ДОПОВІДІ АКАДЕМІЇ НАУК УРСР

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

КИЕВ

1991 ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР № 4
МАТЕМАТИКА, ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

КИБЕРНЕТИКА *CYBERNETICS*

УДК 519.8

О. А. ЕМЕЦ

МНОЖЕСТВО СОЧЕТАНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ, ОТОБРАЖЕННОЕ В R^k, И СВОЙСТВА ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ НА НЕМ

(Представлено член-корреспондентом АН УССР Ю. Г. Стояном)

В последние годы широко используются задачи оптимизации на множестве сочетаний [1, 2]. В данной работе исследуются сочетания с повторениями и экстремальные свойства целевых функций некоторых классов задач на них.

Рассмотрим множество k-сочетаний с повторениями из η элементов набора $g=\{g_1, \dots, g_\eta\}$, в котором n различных элементов g^i повторяются k раз. Не нарушая общности, можно считать $g_1 \leqslant \dots \leqslant g_\eta$; $g^1 < \dots < g^n$. Элементами множества k-сочетаний с повторениями являются наборы

$$(g_{\alpha_1}, g_{\alpha_2}, \dots, g_{\alpha_k}), \tag{1}$$

где $g_{\alpha_i} \in g$, $\alpha_i \in I_\eta$, $i \in I_k$, здесь и ниже $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Не нарушая общности, можно считать, что для любого элемента вида (1) из множества k-сочетаний с повторениями выполняется неравенство

$$g_{\alpha_1} \leqslant g_{\alpha_2} \leqslant \dots \leqslant g_{\alpha_k}. \tag{2}$$

Множество k-сочетаний с повторениями вида (1), для которых выполняются неравенства (2), является евклидовым комбинаторным множеством [3]. Поэтому его можно взаимно однозначно отобразить [3] на некоторое множество $\bar{S}_n^k(g) \subset R^k$, элементами которого являются наборы вида (1), удовлетворяющие условиям (2), рассматриваемые как точки арифметического евклидового пространства R^k. Обозначим $\operatorname{conv} S_n^k(g) = \bar{Q}_n^k(g)$ и назовем $\bar{Q}_n^k(g)$ многогранником сочетаний с повторениями. Пусть $I_0 = \varnothing$, $I_n^0 = I_n \cup \{0\}$.

Теорема 1. Точка $x = (x_1, \dots, x_k) \in R^k$ принадлежит многограннику сочетаний с повторениями тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе неравенств

$$g^1 \leqslant x_1; \qquad x_i \leqslant x_{i+1} \ \forall i \in I_{k-1}; \qquad x_k \leqslant g^n. \tag{3}$$

Свойства многогранника сочетаний с повторениями: $\bar{Q}_n^k(g)$ является k-симплексом; $\dim \bar{Q}_n^k(g) = k$, если $n \geqslant 2$; $Q_n^k(g)$ — простой, k-смежностный; при и только при целых g^1, g^n — целочисленный. Если два набора g', g'' такие, что $g' \neq g''$, $|g'| = |g''|$, то многогранники $Q_n^k(g')$, $Q_n^k(g'')$ комбинаторно и f-эквивалентны, а их полуматроиды изоморфны. Множество точек $x = (x_1, \dots, x_k) \in R^k$ является i-гранью многогранника $Q_n^k(g)$ тогда и только тогда, когда оно является решением системы любых $k-i$ уравнений, $i \in I_{k-1}^0$, из набора

$$x_1 = g^1; \qquad x_i = x_{i+1} \ \forall i \in I_{k-1}; \qquad x_k = g^n. \tag{4}$$

Смежными назовем две i-грани S_1^i, S_2^i многогранника M, если они пересекаются по $(i-1)$-грани $S^{i-1}; S^{i-1} = S_1^i \cap S_2^i$, $i \in I_{k-1}$, где $k = \dim M$. Как отмечено выше, i-грань $S^i \subset \overline{Q}_n^k(g)$ является решением системы из $k-i$ уравнений набора (4) с номерами из множества $\Omega^i = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-i}\}$, $\beta_i \in I_{k+1}$, $\beta_l \neq \beta_j$ при $l \neq j$, $l, j \in I_{k-1}$, $i \in I_{k-1}^0$, причем S^i взаимно однозначно определяется множеством Ω^i. Две i-грани S_1^i, S_2^i многогранника $\overline{Q}_n^k(g)$ смежны тогда и только тогда, когда существует $(i-1)$-грань $S^{i-1} \subset \overline{Q}_n^k(g)$, такая, что $\Omega_1^i \cup \Omega_2^i = \Omega^{i-1}$. Если S — гипергрань многогранника $\overline{Q}_n^k(g)$, то все остальные гиперграни смежны с ней. Любые две вершины многогранника сочетаний с повторениями смежны. Точки из $\operatorname{vert} \overline{Q}_n^k(g)$ лежат на сфере

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i - \tau)^2 = r^2, \tag{5}$$

где $r^2 = 0{,}25k(g^n - g^1)^2$, $\tau = 0{,}5(g^1 + g^n)$. Точки множества $\operatorname{vert} \overline{Q}_n^k(g)$ и только они удовлетворяют системе ограничений (3), (5).

