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ З ДРОБОВО-ЛІНІЙНОЮ ЦІЛЬОВОЮ ФУНКЦІЄЮ НА ЗАГАЛЬНІЙ МНОЖИНІ ПЕРЕСТАВЛЕНЬ

Розглядається постановка та розв'язання задачі з дробово-лінійною функцією цілі та додатковими лінійними обмеженнями на загальній множині переставлень $E_{kn}(G)$ з k дійсних чисел мультимножини G [1], серед яких n різних, n≤k.

Нехай необхідно визначити

$$F(t^*) = \underset{t\in R^m}{extr} \frac{\sum_{j=1}^{m} c_j t_j}{\sum_{j=1}^{m} d_j t_j}, \quad t^* = \arg \underset{t\in R^m}{extr} \frac{\sum_{j=1}^{m} c_j t_j}{\sum_{j=1}^{m} d_j t_j}, \tag{1}$$

при умовах

$$x = (x_1,\dots,x_k) \in E_{kn}(G) \subset R^k, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} t_j \le b_i, \quad \forall i \in J_r, \tag{3}$$

$t = (t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_m) \in R^m$, $x_j = t_j$, $\forall\, j$, де $j \in J_k = \{1,\ 2, \dots k\}$. Тут m,k,r,n - задані натуральні числа, a_{ij} , b_i, c_j, d_j - задані дійсні числа $\forall j,\ j\in J_m$, $\forall\, i,\ i\in J_r$, $m \ge k$.

За означенням [2] це частково комбінаторна задача на переставленнях. Для її розв'язання перейдемо до задачі з лінійною функцією цілі і додатковими лінійними обмеженнями. Для цього застосуємо відображення α, яке задамо співвідношеннями

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} d_j t_j}, \qquad y_j = t_j \cdot y_0, \quad j \in J_k. \tag{4}$$

Зауважемо, що $y_0 \ge 0$, $y_j \ge 0$, $j \in J_k$.

Твердження. Відображення α переводить точки $x \in E_{kn}(G)$, які є вершинами загального переставного многогранника $\Pi_{kn}(G) = convE_{kn}(G)$, в точки $y \in E$, де E - множина вершин многогранника $Q_{kn}(G) \subset R^{k+1}$, $Q_{kn}(G)$ - основа деякої піраміди [3]. І навпаки, точки $y \in E$, які є вершинами основи піраміди $Q_{kn}(G) \subset R^{k+1}$ при відображенні оберненому до α перейдуть в точки $x \in E_{kn}(G)$ - вершини загального переставного многогранника $\Pi_{kn}(G)$.

Доведення. Нехай дано мультимножину G для елементів якої виконується умова

$$g_1 \geq g_2 \geq \ldots \geq g_k \geq 0.$$

Розглянемо вершини $\Pi_{kn}(G)$: $x^* = \left\{g_1, \ldots, g_\alpha, g_{\alpha+1}, \ldots, g_\beta, g_{\beta+1}, \ldots, g_t, \ldots, g_k\right\}$, $x^{**} = \left\{g_1, \ldots, g_\beta, g_{\alpha+1}, \ldots, g_\alpha, g_{\beta+1}, \ldots, g_t, \ldots, g_k\right\}$, утворені одна з одної переставленням компонент рівних e_i, e_j або координат g_α, g_β. Тоді за критерієм вершини $\Pi_{kn}(G)$ [2] маємо

$$\left\{\alpha_1^1\right\} \subset \ldots \subset \left\{\alpha_1^\alpha, \ldots, \alpha_\alpha^\alpha\right\} \subset \ldots \subset \left\{\alpha_1^\beta, \ldots, \alpha_\alpha^\beta, \alpha_\beta^\beta\right\} \subset \ldots \subset \left\{\alpha_1^k, \ldots, \alpha_\alpha^\beta, \alpha_\beta^\beta, \ldots, \alpha_k^k\right\} = J_k$$

$$\sum_{t=1}^{i} x_{\alpha_t^i} = \sum_{t=1}^{i} g_t y_0, \quad \forall i \in J_k.$$

Для точки x^* вкладення, утворені з індексів координат набувають вигляду $\{1\} \subset \ldots \subset \{1,2,\ldots,\alpha\} \subset \{1,2,\ldots, \alpha, \alpha+1\} \subset \ldots \subset \{1,2,\ldots, \alpha, \alpha+1, \ldots \beta\} \subset \ldots \{1,2,\ldots, \alpha, \alpha+1, \ldots \beta, \beta+1, \ldots, k\} = J_k$, а система така:

