Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

УДК 519.6

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ГІБРИДНИХ АЛГОРИТМІВ ДЛЯ ЧАСТКОВОЇ ПРОБЛЕМИ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ

О. В. Чистяков*, аспірант*
Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України
alexej.chystyakov@gmail.com

Розглянемо задачу на власні значення $Ax = \lambda x$, де A – лінійний самоспряжений додатно-визначений оператор, діючий у дійсному n-вимірному евклідовому просторі H зі скалярним добутком (,).

Канонічна ітераційна однокрокова схема знаходження λ_1 та x_1 має вигляд: $B(y_{k+1} - y_k) + \tau_{k+1} r_k = 0$, $k = 0,1,2,3,\ldots$, де y_0 – довільне початкове значення, $r_k = Ay_k - \mu_k y_k$ – нев'язка; $\mu_k = (Ay_k, y_k)(y_k, y_k)^{-1}$ – наближення до власного значення; y_k – нормоване наближення до власного вектора, τ_κ – ітераційний параметр; B – оператор, що покращує швидкість ітераційного процесу та для якого легко знаходиться обернений.

Для вибору передобумовлювача застосуємо до вихідної матриці попередньо метод паралельних перерізів, який приводить вихідну матрицю до блочно-діагонального вигляду з обрамленням: $\hat{A} = P^T AP$, де P – матриця перестановок, а блоки D_i і C_i зберігають розрідженість. Таким чином, початкова задача зведеться до наступної: $\hat{A}y = \lambda y$, $x = Py$.

Для поперемінно-трикутного методу передобумовлювач має вигляд: $B = (E + \omega\hat{R})(E + \omega\hat{R}^{\mathrm{T}})$, $\hat{A} = \hat{R} + \hat{R}^{\mathrm{T}}$, $\hat{R}$ зберігає блочно-трикутну структуру, успадковану від матриці $\hat{A}$.

Для розподілу матриць по процесах гібридного комп'ютера використовується блочна схема. З огляду на структуру $\hat{R}$ це означає, що процеси з номерами $0 \le i < p$ зберігають блоки $\tilde{D}_i$

та C_i, а процес з номером p–1 зберігає блок $\tilde{D}_p$. Тут p – загальна кількість процесів CPU гібридного комп'ютера.

Паралельний гібридний алгоритм визначається блочно-трикутною структурою матриць $\hat{R}_i$ при розв'язанні системи

$$Bw = r\,,\ B = (E + \omega\hat{R})(E + \omega\hat{R}^T),\quad \hat{A} = \hat{R} + \hat{R}^T\ .$$

Паралельний алгоритм розв'язання нижньої трикутної системи $(E + \omega\hat{R})y = r$ зводиться до одночасного і незалежного виконання на окремих процесах розв'язування трикутних систем: $(E + \omega\tilde{D}_q)y_q = r_q$, $1 \le q < p$ та наступного обчислення $\tilde{y}_q$: $\tilde{y}_q = C_q y_q$, $0 \le q < p$, де q – номер графічного прискорювача (GPU), після чого останній процес сумує значення $\tilde{y}_q$, надіслані від інших GPU і знаходить $y_{p:}$, розв'язуючи систему $(E + \omega\tilde{D}p)y_p = r_p \quad - \sum_{q=1}^{p-1} \tilde{y}_q$.

Аналогічно для знаходження розв'язку системи $(E + \omega R^T)w = y$, спочатку p-й процес розв'язує систему $(E + \omega\tilde{D}_p^{\mathrm{T}})w_p = y_p$ і розсилає компоненти w_p іншим процесам, а потім одночасно та незалежно на окремих процесах розв'язуються системи: $(E + \omega\tilde{D}_q^{\mathrm{T}})w_q = y_q - C_q^{\mathrm{T}} w_p$.

Враховуючи те, що всі арифметичні операції в основному виконуються на GPU, для прискорення та ефективності алгоритму справедливі такі співвідношення:

$$S_p \approx p\left(1 + \frac{p}{3n}\tau_o + \frac{4p^2}{9n^2}\tau_c\right)^{-1} \text{ та } \quad E_p \approx \left(1 + \frac{p}{3n}\tau_o + \frac{4p^2}{9n^2}\tau_c\right)^{-1},$$

де p – загальна кількість процесів, n – кількість ненульових елементів, $\tau_o = t_0 / t$ та $\tau_c = t_c / t$, t – час виконання однієї арифметичної операції, t_0 – час обміну одним машинним словом, t_c – час однієї синхронізації процесів.

Отримані оцінки дають змогу стверджувати, що гібридний алгоритм забезпечує високе прискорення. Наявність у дільниках комунікаційних складових величини n^2 сприяє зменшенню частки часу, необхідного на обміни та синхронізацію процесів при великих порядках системи.

В табл. 1 приведено часові характеристики знаходження найменшого власного значення на гібридному комп'ютері ІНПАРКОМ_G (4 обчислювальні вузли, на кожному − 2 процесори Xeon 5606, 2 GPU Tesla M2090) розробленим алгоритмом для тестових матриць з Флоридської колекції [3].

Таблиця 1. Часові характеристики гібридного алгоритму, сек

Гібридний поперемінно-трикутний алгоритм						
Задача	CPU			CPU + GPU		
	1 Core	8 Core	32 Core	1GPU	4 GPU	8 GPU
Bone	423,8	55,76	18	67,06	17,86	11,91
bmwcra	820,74	115,27	34,05	117,42	30,78	18,77
Emilia	1185,52	173,07	46,95	161,08	44,32	26,07

З табл. 1 видно, що за гібридним алгоритмом найбільше прискорення при використанні 32 процесів у порівнянні з послідовним алгоритмом одержано від 18 до 22 разів. Використання одного GPU дає прискорення обчислень в 6 – 7 разів, а при масштабування гібридного комп'ютера до 8 графічних прискорювачів − в 35 – 45 разів.

Література

1. Приказчиков В.Г., Химич А.Н. Итерационные методы решения задач устойчивости и колебания пластин и оболочек. // Прикладная механика. – 1984. – том 20, №. 1. – С. 88 − 94.
2. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. – М.: Мир, 1984. – 334 с.
3. The University of Florida Sparse Matrix Collection. http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices.