

ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ

Навчально-науковий інститут денної освіти
Форма навчання денна
Кафедра комп'ютерних наук та інформаційних технологій

Допускається до захисту
Завідувач кафедри
_____ Олена ОЛЬХОВСЬКА
(підпис)

«___» _____ 202_ р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на тему

**СТВОРЕННЯ НАВЧАЛЬНОГО ІНСТРУМЕНТУ ДИСТАНЦІЙНОГО
КУРСУ «ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА» З ТЕМИ «ДЕКАРТОВИЙ
ДОБУТОК. МУЛЬТИМНОЖИНИ. ОПЕРАЦІЇ НАД
МУЛЬТИМНОЖИНАМИ» ТА ЙОГО ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ.**

зі спеціальності 122 Комп'ютерні науки
освітня програма «Комп'ютерні науки»
ступеня магістра

Виконавець роботи Матвійшин Назар Ігорович
_____ «___» _____ 202_ р.
(підпис)

Науковий керівник к. ф.-м. н., доцент, Парфьонова Тетяна Олександрівна
_____ «___» _____ 202_ р.
(підпис)

Рецензент _____

ПОЛТАВА 2023

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ, ТЕРМІНІВ	3
ВСТУП.....	4
1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ РОЗРОБКИ.....	6
2. ІНФОРМАЦІЙНИЙ ОГЛЯД	7
2.1. Огляд існуючих навчальних інструментів	7
3. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА.....	11
3.1. Декартовий добуток.....	11
3.2. Поняття множини.....	21
3.3. Алгоритм навчального інструменту з теми «Декартовий добуток. Мультимножини. Операції над мультимножинами»	28
3.4. Блок-схема навчального інструменту	33
4. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА.....	34
4.1. Опис програмної реалізації.....	34
4.2. Інструкція по використанню навчального інструменту	38
4.3. Обґрунтування вибору програмних засобів.....	45
ВИСНОВКИ.....	46
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	47
ДОДАТОК А. КОД ПРОГРАМИ	50

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ, ТЕРМІНІВ

Умовні позначення, символи, скорочення, терміни	Пояснення умовних позначень, скорочень, символів
Boolean	Це тип даних, який може мати два можливих значення: True або False. Використовується для зберігання результатів логічних виразів або умов.
isTrue	Це змінна, яка може приймати значення типу Boolean.
Console.WriteLine	Призначений для виведення текстової інформації на екран для користувача або для відладки програми
CType	Це оператор в мові програмування Visual Basic, який використовується для зміни типу даних (приведення типів).
ByVal	Використовується при оголошенні параметрів функцій або підпрограм
CheckBox1	Назва об'єкта чекбокса (CheckBox) в середовищі розробки Visual Basic.
Enabled	Якщо властивість Enabled встановлена в True, то елемент інтерфейсу (наприклад, кнопка, текстове поле чи чекбокс) активний і може реагувати на взаємодію з користувачем.

ВСТУП

У кожному періоді історії, коли світ зазнає випробувань вогню війни, освіта виявляється найціннішим знаряддям, яке може допомогти суспільству встояти в обличчя темряви та неспокою. Війна ставить перед собою безліч викликів, включаючи нестабільність, загрозу життю та знищення інфраструктури. Саме в таких найважчих часах освіта виявляється необхідним інструментом, який сприяє виживанню та відродженню суспільства.

Однак, навіть в умовах військових конфліктів, коли здобуття знань стає складнішим завданням, важливість освіти не зменшується. Вона перетворюється на важливий інструмент для збереження культурної спадщини, розуміння минулого та готовності до будь-яких випробувань майбутнього. У своєму корінному визначенні освіта стає вогнетривким вогнищем, яке освітлює темряву, що обгортає суспільство під час війни.

Навчальні тренажери в цій ситуації виявляються невід'ємною частиною освітнього процесу в умовах війни. Вони дозволяють здобувати практичні навички та знання, не виходячи за межі безпеки приміщення. Такі тренажери стають ефективним засобом навчання, дозволяючи студентам вдосконалювати свої здібності та засвоювати нові концепції, навіть в умовах віддаленості від звичайного освітнього середовища. [2]

Мета кваліфікаційної роботи – Створення навчального інструменту дистанційного курсу «Дискретна математика» з теми «Декартовий добуток. Мультимножини. Операції над мультимножинами» та його програмна реалізація.

Об'єкт розробки – алгоритмізація, побудова блок-схеми, програмна реалізація програмного забезпечення навчального інструменту з теми «Декартовий добуток. Мультимножини. Операції над мультимножинами».

Предмет розробки – навчальна програма-інструмент з теми «Декартовий добуток. Мультимножини. Операції над мультимножинами».

Кваліфікаційна робота складається з чотирьох розділів. У першому розділі надано огляд задачі, яку необхідно вирішити для розробки навчального інструменту. У другому розділі висвітлено основні аспекти концепції множин. Третій розділ присвячено теоретичному аспекту теми, що охоплює декартовий добуток, а також детальний розгляд алгоритму та блок-схеми функціонування навчального інструменту. У четвертому розділі висвітлено процес програмної реалізації навчального інструменту та надано інструкції для користувача. Обсяг пояснювальної записки: 50 стор., в т.ч. основна частина – 41 стор., джерела – 20 назв.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ РОЗРОБКИ

Основним завданням кваліфікаційної роботи є створення дистанційного курсу "Дискретна математика" з фокусом на темі "Декартовий добуток. Мультимножини. Операції над мультимножинами".

Мета дослідження включає в себе наступні завдання:

1. Аналіз теоретичного матеріалу, пов'язаного з темою "Декартовий добуток. Мультимножини. Операції над мультимножинами".
2. Розробка алгоритму для оптимального функціонування навчального інструменту.
3. Створення блок-схеми, яка ілюструє роботу навчального інструменту.
4. Написання програмного коду для втілення функціоналу навчального інструменту.
5. Підготовка звіту, що включає опис результатів впровадження навчального інструменту.

У процесі розробки навчального інструменту передбачено введення наступних вікон:

1. Початкове вікно тренажера, яке містить інформацію про тему курсу, кнопку "Почати", а також поля для введення даних студента та наукового керівника магістерської роботи.
2. На подальших етапах користувачам будуть представлені тестові питання з теми курсу, де студент повинен вибрати правильну або неправильну відповідь.
3. У заключному вікні тренажера, що відкривається після завершення тренінгу, користувач отримує повідомлення про успішне завершення: "Ви успішно пройшли навчальний інструмент з теми "Декартовий добуток. Мультимножини. Операції над мультимножинами" дистанційного курсу "Дискретна математика".

2. ІНФОРМАЦІЙНИЙ ОГЛЯД

2.1. Огляд існуючих навчальних інструментів

При розробці даної системи, враховано наукові підходи, які на сьогодні склалися в теорії тестування, – тести, орієнтовані на критерій (критеріально-орієнтовані) і тести, орієнтовані на норму (нормативно-орієнтовані). Ці два підходи відіграють важливу роль у процесі створення тестів. Підготовлений тест необхідно експериментально апробувати та вивірити. Показників, які характеризують тест з тієї чи іншої точки зору, досить багато. Зазвичай виділяють: ступінь важкості, валідність, надійність, простоту, однозначність. Ступінь важкості визначається відношенням $Q = W/N$, де W – кількість неправильних відповідей, N – загальна кількість студентів, що беруть участь у тестуванні. Найважчі та найлегші запитання вилучаються із тесту та перефразовуються. Для виміру ступеня оволодіння матеріалом на кожному рівні може використовуватися коефіцієнт $K = P1/P2$, де $P1$ – кількість правильно виконаних завдань у процесі тестування, $P2$ – загальна кількість завдань у тесті ($0 \leq K \leq 1$). При $K < 0,7$ рекомендується продовжувати керування процесом навчання, при $K \geq 0,7$ керування процесом навчання не обов'язкове. Перевагою використання комп'ютерних тестів є їх інтерактивність, яка дозволяє студенту здійснювати самоконтроль, що сприяє творчій активності майбутнього фахівця.

Приведемо приклад розробленої нами комп'ютерної системи тестування знань і вмінь студентів при вивченні деяких розділів курсу “Вища математика” (матрична алгебра, векторна алгебра, аналітична геометрія та ін.). Для спрощення процесу інсталяції програма розроблена в середовищі Microsoft Excel на вбудованій мові програмування Visual Basic for Application, що дозволяє використовувати її на більшості персональних комп'ютерів (рис. 1).

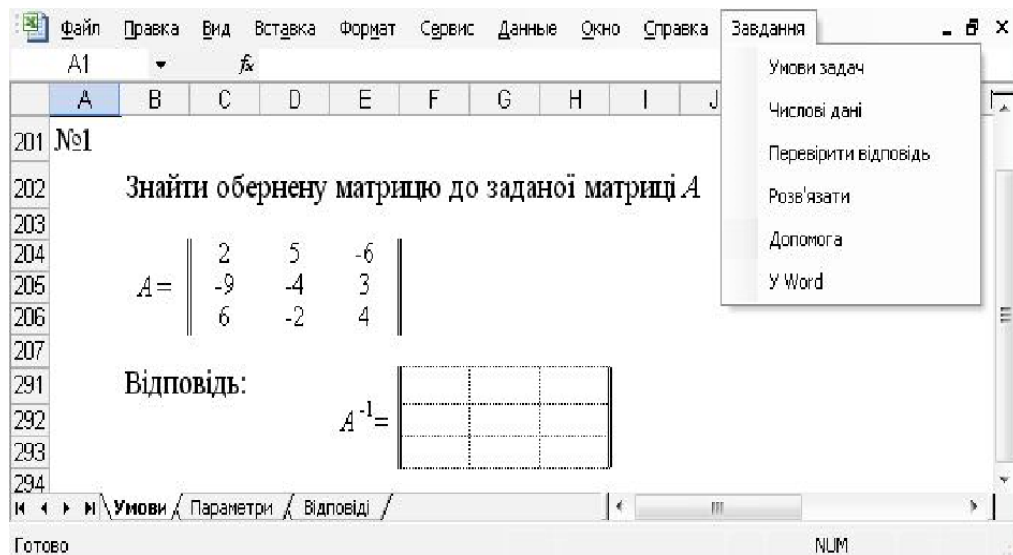


Рисунок 1 - Загальний вигляд та система меню програми.

Розглянемо особливості розробленої системи. По-перше, програма формує завдання не з бази даних, а з бази знань. Це означає, що немає наперед заготовлених викладачем тестових запитань та правильних відповідей, кожне завдання формується за певним алгоритмом (рис. 2), який дозволяє запрограмувати, в залежності від вхідних параметрів, цілу множину прикладів.

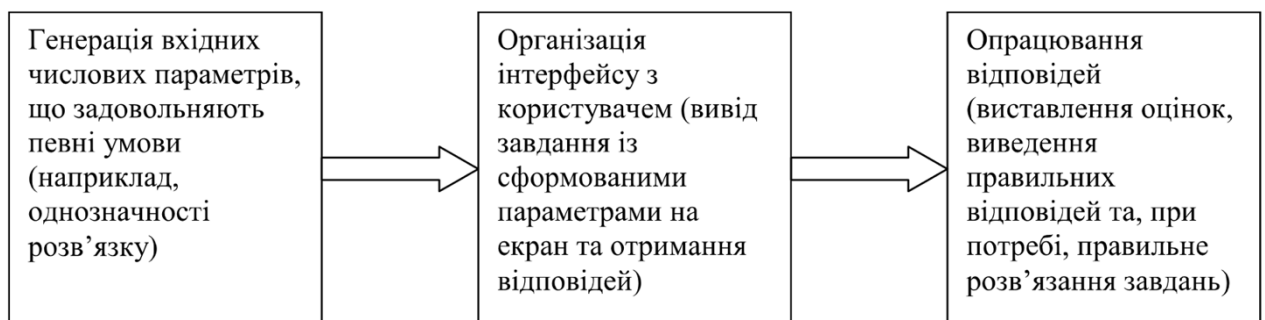


Рисунок 2 – Загальна схема роботи програми.

По-друге, так як кожне завдання формується Це дозволяє використовувати комп'ютерну систему не лише для автоматично, то програма “вміє” знаходити правильні відповіді, перевірки знань, а й для навчання та самонавчання студентів з а також виводити повне розв'язання математичної задачі (рис. 3). вказаних розділів вищої математики.

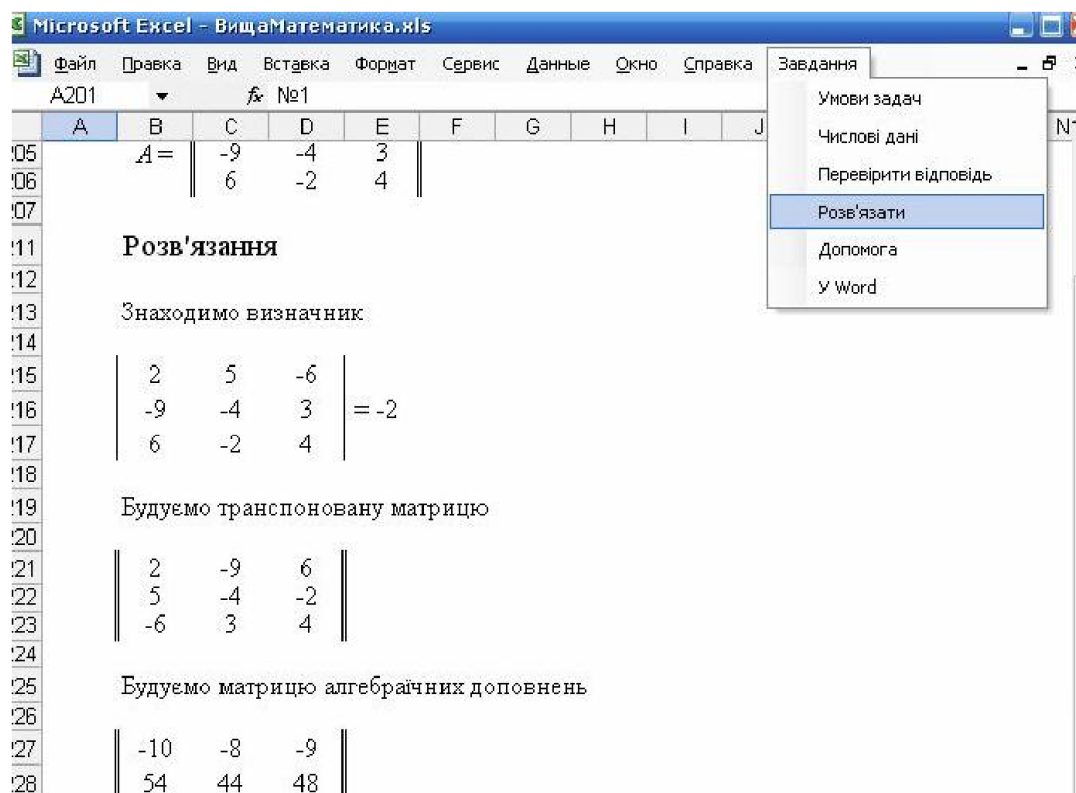


Рисунок 3 - Пункт “Розв’язати” системи меню програми.

По-третє, комп’ютерна програма може використовуватися при варіантів, відбирати типи задач, задавати деякі параметри (розформуванні варіантів контрольних, модульних та екзаменацій- мірність задачі, цілочисловість розв’язку і т.д.). Програма сформує них робіт із використанням формалізованих типів задач (рис. 4). задану кількість варіантів та збереже їх в документі Microsoft Word, При цьому викладач має можливість вказувати загальну кількість також будуть збережені правильні відповіді до завдань.

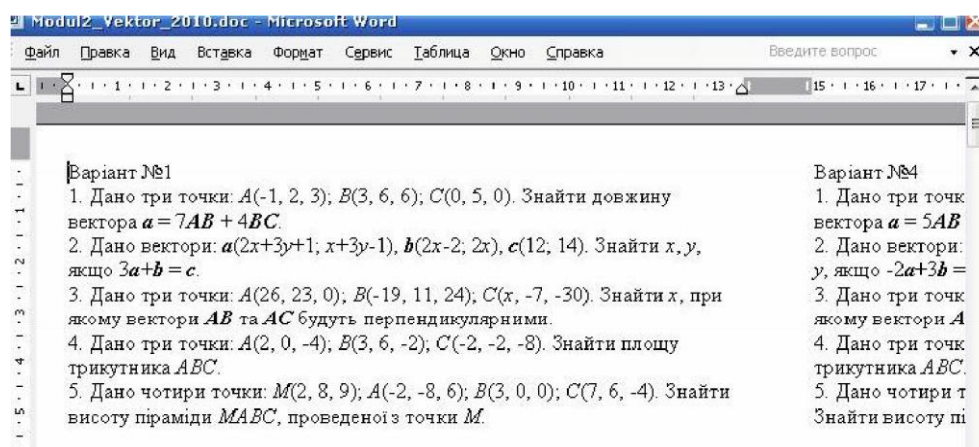


Рисунок 4 - Приклад автоматичного формування модульної роботи по темі “Векторна алгебра”

Розроблена комп'ютерна система формує завдання від кількох запропонованих). При формуванні неправильних відкритого типу (відповіддю є одне або декілька чисел, які вводить антів відповідей потрібно враховувати можливі типові помилки, студент). Подальшим розвитком системи буде також формування що часто допускають студенти при розв'язуванні математичних завдань закритого типу (вибір однієї правильної відповіді із задач вказаних типів.

3. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

3.1. Декартовий добуток

Упорядкованою парою об'єктів x та y (позначається $\langle x, y \rangle$) будемо називати сукупність двох об'єктів (не обов'язково різних), які розташовані у певному порядку. Поняття упорядкованої пари можна поширити й розглядати для будь-якого цілого додатного числа $n \geq 2$ упорядковану n -ку об'єктів $x_1, \dots, x_n$ (позначається $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$). Об'єкт x_i називається i -м компонентом упорядкованої n -ки. Упорядковані n -ки називають також *кортежами*.

Декартовим добутком множин A та B (позначається $A * B$ або $A \times B$) називається множина

$$A \times B = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B \},$$

тобто множина усіх упорядкованих пар, побудованих з елементів множин A та B таким чином, що перший компонент кожної пари – це елемент множини A , а другий – елемент множини B .

Наприклад, декартовим добутком множин $A = \{a, b\}$ та $B = \{1, 2, 3\}$ є множина $A \times B = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle b, 3 \rangle \}$. Побудуємо декартів добуток множин B та A . Маємо: $B \times A = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle \}$. Як бачимо, $A \times B \neq B \times A$, отже, операція $\times$ не комутативна.

Декартовим добутком множин $A_1, \dots, A_n$ (позначається $A_1 \times \dots \times A_n$ або $A_1 * \dots * A_n$) називається множина

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{ \langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n \},$$

тобто множина усіх упорядкованих n -ок, побудованих з елементів множин $A_1, \dots, A_n$ таким чином, що i -й компонент кожної n -ки належить множині A_i ($i = 1, \dots, n$).

Наприклад, декартовим добутком множин $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{b, c\}$, $A_3 = \{b, d\}$ є множина $A_1 \times A_2 \times A_3 = \{ \langle a, b, b \rangle, \langle a, b, d \rangle, \langle a, c, b \rangle, \langle a, c, d \rangle, \langle b, b, b \rangle, \langle b, b, d \rangle, \langle b, c, b \rangle, \langle b, c, d \rangle \}$.

Якщо для деякого i ($i=1, \dots, n$) $A_i = \emptyset$, то $A_1 \times \dots \times A_n = \emptyset$.

Якщо $A_1 = \dots = A_n = A$, то $A_1 \times \dots \times A_n$ позначається A^n й називається n -м декартовим степенем множини A .

Наприклад, якщо $A = \{1, 2\}$, то $A^3 = \{ \langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 1, 1, 2 \rangle, \langle 1, 2, 1 \rangle, \langle 1, 2, 2 \rangle, \langle 2, 1, 1 \rangle, \langle 2, 1, 2 \rangle, \langle 2, 2, 1 \rangle, \langle 2, 2, 2 \rangle \}$.

Між операцією декартова добутка та іншими операціями над множинами існують зв'язки. Доведемо, зокрема, що $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$. Для цього покажемо спочатку, що $(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$. Множина $(A \cup B) \times C$ є декартовим добутком двох множин ($(A \cup B)$ та C), отже, елементи цієї множини – це упорядковані пари. Таким чином, маємо: $\langle x, y \rangle \in (A \cup B) \times C \Rightarrow x \in A \cup B, y \in C \Rightarrow x \in A$ або $x \in B, y \in C \Rightarrow x \in A$ та $y \in C$ або $x \in B$ та $y \in C \Rightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C$ або $\langle x, y \rangle \in B \times C$, отже, доведено, що $(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$. Тепер покажемо, що $(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$. $\langle x, y \rangle \in (A \times C) \cup (B \times C) \Rightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times C)$ або $\langle x, y \rangle \in (B \times C) \Rightarrow (x \in A \text{ та } y \in C)$ або $(x \in B \text{ та } y \in C)$. Розглянемо випадок $x \in A$ та $y \in C$. Маємо: $x \in A$ та $y \in C \Rightarrow x \in A \cup B, y \in C \Rightarrow \langle x, y \rangle \in (A \cup B) \times C$. Якщо $x \in B$ та $y \in C$, то маємо: $x \in B$ та $y \in C \Rightarrow x \in (A \cup B), y \in C \Rightarrow \langle x, y \rangle \in (A \cup B) \times C$. Отже, у кожному випадку доведено, що $(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$. Таким чином, рівність виконується.

Термін «відношення» застосовується у математиці для позначення певного зв'язку між об'єктами. Відношенням R , заданим на множинах A та B , називається довільна підмножина декартова добутка A та B , тобто $R \subseteq A \times B$. Запис xRy означає $\langle x, y \rangle \in R$. Іноді будемо задавати відношення на множинах A та B у вигляді $xRy \Leftrightarrow P(x, y)$, де $P(x, y)$ – твердження, яке є необхідною й достатньою умовою того, що $\langle x, y \rangle \in R$.

Наприклад, множина $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 5 \rangle \}$ є відношенням, заданим на множинах $A = \{1, 2, 3\}$ та $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, оскільки $R \subseteq A \times B$, а множина $C = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle \}$ не є відношенням, заданим на множинах A та B , тому що $C \not\subseteq A \times B$. Прикладом відношення, заданого на множинах $\mathbf{N}$ та $\mathbf{Z}$, є множина $M = \{ \langle n, z \rangle \mid n \in \mathbf{N},$

$z \in \mathbf{Z}$, $n=|z|$ }, що складається з упорядкованих пар чисел виду $\langle n, n \rangle$ або $\langle n, -n \rangle$, де $n \in \mathbf{N}$. Легко переконатися, що $M \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$.

У випадку рівних множин A та B відношення, задане на A та B , називають *бінарним відношенням, заданим на множині A* (або бінарним відношенням на множині A). Таким чином, бінарне відношення, задане на деякій множині A , – це довільна підмножина множини A^2 .

Прикладом бінарного відношення, заданого на множині $\mathbf{N}$, є множина $\{\langle n_1, n_2 \rangle \mid n_1 \in \mathbf{N}, n_2 \in \mathbf{N}, n_1 < n_2\}$, яка складається з упорядкованих пар невід’ємних цілих чисел таких, що перше число пари менше за друге, тобто дане відношення описує той зв’язок між числами, який ми звикли називати «...менш, ніж...». Іншим прикладом бінарного відношення на множині $\mathbf{N}$ є множина $\{\langle n, m \rangle \mid n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}, n \text{ та } m \text{ – парні числа}\}$. Прикладом бінарного відношення, заданого на множині людей, є множина $\{\langle l_1, l_2 \rangle \mid l_1, l_2 \text{ – люди, } l_1 \text{ – брат } l_2\}$, яка описує такий тип родинного зв’язку, як «бути братом». Наступний приклад бінарного відношення – відношення включення, задане на булеані деякої множини A . Позначимо це відношення символом $\subseteq$, тоді $\subseteq = \{\langle S, T \rangle \mid S, T \in P(A), S \subseteq T\}$. Якщо, наприклад, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, то упорядкована пара множин $\langle \{2, 4\}, \{1, 2, 4\} \rangle$ належить відношенню включення, оскільки $\{2, 4\} \subseteq \{1, 2, 4\}$, а упорядкована пара $\langle \{1, 2\}, \{2, 3, 4\} \rangle$ – ні, тому що $\{1, 2\} \not\subseteq \{2, 3, 4\}$.