$x_1 = g_1;$

…

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{\alpha-1} + x_\alpha = g_1 + g_2 + \ldots + g_{\alpha-1} + g_\alpha;$

…

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{\alpha-1} + x_\alpha + \ldots + x_\beta + x_{\beta+1} = g_1 + g_2 + \ldots + g_{\alpha-1} + g_\alpha + \ldots + g_\beta + g_{\beta+1};$

…

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{\alpha-1} + x_\alpha + \ldots + x_\beta + x_{\beta+1} + \ldots + x_k = g_1 + g_2 + \ldots + g_{\alpha-1} + g_\alpha + \ldots + g_\beta + g_{\beta+1} + \ldots + g_k.$

Для точки x^{**} вкладення набувають вигляду $\{1\} \subset \ldots \subset \{1,2,\ldots,\beta\} \subset \{1,2,\ldots, \beta, \alpha+1\} \subset \ldots \subset \{1,2,\ldots, \beta, \alpha+1, \ldots \alpha\} \subset \ldots \{1,2,\ldots, \beta, \alpha+1, \ldots \alpha, \beta+1, \ldots, k\} = J_k$, система:

$x_1 = g_1;$

…

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{\alpha-1} + x_\beta = g_1 + g_2 + \ldots + g_{\alpha-1} + g_\alpha;$

…

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{\alpha-1} + x_\beta + \ldots + x_\alpha + x_{\beta+1} = g_1 + g_2 + \ldots + g_{\alpha-1} + g_\alpha + \ldots + g_\beta + g_{\beta+1};$

…

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{\alpha-1} + x_\beta + \ldots + x_\alpha + x_{\beta+1} + \ldots + x_k = g_1 + g_2 + \ldots + g_{\alpha-1} + g_\alpha + \ldots + g_\beta + g_{\beta+1} + \ldots + g_k.$

Тепер покажемо, що відображення α, яке задане (4), переводить точки в точки $y \in E$. Застосуємо α до координат точки x^*, отримаємо точку y^* з координатами: $y_0 = \{d_1 g_1 + \ldots + d_\alpha g_\alpha + d_{\alpha+1} g_{\alpha+1} + \ldots + d_{\beta-1} g_{\beta-1} + d_\beta g_\beta + d_{\beta+1} g_{\beta+1} + \ldots + d_k g_k\}^{-1}$; $y_1 = g_1 y_0$; … $y_\alpha = g_\alpha y_0$; … $y_\beta = g_\beta y_0$; … $y_k = g_k y_0$. Зробимо теж саме і для точки x^{**}, отримаємо точку y^{**}, координати якої будуть відрізнятися від координат точки y^* лише для тих координат, які мають індекси α, β. Отже, дві вершини переставного многогранника перейдуть при відображенні α в дві різні точки. Перевіряємо виконання критерію вершини основи піраміди [3], і робимо висновок, що точки y^*, y^{**} - належать множині E і є вершинами основи піраміди. Щоб довести виконання другої частини теореми, оберненої до першої, достатньо взяти будь-яку точку $y \in E$. Застосувати до її координат відображення, обернене до α, перевірити для одержаної точки критерій вершини [2] для переставного многогранника $\Pi_{kn}(G) = convE_{kn}(G)$. Твердження доведене.

Задача (1)-(3) зведеться до знаходження впорядкованої пари $<F'(z^*),z^*>$, такої, що

$$F'(z^*) = \underset{z \in R^{m+1}}{extr} \sum_{j=1}^{m} c_j z_j, \quad z^* = \underset{z \in R^{m+1}}{arg\,extr} \sum_{j=1}^{m} c_j z_j \tag{5}$$

при умовах

$$y = (y_0, y_1, ..., y_k) \in E \subset R^{k+1}, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} z_j \le b_i z_0, \quad \forall i \in J_r, \tag{7}$$

$$z = (z_0, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_m) \in R^{m+1}, \; y_j = z_j, \; \forall j \in J_k \cup \{0\}.$$

В багатьох задачах вигляду (1)-(3) евклідова комбінаторна множина збігається з множиною вершин своєї опуклої оболонки (це справедливо зокрема для різних множин переставлень [2, 4]). Для множини E це також виконується [3]:

$$E = vert\,conv\,E. \tag{8}$$

Наявність властивості (8) дозволяє застосувати метод відсікання [5, 6] для розв'язування задачі (5)-(7). Для нього розроблено програму на мові Паскаль.