Множество $\overline{S}_n^k(g)$ лежит на семействах параллельных гиперплоскостей $\{H(1, j) \ \forall j \in I_n\} = \{x \in R^k \mid x_k = g^j \ \ \forall j \in I_n\}$; $\{H(k+1-\tau, j);\ \forall j \in I_{0,5(n^2+n)}\} = \{x \in R^k \mid x_\tau - x_{\tau+1} = g^m - g^l,\ m \leqslant l \ \ \forall m, l \in I_n\}$, $\tau \in I_{k-1}$, $\{H(k+1, j) \ \forall j \in I_n\} = \{x \in R^k \mid x_1 = g^j \ \ \forall j \in I_n\}$.

Точки множества $\overline{S}_n^k(g)$ принадлежат каждому семейству параллельных гиперплоскостей $D_{|\omega|}(\alpha_1, \dots, \alpha_{|\omega|})$ вида

$$\sum_{i \in \omega} x_i = \sum_{i=1}^{|\omega|} g_{\beta_i},$$

где $(x_1, \dots, x_k) \in R^k$, $(g_{\beta_1}, \dots, g_{\beta_{|\omega|}}) \in S_n^{|\omega|}(g)$, $\omega = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{|\omega|}\} \subset I_k$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$, $i, j \in I_{|\omega|}$, причем $|D_{|\omega|}(\alpha_1, \dots, \alpha_{|\omega|})| \leqslant |\overline{S}_n^{|\omega|}(g)|$.

Точки множества $\overline{S}_n^k(g)$ принадлежат гиперграням набора вложенных и касающихся по $k-1$ гиперграням многогранников $\overline{Q}_{n_i^*}^k(g_i^*)$, $i \in I_\tau^0$; где $n_i^* = n - 2i$, $i \in I_\tau^0$; $g_0^* = g$; $g_i^* = g \setminus (\{g_1, \dots, g_{k \cdot i}\} \cup \{g_{\eta - k \cdot i + 1}, \dots, g_\eta\})$, $i \in I_\tau$; $\tau = [0{,}5(n-1)]$, здесь $[\cdot]$ — целая часть числа.

Полученные свойства множества $\overline{S}_n^k(g)$ и многогранника $\overline{Q}_n^k(g)$ позволяют показать, что если $(x_1^*, \dots, x_k^*) = \arg \min\limits_{x \in \overline{S}_n^k(g)} \sum\limits_{j=1}^{k} c_j x_j$, $c_j \in R^1 \ \forall j \in I_k$, то $x_i^* = g^1 \forall i \in I_s$; $x_i^* = g^n \forall i \in I_k \setminus I_s$; $s \in I_k^0$, где s определяется системой соотношений

$$\sum_{j=1}^{t} c_j \geqslant 0 \ \ \forall t \in I_s; \qquad \sum_{j=1}^{t} c_{s+j} \leqslant 0 \ \ \forall t \in I_{k-s}. \tag{6}$$

Используя последнее утверждение получаем, что

$$\min_{x \in \overline{S}_n^k(g)} \| x - c \|^2 \geqslant k\tilde{g}^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\left(g_1 \sum_{i=1}^{s} c_i + g_\eta \sum_{i=s+1}^{k} c_i\right).$$

где $c = (c_1, \dots, c_k) \in R^k$, s определяется условием (6), а

$$\tilde{g} = g_{\delta_1}, \ |g_{\delta_1}| \leqslant |g_{\delta_i}| \ \ \forall \delta_i \in I_\eta \ \ \forall i \in I_\eta. \tag{7}$$

Изложенное позволяет получить ряд экстремальных свойств выпуклых и сильно выпуклых на некотором множестве $X \subset R^k$, $\bar{S}_n^k(g) \subset X$, функций.

Теорема 2. Пусть $\varphi(x)$ — функция, выпуклая и дифференцируемая на выпуклом замкнутом множестве X, $\bar{S}_n^k(g) \subset X$. Тогда $\forall x \in X$

$$\min_{y \in \bar{S}_n^k(g)} \varphi(y) \geqslant \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + g_1 \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} + g_\eta \sum_{i=s+1}^{k} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i},$$

где $s \in I_k^0$ определяется системой соотношений

$$\sum_{j=1}^{t} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j} \geqslant 0 \quad \forall t \in I_t; \qquad \sum_{j=1}^{t} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{j+s}} \leqslant 0 \quad \forall t \in I_{k-s}. \tag{8}$$

Теорема 3. Чтобы точка $z \in \bar{S}_n^k(g)$ доставляла минимум на множестве $\bar{S}_n^k(g)$ выпуклой дифференцируемой на выпуклом замкнутом множестве X функции $\varphi(x)$, $\bar{S}_n^k(g) \subset X$, достаточно, чтобы

$$\left.\left(g_1 \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} + g_\eta \sum_{i=s+1}^{k} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\right)\right|_{x=z} = (\nabla\varphi(z), z),$$

где $s \in I_k^0$ определяется соотношениями (8).

Пусть $\psi(x)$ — сильно выпуклая функция с параметром $\rho > 0$, определенная на выпуклом замкнутом множестве X, $\bar{S}_n^k(g) \subset X$. Пусть

$$w = (w_1, \ldots, w_k) = \arg\min_{x \in X} \psi(x). \tag{9}$$

Теорема 4. Если функция $\psi(x)$ сильно выпукла с параметром $\rho > 0$ на выпуклом замкнутом множестве X, $\bar{S}_n^k(g) \subset X$, то

$$\min_{x \in \bar{S}_n^k(g)} \psi(x) \geqslant \psi(w) + \rho\left[k\tilde{g}^2 + \sum_{j=1}^{k} w_j^2 - 2\left(g_1 \sum_{j=1}^{s} w_j + g_\eta \sum_{j=s+1}^{k} w_j\right)\right],$$

где w определяется формулой (9), $\tilde{g}$ — (7), а $s \in I_k^0$ — системой

$$\sum_{j=1}^{t} w_j \geqslant 0 \quad \forall t \in I_s; \qquad \sum_{j=1}^{t} w_{s+j} \leqslant 0 \quad \forall t \in I_{k-s}.$$

Теорема 5. Если $\psi(x)$ сильно выпуклая с параметром $\rho > 0$ и дифференцируемая на выпуклом замкнутом множестве X, $\bar{S}_n^k(g) \subset X$, функция, то $\forall x \in X$

$$\min_{y \in \bar{S}_n^k(g)} \psi(y) \geqslant \psi(x) + \rho\left[k\tilde{g}^2 + \sum_{j=1}^{k} x_j^2\right] - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} x_i + g_1 \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - \right.$$

$$\left. - 2\rho x_i\right) + g_\eta \sum_{i=s+1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i\right),$$

где $s \in I_k^0$ определяется системой соотношений

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j} - 2\rho x_j\right) \geqslant 0 \quad \forall t \in I_s; \qquad \sum_{i=1}^{t}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{j+s}} - 2\rho x_{j+s}\right) \leqslant 0 \quad \forall t \in I_{k-s},$$

а $\tilde{g}$ — условием (7).

Кроме универсального подхода к оценке глобальных экстремумов на множестве $\overline{S}^k{}_n(g)$ известных выпуклых и сильно выпуклых функций полученные результаты дают возможность доказывать глобальность, а также оценивать погрешность получаемого на множестве $\overline{S}^k{}_n(g)$ решения при использовании различных алгоритмов [1, 4—6] локальной оптимизации. Отметим, что аналог теорем 2—5 для множества перестановок приведен в [7].

O. A. Yemets

A MULTITUDE OF COMBINATIONS WITH REPETITIONS, REFLECTED IN R^k AND PROPERTIES OF OPTIMIZATION PROBLEMS ON IT

Summary

Combinations with repetitions and extremal properties of purpose functions for some classes of problems on them are investigated.

1. *Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации.— Киев : Наук. думка, 1981.— 288 с.
2. *Каспшицкая М. Ф., Сергиенко И. В.* К вопросу о построении эффективных методов решения некоторых задач организации вычислительного процесса на ЭВМ // Кибернетика.— 1969.— № 4.— С. 67—74.
3. *Стоян Ю. Г.* Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств.— Харьков, 1980.— 22 с.— (Препринт АН УССР / Ин-т пробл. машиностроения; № 85).
4. *Журавлев Ю. И.* Локальные алгоритмы вычисления информации I, II // Кибернетика.— 1965.— № 1.— С. 12—19, № 2.— С. 1—11.
5. *Журавлев Ю. И., Финкельштейн Ю. Ю.* Локальные алгоритмы для задач линейного целочисленного программирования // Проблемы кибернетики.— Вып. 14.— М. : Наука, 1965.— С. 289—295.
6. *Сергиенко И. В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации.— Киев : Наук. думка, 1985.— 382 с.
7. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В.* Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1988, № 5.— С. 68—70.

Харьков, ин-т радиоэлектроники Поступило 24.12.90