Бінарне відношення на множині A виду $\{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$ називається *відношенням тотожності* на A , або *діагоналлю* множини A , й позначається i_A . Елементи відношення i_A назвемо *діагональними елементами*, або *діагональними парами*.

Прикладом відношення тотожності є відношення $\{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle\}$, задане на множині $A = \{a, b, c, d\}$. Відношення $R = \{\langle a, a \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle\}$ не є діагоналлю множини A , оскільки містить не усі пари виду $\langle x, x \rangle$, побудовані з елементів множини A ($\langle b, b \rangle \notin R$).

Розглянемо узагальнення поняття відношення, заданого на двох множинах. Відношенням R , заданим на множинах $A_1, \dots, A_n$, називається довільна підмножина декартова добутка множин $A_1, \dots, A_n$, тобто $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$.

Наприклад, множина $R = \{ \langle a, 2, f \rangle, \langle c, 4, t \rangle, \langle b, 2, n \rangle, \langle c, 2, f \rangle \}$ є відношенням, заданим на множинах $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{f, g, n, m, t\}$, оскільки, як неважко переконатися, $R \subseteq A \times B \times C$. Множина $X = \{ \langle 1, 2, 3 \rangle, \langle a, b, c \rangle \}$ не є відношенням, заданим на множинах A, B, C , тому що X не є підмножиною множини $A \times B \times C$.

У випадку, коли $A_1 = \dots = A_n = A$, відношення, задане на множинах $A_1, \dots, A_n$, називають n -арним відношенням, заданим на множині A . Зрозуміло, що n -арне відношення, задане на множині A , – це довільна підмножина множини A^n . Для значень $n=1$ та $n=3$ (як й для $n=2$) існують спеціальні назви відповідних відношень. Так, при $n=1$ відношення називається *унарним*, або *властивістю* на множині A ; при $n=3$ відношення називається *тернарним*.

Наприклад, множина $S = \{ \langle n, m, k \rangle \mid n, m, k \in \mathbf{N}, k = n + m \}$ є тернарним відношенням на множині $\mathbf{N}$, оскільки $S \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ (вираз $n, m, k \in \mathbf{N}$ використано для скорочення запису й означає $n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{N}$). Дане відношення складається з тих упорядкованих трійок невід’ємних цілих чисел, у яких число, що є третім компонентом, – це сума чисел, що стоять на першому й другому місцях трійки. Таким чином, трійка $\langle 2, 5, 7 \rangle$ належить S , а трійка $\langle 3, 4, 5 \rangle$ – ні. Множина $P = \{ x \mid x \text{ – людина, } x \text{ – студент} \}$ є унарним відношенням, заданим на множині людей, й задає властивість «бути студентом».

Нехай R_1, R_2 – відношення, задані на множинах $A_1, \dots, A_n$. Об’єднанням відношень R_1 та R_2 (позначається $R_1 \cup R_2$) називається множина $R_1 \cup R_2 = \{ \langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R_1 \text{ або } \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R_2 \}$. Перетином відношень R_1 та R_2 (позначається $R_1 \cap R_2$) називається множина

$R_1 \cap R_2 = \{ \langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R_1, \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R_2 \}$. Різницею відношень R_1 та R_2 (позначається $R_1 \setminus R_2$) називається множина $R_1 \setminus R_2 = \{ \langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R_1, \langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R_2 \}$. Доповненням відношення R_1 (позначається R_1') називається множина $R_1' = A_1 \times \dots \times A_n \setminus R_1$, тобто $R_1' = \{ \langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in A_1 \times \dots \times A_n, \langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R_1 \}$. Вираз $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R_1'$ означає, що $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R_1$ (при цьому, звичайно, $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in A_1 \times \dots \times A_n$, але для скорочення запису це твердження опускають).

Нехай, наприклад, $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{a, b, c\}$, R_1, R_2 – відношення, задані на множинах A_1 та A_2 , й $R_1 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, c \rangle \}$, $R_2 = \{ \langle 1, b \rangle, \langle 3, c \rangle, \langle 3, a \rangle \}$. Тоді:

$$R_1 \cup R_2 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, c \rangle, \langle 3, a \rangle \},$$

$$R_1 \cap R_2 = \{ \langle 1, b \rangle, \langle 3, c \rangle \},$$

$$R_1 \setminus R_2 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle \},$$

$$R_1' = \{ \langle 1, c \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 3, a \rangle, \langle 3, b \rangle \}.$$

Розглянемо дві операції, визначені для відношень, заданих на двох множинах. Нехай відношення R задано на множинах A та B . Відношенням, *оберненим до R* (позначається R^{-1}), називається відношення, задане на множинах B та A , виду $R^{-1} = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R \}$.

Нехай, наприклад, $A = \{a, c, e\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $R \subseteq A \times B$ й $R = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \langle c, 3 \rangle, \langle c, 5 \rangle, \langle e, 5 \rangle \}$. Тоді $R^{-1} = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 3, a \rangle, \langle 3, c \rangle, \langle 5, c \rangle, \langle 5, e \rangle \}$.

Відношенням, *оберненим до відношення $\subseteq$* , заданого на булеані деякої множини A , є відношення, задане на булеані множини A , виду $\{ \langle S, T \rangle \mid \langle T, S \rangle \in \subseteq \}$, тобто множина упорядкованих пар $\langle S, T \rangle$ підмножин множини A таких, що $T \subseteq S$, або $S \supseteq T$. Отже, відношенням, *оберненим до $\subseteq$* , є відношення $\supseteq$.

Нехай R_1 – відношення, задане на множинах A та B , а R_2 – відношення, задане на множинах B та C . *Добутком* (або *композицією*) відношень R_1 та R_2 (позначається $R_1 * R_2$ або $R_1 \circ R_2$) називається відношення, задане на множинах A та C , виду $R_1 * R_2 = \{ \langle x, y \rangle \mid \text{для деякого } z \in B \langle x, z \rangle \in R_1, \langle z, y \rangle \in R_2 \}$.

$\langle z, y \rangle \in R_2\}$. Іншими словами, добуток відношень R_1 та R_2 складається з таких упорядкованих пар $\langle x, y \rangle$, які «побудовані» з пар виду $\langle x, z \rangle$ та $\langle z, y \rangle$, що належать відповідно відношенням R_1 та R_2 .

Наприклад, нехай $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, $R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$, $R_1 = \{\langle a, 3 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle\}$, $R_2 = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 6 \rangle\}$. Тоді добуток R_1 та R_2 – це відношення, задане на множинах A та C , виду $R_1 * R_2 = \{\langle a, 6 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle c, 2 \rangle\}$. Розглянемо тепер відношення $R_3 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle d, 1 \rangle\}$, задане на множинах A та B , й обчислимо $R_3 * R_2$. Оскільки відношення R_3 та R_2 не містять пар виду $\langle x, z \rangle$ та $\langle z, y \rangle$, тобто таких пар, що другий компонент першої пари (тієї, що належить відношенню R_3) збігається з першим компонентом другої пари (тієї, що належить відношенню R_2), пар виду $\langle x, y \rangle$ утворити не можна, отже, $R_3 * R_2 = \emptyset$.