Задачі з дробово-лінійною функцією цілі на загальній множині переставлень одержані як математичні моделі реальних економічних та технічних задач (див. наприклад, [7]). Зокрема, при плануванні виробництва велику роль відіграють собівартість продукції, рентабельність виробництва, середня вартість однієї тони випущеної продукції та інші показники, які виражаються дробово-лінійними залежностями. Мінімізація таких залежностей відображає необхідність зниження рівня собівартості в розрахунку на одиницю продукції, максимізація - підвищення рентабельності виробництва при збільшенні масштабів виробництва, продуктивності тощо.

Перелік посилань

1. Баранов В.И., Стечкин Б.С. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. - М.: Наука, 1989. - 160с.
2. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. - К.: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. - 188с.
3. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Дробово-лінійна задача оптимізації на загальній множині переставлень і властивості області її допустимих розв'язків. - Полтава, 1997. - 25с. -/Полт. техн. ун-т.- Деп. В УкрІНТЕІ 30.12.97 №575 - Уі 97
4. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. - М.: Наука, 1981. - 344с.
5. Емец О.А. Об одном методе отсечения для задач комбинаторной оптимизации./ / Экономика и мат. методы. - 1997.- Т. 33, вып.4.- С.120-129
6. Ємець О.О., Ємець Є.М. Метод відсікання для лінійних задач евклідової комбінаторніі оптимізації // В кн.: Всеукраїнська наукова конференція "Розробка та застосування

математичних методів у науково-технічних дослідженнях" Тези доповідей. Ч.3/ Міносвіта. Український державний університет "Львівська політехніка". Львів, 1995. - С. 32-33

7. Шор Н.З., Соломон Д.И. Декомпозиционные методы в дробно-линейном программировании. - Киев, 1989. - 203с.

УДК 519.85

О.О. Ємець, А.А. Роскладка

ДО ОПТИМІЗАЦІЇ ОЦІНОК ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ СИЛЬНО ОПУКЛИХ ФУНКЦІЙ НА СПОЛУЧЕННЯХ

Для побудови алгоритмів комбінаторної оптимізації необхідно вміти давати оцінки мінімуму. Велика кількість таких оптимізаційних задач розв'язується на множинах сполучень (задача про ранець [1,2], задача інтерполяції дискретної функції, що отримана експерементальним шляхом [1,2] та багато інших). Дана робота присвячена цій актуальній проблемі для задач евклідової комбінаторної множини сполучень з повтореннями.

Введемо необхідні означення.

Нехай J_n- множина n перших натуральних чисел, тобто $J_n=\{1,\ldots,n\}$. $J_n^0=J_n\cup\{0\}$, $J_0=\varnothing$.

Розглянемо мультимножину $G=\{g_1, g_2,\ldots,g_h\}$, $g_i\in R^1, \forall i\in J_h$ з основою $S(G)=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ і первинною специфікацією $[G]=\{k^n\}$, тобто мультимножина G має по k екземплярів кожного з e_i елементів. Елементами евклідової множини k-сполучень (див. напр. [1], [3]) з повтореннями $\overline{S}_n^k(G)$ є всі упорядковані k-вибірки з мультимножини G вигляду $e=\left(g_{i_1},g_{i_2},\ldots,g_{i_k}\right)$ при виконанні умови $g_{i_1}\le g_{i_2}\le\ldots\le g_{i_k}$, де $g_{i_j}\in G,\ i_j\neq i_t\ \forall\, i_j,\ i_t\in J_h,\ \forall j,\ t\in J_k$.

Для посилення екстремальних оцінок використаємо дві леми з роботи [4].

<u>Лема 1.[4].</u> Якщо функція $\psi(x)$ сильно опукла з параметром $\rho>0$ і дифференційовна на опуклій замкненій множині $X\supset E$, то $\forall x\in X$

$$\min_{y\in E}\psi(y)\ge\psi(x)-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}x_i+\rho\sum_{i=1}^{k}x_i^2+\rho\sum_{i=1}^{k}g_{\sigma_i}^2+\min_{y\in E}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}-2\rho x_i\right)y_i,$$ де

константа g_{σ_i} задовільняє умові $g_{\sigma_i}\in G\ \forall i\in J_\eta,\ \left|g_{\sigma_i}\right|\le\left|g_{\sigma_{i+1}}\right|\ \forall i\in J_{\eta-1}$.

Посилимо оцінку мінімуму, взявши максимум по $x\in X$ від правої частини нерівності

$$\min_{y\in E}\psi(y)\ge\max_{x\in X}[\psi(x)-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}x_i+\rho\sum_{i=1}^{k}x_i^2+\rho\sum_{i=1}^{k}g_{\sigma_i}^2+$$

$$+\min_{y\in E}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}-2\rho x_i\right)y_i].$$

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