Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

УДК 510.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОПОЛОГИЙ НА КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВАХ БИЮНКТИВНЫМИ БУЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

И.Г. Величко, *к.ф.-м.н., доцент*
Таврический государственный агротехнологический университет
wig64@mail.zp.ua
П.Г. Стеганцева, *к.ф.-м.н., доцент*
Запорожский национальный университет
steg_pol@mail.ru
Н. П. Башова,
Запорожский национальный технический университет
adamenk@rambler.ru

Пусть задано n - элементное упорядоченное множество $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$. Каждому из подмножеств данного множества поставим во взаимнооднозначное соответствие булев вектор $(x_1,x_2,...,x_n)$, в котором $x_i=1$, если i-тый элемент множества X принадлежит этому подмножеству, и $x_i=0$, если не принадлежит. Рассмотрим всевозможные наборы подмножеств множества X. Каждому из них поставим в соответствие булеву функцию $f(x_1,x_2,...,x_n)$, область истинности которой задает все подмножества, принадлежащие выбранному набору. Очевидно, что соответствие между множеством всех булевых функций от n-мерных булевых векторов и множеством всех наборов подмножеств n-элементного множества X биективно [1].

Определение 1 *Топологией* на конечном множестве X называется такой набор τ его подмножеств, в который включается $\varnothing$ и все X, а также вместе с любой парой элементов набора в него включается их объединение и пересечение.

Набор подмножеств n-элементного множества является топологией на этом множестве тогда и только тогда, когда булева функция, соответствующая этому набору, удовлетворяет следующим требованиям:

1) В область ее истинности включаются булевы векторы $\left(0,0,\ldots,0\right)$ и $\left(1,1,\ldots,1\right)$, то есть является 0-выполнимой и 1-выполнимой.

2) Вместе с любой парой булевых векторов $\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ и $\left(y_1,y_2,...,y_n\right)$ в область истинности входят булевы векторы $\left(x_1 \vee y_1,x_2 \vee y_2,...,x_n \vee y_n\right)$ и $\left(x_1 \wedge y_1,x_2 \wedge y_2,...,x_n \wedge y_n\right)$, то есть является биюнктивной (это следует из критерия биюнктивности [2]).

Будем называть такую булеву функцию моделью соответствующей топологии.

Введем обозначение $e_i = \left(\underbrace{0,\ldots 0}_{i-1},1,0,\ldots 0\right)$. Тогда определения некоторых топологических понятий можно сформулировать в терминах булевых функций:

- минимальной окрестностью элемента x_i топологии на множестве X, которой соответствует $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, есть конъюнкция всех булевых векторов из области её истинности, на которых этот элемент принимает значение 1, то есть

$$M_{x_i} = \left\{\wedge x \,\middle|\, f\left(x\right)=1 \quad u \quad x \wedge e_i = e_i\right\};$$

- булева функция $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ соответствует T_0-топологии на n-элементном множестве, если

$$(\forall i,j)(\exists x) \quad f\left(\left(x\vee e_i\right)\wedge\bar{e}_j\right)\vee f\left(\left(x\vee e_j\right)\wedge\bar{e}_i\right)=1,$$

где $\bar{e}_i$ - противоположный для e_i булев вектор.

- базой булевой функции, задающей T_0-топологию на n-элементном множестве есть набор из n булевых векторов, которые соответствуют минимальным окрестностям всех ее переменных, и нулевого булева вектора.

Сформулируем в этих терминах **критерий несущественности переменной** [3]: переменная x_i булевой функции будет несущественной тогда и только тогда, когда $f\left(e_i\right)=1$ и для любого булева вектора $x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ из базы B выполняется условие $e_i\wedge x=\theta$, где $\theta=\left(0,\ldots,0\right)$.

Весом булевой функции называют число булевых векторов в ее области истинности [3]. Рассмотрим булевы функции, моделирующие топологии, с весом более 2^{n-1}. Для них справедлива следующая доказанная авторами теорема, дающая полную классификацию таких функций.

Теорема. Булева функция $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ с весом, большим числа 2^{n-1}, лежит в пересечении классов 0-выполнимых, 1-выполнимых и биюнктивных булевых функций тогда и только тогда, когда её база (при необходимости, после перенумерации переменных) имеет вид

1) $B=\left\{\theta,e_1,e_2,\ldots,e_{n-1},e_n\vee x\right\}$, где $x=\bigvee\limits_i e_i$, $1\le i\le n-1$. При этом число существенных переменных функции равно $i+1$;

2) $B=\left\{\theta,e_1,e_2,\ldots,e_k,e_{k+1}\vee e_k,\ldots,e_n\vee e_k\right\}$, $1\le k\le n-2$. При этом функция будет содержать

$\left(n-k+1\right)$ существенных переменных.

3) $B=\left\{\theta, e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1} \vee e_1, e_n \vee e_2\right\}$. При этом существенных переменных будет всегда 4.

В дальнейшем планируется использовать моделирование топологий на конечных множествах биюнктивными булевыми функциями для изучения других свойств этих топологий.

Литература

1. Адаменко Н.П., Величко И.Г. Классификация топологий на конечных множествах с помощью графов // Український математичний журнал. – Київ, 2008, – т.60 –№7.– С.992-996.
2. Тарасов А. В. Обобщение критерия биюнктивности Шефера. // Дискретная математика, 24:2 (2012), 92–99.
3. Яблонский С. В., Введение в дискретную математику. Наука, Москва, 1979. 384с.