Теорема 5. Нехай R, R_1, R_2, R_3 – бінарні відношення на множині A . Тоді:

- | | |
|---|--|
| 1) $(R^{-1})^{-1} = R$, | 2) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$, |
| 3) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$, | 4) $(R^{-1})' = (R')^{-1}$, |
| 5) $(R_1 \setminus R_2)^{-1} = R_1^{-1} \setminus R_2^{-1}$, | 6) $R \cup R = R \cap R = R$, |
| 7) $R_1 * (R_2 \cup R_3) = (R_1 * R_2) \cup (R_1 * R_3)$, | 8) $(R_1 \cup R_2) * R_3 = (R_1 * R_3) \cup (R_2 * R_3)$. |
| 9) $(R_1 * R_2) * R_3 = R_1 * (R_2 * R_3)$, | 10) $(R_1 * R_2)^{-1} = R_2^{-1} * R_1^{-1}$. |

Доведемо рівність 4. Використовуючи означення доповнення відношення та означення відношення, оберненого до даного, маємо: $\langle x, y \rangle \in (R^{-1})' \Rightarrow \langle x, y \rangle \notin R^{-1} \Rightarrow \langle y, x \rangle \notin R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R' \Rightarrow \langle x, y \rangle \in (R')^{-1}$. Отже, $(R^{-1})' \subseteq (R')^{-1}$. Покажемо, що $(R')^{-1} \subseteq (R^{-1})'$. $\langle x, y \rangle \in (R')^{-1} \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R' \Rightarrow \langle y, x \rangle \notin R \Rightarrow \langle x, y \rangle \notin R^{-1} \Rightarrow \langle x, y \rangle \in (R^{-1})'$. Отже, показали, що $(R^{-1})' = (R')^{-1}$.

Доведемо останню рівність. Використовуючи означення відношення, оберненого до даного, та означення добутку відношень, маємо: $\langle x, y \rangle \in (R_1 * R_2)^{-1} \Rightarrow \langle y, x \rangle \in (R_1 * R_2) \Rightarrow$ існує такий елемент z з множини A , що $\langle y, z \rangle \in R_1$ та $\langle z, x \rangle \in R_2 \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R_2^{-1}$, $\langle z, y \rangle \in R_1^{-1} \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R_2^{-1} * R_1^{-1}$. Отже, $(R_1 * R_2)^{-1} \subseteq R_2^{-1} * R_1^{-1}$. Покажемо, що $R_2^{-1} * R_1^{-1} \subseteq (R_1 * R_2)^{-1}$. $\langle x, y \rangle \in R_2^{-1} * R_1^{-1} \Rightarrow$

існує такий елемент z з множини A , що $\langle x, z \rangle \in R_2^{-1}$ та $\langle z, y \rangle \in R_1^{-1} \Rightarrow \langle z, x \rangle \in R_2$, $\langle y, z \rangle \in R_1 \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 * R_2 \Rightarrow \langle x, y \rangle \in (R_1 * R_2)^{-1}$. Таким чином, доведено, що $R_2^{-1} * R_1^{-1} \subseteq (R_1 * R_2)^{-1}$, отже, рівність 10 доведено.

Бінарне відношення R на множині A називається *симетричним*, якщо $\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$. Пару виду $\langle y, x \rangle$ назвемо *оберненою* до пари виду $\langle x, y \rangle$.

Наприклад, нехай на множині $A = \{a, b, c, d\}$ задано відношення $R = \{\langle b, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle a, d \rangle, \langle c, b \rangle, \langle d, a \rangle\}$. Неважко перевірити безпосередньо, що з кожною парою виду $\langle x, y \rangle$ відношення R містить пару виду $\langle y, x \rangle$ (до пари $\langle b, c \rangle$ у відношенні є обернена пара $\langle c, b \rangle$ й навпаки, до пари $\langle a, d \rangle$ – пара $\langle d, a \rangle$, пара $\langle d, d \rangle$ збігається з оберненою до неї), отже, R симетричне. Симетричним є відношення $B = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \text{ – брати}\}$, задане на множині людей. Дійсно, $\langle x, y \rangle \in B \Rightarrow x, y \text{ – брати} \Rightarrow y, x \text{ – брати} \Rightarrow \langle y, x \rangle \in B$, тобто умова симетричності для відношення B виконується. Відношення $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \text{ – брат } y\}$, задане на множині людей, не є симетричним, оскільки з того, що $\langle x, y \rangle \in R$, не випливає, що $\langle y, x \rangle \in R$, адже не обов'язково y є братом x , коли x є братом y (y може виявитися сестрою x). Не є симетричним й відношення $\{\langle b, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$, задане на множині A , тому що воно не містить пари, оберненої до пари $\langle b, c \rangle$.

Бінарне відношення R на множині A назвемо *антисиметричним*, якщо $\langle x, y \rangle \in R$, $\langle y, x \rangle \in R \Rightarrow x = y$, тобто якщо R містить пару виду $\langle x, y \rangle$, яка складається з різних елементів, то R не містить обернену до неї пару виду $\langle y, x \rangle$.

Наприклад, відношення $R = \{\langle c, d \rangle, \langle a, a \rangle, \langle c, c \rangle, \langle b, a \rangle\}$, задане на множині $A = \{a, b, c, d\}$, антисиметричне, оскільки кожна пара, що належить відношенню разом з оберненою до неї парою, складається з однакових елементів ($\langle a, a \rangle \in R$, $\langle a, a \rangle \in R \Rightarrow a = a$; $\langle c, c \rangle \in R$, $\langle c, c \rangle \in R \Rightarrow c = c$). Антисиметричним є також відношення $Q = \{\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle b, c \rangle\}$ на множині A , тому що Q не містить жодної пари виду $\langle x, y \rangle$ такої, що x та y різні й

$\langle y, x \rangle$ належить Q (тобто умова антисиметричності не порушується для Q). Відношення $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$ на A не антисиметричне, тому що $\langle a, b \rangle \in R$, $\langle b, a \rangle \in R$, але $a \neq b$. Антисиметричним є відношення $\geq$ на множині $\mathbf{N}$, оскільки $n \geq m$, $m \geq n \Rightarrow n = m$. Відношення $>$ теж є антисиметричним на $\mathbf{N}$, тому що коли $n > m$, то m не може бути більше, ніж n , отже, умова антисиметричності не порушується для відношення $>$ (адже якщо пари виду $\langle n, m \rangle$ та $\langle m, n \rangle$ не можуть одночасно належати відношенню $>$, то їм вимагати виконання умови $n = m$ не потрібно). Відношення $B = \{\langle x, y \rangle \mid x, y - \text{брати}\}$ на множині людей не є антисиметричним, оскільки з того, що $\langle x, y \rangle \in B$ та $\langle y, x \rangle \in B$ не випливає, що $x = y$ (адже коли $x, y - \text{брати}$ та $y, x - \text{брати}$, то це не означає, що x та $y - \text{одна й та сама людина}$).

Відношення R на множині A називається *асиметричним*, якщо $\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \notin R$, тобто для жодної пари, що належить асиметричному відношенню, у цьому відношенні не існує оберненої пари.

Наприклад, відношення $\{\langle b, d \rangle, \langle c, a \rangle\}$ на множині A асиметричне (містить пару $\langle b, d \rangle$, але не містить обернену до неї пару, тобто $\langle d, b \rangle$; містить пару $\langle c, a \rangle$, але не містить обернену до неї пару $\langle a, c \rangle$). Відношення $\{\langle b, d \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, a \rangle\}$ на A не асиметричне, тому що разом з парою $\langle a, c \rangle$ містить обернену до неї пару $\langle c, a \rangle$. Відношення $\{\langle a, b \rangle, \langle c, c \rangle\}$ на A також не асиметричне, бо разом з парою $\langle c, c \rangle$ містить обернену до неї пару $\langle c, c \rangle$.

Відношення R на множині A називається *рефлексивним*, якщо для будь-якого $x \in A$ $\langle x, x \rangle \in R$, тобто $i_A \subseteq R$.

Наприклад, відношення $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$, задане на множині $A = \{1, 2, 3\}$, є рефлексивним, оскільки містить усі діагональні пари множини A . Рефлексивним є відношення $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \text{ та } y - \text{однолітки}\}$, задане на множині людей, тому що твердження « x та $x - \text{однолітки}$ » істинне для будь-якого x з множини людей, отже, R містить усі пари виду $\langle x, x \rangle$. Прикладом нерефлексивного відношення на множині A є $\{\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$, оскільки воно містить не усі діагональні пари

множини A (у відношенні немає пари $\langle 2,2 \rangle$). Відношення $\{\langle x,y \rangle \mid x \text{ та } y - \text{студенти}\}$ на множині людей не рефлексивне, оскільки твердження « x та x – студенти» істинне не для кожного x з множини людей, а тільки для тих x , які є студентами (адже не усі люди є студентами).

Відношення R на множині A називається *антирефлексивним* (або *іррефлексивним*), якщо для усіх x з A $\langle x,x \rangle \notin R$, тобто R не містить жодної діагональної пари множини A .

Наприклад, відношення $\{\langle 1,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 2,3 \rangle\}$ на множині $\{1,2,3\}$ антирефлексивне, оскільки не містить жодної діагональної пари. Антирефлексивним є відношення $\{\langle x,y \rangle \mid x \text{ та } y - \text{брати}\}$ на множині людей, оскільки твердження « x та x – брати» хибне для будь-якого x (адже жодна людина не може бути братом самої себе), отже, дане відношення не містить жодної діагональної пари. Прикладом не антирефлексивного відношення є відношення $R = \{\langle x,y \rangle \mid x \text{ ділиться на } y\}$ на множині $\mathbf{N}^+$. Зрозуміло, що R містить діагональні пари (твердження « x ділиться на x » істинне для будь-якого $x \in \mathbf{N}^+$). Відношення $\{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle\}$ на множині $\{1,2\}$ не антирефлексивне, бо містить діагональну пару $\langle 1,1 \rangle$.

Відношення R на множині A називається *транзитивним*, якщо $\langle x,y \rangle \in R, \langle y,z \rangle \in R \Rightarrow \langle x,z \rangle \in R$. Зрозуміло, що відношення R не транзитивне тоді й тільки тоді, коли для деяких x, y, z з множини A одночасно виконуються умови: $\langle x,y \rangle \in R, \langle y,z \rangle \in R, \langle x,z \rangle \notin R$.

Наприклад, відношення $\{\langle 2,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$, задане на множині $A = \{1,2,3\}$, транзитивне, оскільки разом з парами $\langle 2,3 \rangle$ та $\langle 3,2 \rangle$ містить пару $\langle 2,2 \rangle$, разом з парами $\langle 2,3 \rangle$ та $\langle 3,3 \rangle$ містить пару $\langle 2,3 \rangle$, разом з парами $\langle 2,2 \rangle$ та $\langle 2,3 \rangle$ містить пару $\langle 2,3 \rangle$, разом з парами $\langle 2,2 \rangle$ та $\langle 2,2 \rangle$ містить пару $\langle 2,2 \rangle$, разом з парами $\langle 3,2 \rangle$ та $\langle 2,3 \rangle$ містить пару $\langle 3,3 \rangle$, разом з парами $\langle 3,2 \rangle$ та $\langle 2,2 \rangle$ містить пару $\langle 3,2 \rangle$, разом з парами $\langle 3,3 \rangle$ та $\langle 3,2 \rangle$ містить пару $\langle 3,2 \rangle$, разом з парами $\langle 3,3 \rangle$ та $\langle 3,3 \rangle$ містить пару $\langle 3,3 \rangle$. Таким чином, для кожного набору пар виду $\langle x,y \rangle, \langle y,z \rangle$, що належать даному відношенню, існує пара виду $\langle x,z \rangle$, яка теж належить

цьому відношенню. Відношення $\{<1,2>, <1,3>\}$ на множині A також транзитивне, оскільки не існує такого набору пар виду $<x,y>$, $<y,z>$, що $<x,y>\in R$ й $<y,z>\in R$, а $<x,z>\notin R$. Транзитивним є й відношення $R=\{<x,y> \mid x,y - \text{парні числа}\}$ на множині $\mathbf{N}$. Дійсно, нехай $<x,y>\in R$ й $<y,z>\in R$, тобто x,y – парні числа та y,z – парні числа. Зрозуміло, що тоді x,z – парні числа, тобто $<x,z>\in R$. Прикладом не транзитивного відношення на множині A є $R=\{<2,1>, <1,2>, <2,2>\}$, оскільки R містить пари $<1,2>$ та $<2,1>$, але не містить пари $<1,1>$. Відношення $\{<x,y> \mid x - \text{дідусь } y\}$ на множині людей не транзитивне, оскільки з того, що x є дідусем y , а y є дідусем z не випливає, що x є дідусем z .

Теорема 6. Нехай R – бінарне відношення на множині A . Тоді:

- а) якщо R симетричне, то $R=R^{-1}$;
- б) якщо R рефлексивне та транзитивне, то $R*R=R$.

Доведемо твердження а). Покажемо спочатку, що коли R симетричне, то $R\subseteq R^{-1}$. Нехай $<x,y>\in R$. Оскільки R симетричне, то $<y,x>\in R$. Використовуючи визначення відношення, оберненого до даного, маємо $<x,y>\in R^{-1}$, що й треба було довести. Покажемо тепер, що $R^{-1}\subseteq R$. Нехай $<x,y>\in R^{-1}$. Тоді $<y,x>\in R$. З симетричності R випливає, що $<x,y>\in R$. Таким чином, $R^{-1}\subseteq R$. Отже, $R^{-1}=R$.

Доведемо твердження б). Нехай $<x,y>\in R*R$. Це означає, що у множині A існує такий елемент z , що $<x,z>\in R$ та $<z,y>\in R$. Але R транзитивне, тому $<x,y>\in R$, тобто $R*R\subseteq R$. Покажемо, що $R\subseteq R*R$. Нехай $<x,y>\in R$. Оскільки R рефлексивне, то $<y,y>\in R$, отже, $<x,y>\in R*R$, тобто $R\subseteq R*R$. Таким чином, $R=R*R$.

3.2. Поняття множини

Теорія множин як математична дисципліна створена німецьким математиком Г.Кантором. Згідно з його визначенням, множиною є довільне зібрання певних об'єктів нашої інтуїції або інтелекту, які розрізняються між собою, що уявляється як єдине ціле. Ці об'єкти називаються елементами, або членами множини. Зауважимо, що формулювання поняття множини не накладає жодних обмежень на природу предметів, що входять у множину. Множина може складатися, наприклад, з білих лебедів, чорних автомобілів, парних чисел. Відмітимо також, що канторівське формулювання дає змогу розглядати множини, елементи яких з тієї чи іншої причини не можна точно вказати (наприклад, множина усіх раціональних чисел, множина зірок Всесвіту). Фраза «об'єкти, що розрізняються між собою» з канторівського визначення множини означає, що для будь-яких двох предметів, які вважаються елементами множини, має бути спосіб вирішити являються вони різними чи однаковими. Слово «певний» розуміють у тому сенсі, що коли дано деяку множину та деякий предмет, то можна визначити, чи є цей предмет елементом даної множини.

Множина може бути задана явно або неявно. Якщо об'єктів, що складають множину, небагато, множина задається явно шляхом перерахування цих об'єктів (а точніше, їх імен).

Щойно описана форма подання множин не є зручною, коли треба задати множину, що містить багато елементів, й зовсім неприйнятна, коли мова йде про множину, у якій нескінченно багато елементів. Для таких випадків використовують подання множини у формі $\{t(x_1, \dots, x_n) | P(x_1, \dots, x_n)\}$. Тут n – ціле додатне число, $t(x_1, \dots, x_n)$ – вираз (послідовність символів), роль якого – показати, який вигляд мають елементи заданої множини, $P(x_1, \dots, x_n)$ – твердження, яке задає необхідну й достатню умову належності об'єкта множині, $x_1, \dots, x_n$ – змінні, роль яких – позначати у $t(x_1, \dots, x_n)$ та $P(x_1, \dots, x_n)$ місця, на які підставляються імена конкретних об'єктів при побудові елементів заданої множини або при перевірці, чи

належить даний об'єкт заданій множині, причому місця, позначені однаковими змінними, «займають» одні й ті самі імена. Якщо нас не цікавить будова елементів множини, будемо використовувати вираз x замість $t(x_1, \dots, x_n)$. Вираз $P(x_1, \dots, x_n)$ може бути простим або складеним реченням природної мови, рівністю, нерівністю тощо. Взагалі під $P(x_1, \dots, x_n)$ будемо розуміти скінченну послідовність зі слів, математичних виразів та символів $x_1, \dots, x_n$ таку, що якщо кожне входження x_i ($i=1, \dots, n$) у цю послідовність замінити одним й тим самим іменем деякого об'єкту, то в результаті матимемо висловлення, тобто таке твердження, яке можна охарактеризувати як істинне або хибне. Іноді сполучник «та» («й») у виразі $P(x_1, \dots, x_n)$ будемо замінювати комою. Описаний спосіб подання множини називається неявним.

Наведемо приклади множин, заданих неявно: $\{x \mid x \text{ — зірка Всесвіту}\}$ — множина, елементами якої є ті й тільки ті об'єкти, що являються зірками Всесвіту; $\{n \mid n \text{ — натуральне парне число}\}$ — множина, яка містить ті й тільки ті натуральні числа, що є парними; $\{n \mid n \text{ — непарне число й } n \text{ ділиться на } 5\}$ — множина непарних чисел, кратних п'яти, будь-яке число, що не має зазначених властивостей, не належить даній множині; $\{(x, y) \mid x, y \text{ — дійсні числа}\}$ — множина, що складається з двійок дійсних чисел й тільки з них; можна також сказати, що це множина усіх точок декартової площини.

Множина може мати ім'я. Зазвичай імена множин позначаються великими латинськими літерами, що можуть мати індекси. На письмі ім'я множини розміщується перед множиною й між ними ставиться знак «= $\Rightarrow$ ». Наприклад, запис $A=\{a, b, c, d\}$ означає, що множині $\{a, b, c, d\}$ дано ім'я A . Ім'я множини можна використовувати замість самої множини. Одній й тій самій множині можна дати кілька імен. Деякі множини мають усталені імена (позначення). Так, множина усіх невід'ємних цілих чисел позначається N , усіх додатних цілих чисел — N^+ , множини усіх цілих, раціональних, дійсних чисел мають імена відповідно Z , Q , R .

Одна й та сама множина може бути задана явно й неявно. Наприклад, нехай $A = \{x \mid x - \text{додатне ціле число, } x \leq 10, x \text{ парне}\}$. Можемо знайти усі такі числа, що задовольняють задані умови, отже, й задати множину A явно: $A = \{2, 4, 6, 8\}$.

Нехай A та B – множини. Будемо говорити, що A *включається* у B , або A є *підмножиною* B (й позначати $A \subseteq B$), якщо кожен елемент множини A є елементом множини B , тобто для кожного x , якщо $x \in A$, то $x \in B$. Використовується також й позначення $B \supseteq A$, що означає « B включає A » (або « B є надмножиною A »). Наприклад, $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$, оскільки кожне ціле число є раціональним; $\mathbf{R} \supseteq \mathbf{Z}$, тому що кожне ціле число є дійсним числом; множина $A = \{2, 4, 1\}$ є підмножиною множини $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, оскільки для елементів 2, 4, 1 множини A виконується: $2 \in B$, $4 \in B$, $1 \in B$. Якщо для множин A та B твердження $A \subseteq B$ не є істинним, будемо писати $A \not\subseteq B$. Наприклад, $\mathbf{Q} \not\subseteq \mathbf{Z}$, оскільки не кожне раціональне число є цілим; якщо $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{b, c, d\}$, то $X \not\subseteq Y$, тому що множина X містить такий елемент (а саме, елемент a), якого немає у множині Y , тобто не кожен елемент множини X є елементом множини Y (так само, як не кожен елемент множини Y належить множині X , отже, $Y \not\subseteq X$). Якщо увести позначення: $(\forall x)$ – «для кожного x » (або «для довільного x »), $\Rightarrow$ – «впливає» (або «слідуює»), $\Leftrightarrow$ – «тоді й тільки тоді, коли», то визначення включення множин можна записати таким чином: $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x) x \in A \Rightarrow x \in B$.

Очевидно, що для будь-якої множини X виконується $X \subseteq X$. Доведемо, що для будь-яких множин X, Y, Z $X \subseteq Y$, $Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$. Для цього достатньо показати, що $(\forall x) x \in X \Rightarrow x \in Z$. При доведенні будемо використовувати те, що $X \subseteq Y$ та $Y \subseteq Z$. Отже, нехай $x \in X$. Оскільки $X \subseteq Y$, то $x \in Y$, але $Y \subseteq Z$, а тому $x \in Z$. Таким чином, ми показали, що для довільного x $x \in X \Rightarrow x \in Z$. Коротко побудоване міркування можна записати так: $x \in X \Rightarrow x \in Y \Rightarrow x \in Z$.

Назвемо множини X та Y *рівними* (й позначимо $X = Y$), якщо $X \subseteq Y$ та $Y \subseteq X$, тобто $X = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$ та $Y \subseteq X$. Наприклад, множини $A = \{3, 7, 2\}$ та

$B=\{7,2,3\}$ рівні, тому що $A\subseteq B$ та $B\subseteq A$, оскільки для елементів множини A маємо: $3\in B$, $7\in B$, $2\in B$, а для елементів множини B маємо: $7\in A$, $2\in A$, $3\in A$. Якщо умова рівності множин X та Y не виконується (тобто $X\not\subseteq Y$ або $Y\not\subseteq X$), то будемо говорити, що множини X та Y не рівні й писати $X\neq Y$. Наприклад, якщо $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{d,f,a\}$, то $X\neq Y$, оскільки $X\not\subseteq Y$ (а також $Y\not\subseteq X$); множини $\{1,2,3\}$ та $\mathbf{N}$ не рівні, оскільки $\mathbf{N}\not\subseteq \{1,2,3\}$ (хоча $\{1,2,3\}\subseteq \mathbf{N}$).

Множина X називається *власною підмножиною* множини Y , або X *строго включається* в Y (позначається $X\subset Y$), якщо $X\subseteq Y$, але $X\neq Y$, тобто $X\subset Y \Leftrightarrow X\subseteq Y$ та $X\neq Y$. Наприклад, якщо $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, то $A\subset B$, оскільки для елементів множини A маємо: $a\in B$, $b\in B$, $c\in B$, отже, $A\subseteq B$, але $B\not\subseteq A$, тому $B\neq A$. Також $\mathbf{Z}\subset \mathbf{Q}$, оскільки не кожне раціональне число є цілим (й тому $\mathbf{Q}\not\subseteq \mathbf{Z}$), тобто $\mathbf{Z}\neq \mathbf{Q}$, хоча $\mathbf{Z}\subseteq \mathbf{Q}$.

Через $\emptyset$ позначимо множину, що не містить жодного елементу, тобто $(\forall x) x\notin \emptyset$. Така множина називається *порожньою* множиною. З визначення порожньої множини випливає, що $\emptyset\subseteq A$ для будь-якої множини A . Дійсно, оскільки $\emptyset$ не має елементів, то умова $x\in \emptyset \Rightarrow x\in A$ не порушується для жодного x . Зауважимо, що множина $\{\emptyset\}$ не є порожньою, оскільки містить один елемент (порожню множину), отже, $\emptyset\neq \{\emptyset\}$, але $\emptyset\in \{\emptyset\}$. Для множини $A=\{a,b,c\}$ маємо $\emptyset\notin A$, тому що серед елементів множини A немає елемента $\emptyset$.

Об'єднанням множин A та B (позначається $A\cup B$) називається множина усіх об'єктів, що є елементами множини A або B , тобто

$$A\cup B = \{x \mid x\in A \text{ або } x\in B\}.$$

Тут сполучник «або» використовується у тому розумінні, що елемент множини $A\cup B$ може належати обом множинам (A та B).

Наведемо приклади об'єднання множин. Нехай $A=\{1,4,5,8,9\}$, $B=\{3,4,6\}$. Тоді $A\cup B=\{1,3,4,5,6,8,9\}$. Елемент 4 з об'єднання $A\cup B$ належить обом множинам A та B , кожен з інших елементів з $A\cup B$ належить лише

одній з цих множин. Розглянемо тепер $A \cup A$. За визначенням об'єднання множин маємо: $A \cup A = A$. Дійсно, жоден елемент, що не належить множині A , не може належати й множині $A \cup A$. Нехай $A = \{x \mid x \text{ – натуральне парне число}\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, x < -5\}$. Тоді $A \cup B$ – це множина, елементами якої є усі від'ємні цілі числа, менші ніж -5, й усі натуральні парні числа.

Перетином множин A та B (позначається $A \cap B$) називається множина усіх об'єктів, що є елементами обох множини A й B , тобто

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ та } x \in B\}.$$

Нехай, наприклад, $A = \{2, 5, 6, 8, 0\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Тоді $A \cap B = \{5, 6\}$, оскільки елементи 5 та 6 й тільки вони є спільними для множин A та B . Розглянемо множини $C = \{1, 2, 3\}$ та $D = \{4, 5, 6\}$. Очевидно, не існує жодного елемента, який би належав як множині C , так й множині D . Отже, множина $C \cap D$ не містить жодного елемента, тобто є порожньою: $C \cap D = \emptyset$. Розглянемо перетин множин $X = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x < 100\}$ та $Y = \{x \mid x \text{ – непарне додатне число}\}$. $X \cap Y$ – це множина непарних додатних чисел, що не перевищують 100.

Будемо говорити, що множини A та B *не перетинаються*, якщо $A \cap B = \emptyset$. Наприклад, не перетинаються множина від'ємних цілих чисел та множина натуральних парних чисел. Якщо $A \cap B \neq \emptyset$, то множини A та B є такими, що *перетинаються*. Наприклад, множини $\mathbf{Z}$ та $\mathbf{N}$ є такими, що перетинаються, оскільки вони мають спільні елементи.

Різницею множин A та B (позначається $A \setminus B$) називається множина, що складається з тих елементів множини A , які не належать множині B , тобто

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

Наприклад, якщо $A = \{2, 5, 6, 8\}$, $B = \{3, 5, 8, 9, 0\}$, то $A \setminus B = \{2, 6\}$. Нехай $X = \{1, 3, 4, 6\}$, $Y = \{4, 5, 6, 1, 2, 3\}$; тоді $X \setminus Y = \emptyset$, оскільки у множині X немає таких елементів, які б не належали Y . Нехай P – множина усіх непарних

натуральних чисел, тоді $\mathbb{N}P$ – це множина усіх невід’ємних парних цілих чисел.

Абсолютним доповненням (доповненням) множини A (позначається A') називається множина тих об’єктів, які не належать множині A , тобто

$$A' = \{x \mid x \notin A\}.$$

Множина $B \setminus A$ називається ще відносним доповненням множини A до множини B .

Покажемо, що $B \setminus A = B \cap A'$. Для цього треба довести, що $B \setminus A \subseteq B \cap A'$ та $B \cap A' \subseteq B \setminus A$. Покажемо, що $B \setminus A \subseteq B \cap A'$. Використовуючи визначення операцій різниці, перетину множин та операції доповнення множини, маємо: $x \in B \setminus A \Rightarrow x \in B$ та $x \notin A \Rightarrow x \in B$ та $x \in A' \Rightarrow x \in B \cap A'$, отже, доведено, що $x \in B \setminus A \Rightarrow x \in B \cap A'$, а це означає, що $B \setminus A \subseteq B \cap A'$. Тепер покажемо, що $B \cap A' \subseteq B \setminus A$: $x \in B \cap A' \Rightarrow x \in B$, $x \in A' \Rightarrow x \notin A$, отже, $x \in B \setminus A$, отже, $x \in B \cap A' \Rightarrow x \in B \setminus A$.

Симетричною різницею множин A та B (позначається $A \Delta B$ або $A + B$) називається множина, елементи якої належать або тільки множині A , або тільки множині B , але не обом множинам A та B , тобто

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Наприклад, нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 6, 7\}$, тоді $A \Delta B = \{1, 2, 6, 7\}$. Якщо $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 < x < 101\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 100\}$, то $A \Delta B = \{0, 1, 100\}$.

Розглянемо ще кілька прикладів доведення тверджень про множини.

I. Доведемо, що якщо $A \subseteq B$, то $A \cap C \subseteq B \cap C$ (або, більш коротко, $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$) для будь-яких множин A, B, C .

Нам треба показати, що $A \cap C \subseteq B \cap C$ за умови $A \subseteq B$. Іншими словами, при доведенні включення $A \cap C \subseteq B \cap C$ ми можемо використовувати не лише загальні відомості про множини (такі, наприклад, як означення підмножини, операцій над множинами), а й те, що $A \subseteq B$. Отже, нехай $x \in A \cap C$. Тоді, виходячи з означення операції перетину множин, маємо:

$x \in A$ та $x \in C$. Оскільки $A \subseteq B$, то з $x \in A$ випливає $x \in B$. Тепер з того, що $x \in B$ та $x \in C$, випливає $x \in B \cap C$.

II. Доведемо, що для будь-яких множин A та B

$$A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap B' \subseteq C.$$

Для доведення треба показати, що $A \subseteq B \cup C \Rightarrow A \cap B' \subseteq C$ та $A \cap B' \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cup C$. Покажемо спочатку, що $A \subseteq B \cup C \Rightarrow A \cap B' \subseteq C$. Для цього доведемо включення $A \cap B' \subseteq C$, користуючись тим, що $A \subseteq B \cup C$. Отже, нехай $x \in A \cap B'$. Звідси маємо: $x \in A$ та $x \in B'$ (тобто $x \notin B$). Оскільки $A \subseteq B \cup C$, то $x \in B \cup C$, отже, $x \in B$ або $x \in C$. Але раніше ми одержали, що $x \notin B$. Тоді залишається тільки можливість $x \in C$. Таким чином, ми показали, що $x \in A \cap B' \Rightarrow x \in C$, а це означає, що $A \cap B' \subseteq C$. Далі доведемо, що $A \cap B' \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cup C$. Для доведення треба показати, що $A \subseteq B \cup C$ за умови $A \cap B' \subseteq C$. Нехай $x \in A$. Якщо B – довільна множина, то $x \in B$ або $x \notin B$. Розглянемо кожен з цих випадків. Нехай $x \in B$. Тоді з означення операції об'єднання множин випливає, що x є елементом множини, яка є об'єднанням множини B з будь-якою множиною. Отже, $x \in B \cup C$. Розглянемо тепер другий випадок, тобто $x \notin B$. Тоді $x \in B'$, а оскільки $x \in A$, то $x \in A \cap B'$. Але відомо, що $A \cap B' \subseteq C$, значить $x \in C$, звідки випливає, що $x \in B \cup C$. Коротко доведення можна записати таким чином.

$$(\Rightarrow) x \in A \cap B' \Rightarrow x \in A, x \in B' \Rightarrow x \in A, x \notin B \Rightarrow x \in B \cup C, x \notin B \Rightarrow x \in B \text{ або } x \in C, x \notin B \Rightarrow x \in C.$$

$$(\Leftarrow) x \in A \Rightarrow x \in A, x \in B \text{ або } x \notin B \Rightarrow 1) x \in A, x \in B \text{ або } 2) x \in A, x \notin B.$$

$$1) x \in A, x \in B \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in B \cup C.$$

$$2) x \in A, x \notin B \Rightarrow x \in A, x \in B' \Rightarrow x \in A \cap B' \Rightarrow x \in C \Rightarrow x \in B \cup C.$$

Доведення завершено.

Якщо усі множини, що розглядаються при розв'язанні якоїсь задачі або при якихось міркуваннях, є підмножинами деякої множини U , то таку множину U називають *універсальною множиною* (універсумом). Наприклад, для елементарної арифметики універсальною множиною є $\mathbf{Z}$.

Для графічного зображення підмножин деякої універсальної множини U використовують так звані діаграми Венна, або кола Ейлера. Діаграма Венна є схематичним зображенням множин у вигляді точкових множин: універсальна множина зображується множиною точок деякого прямокутника, а її підмножина A – у вигляді кола або якоїсь іншої простої області усередині цього прямокутника. Доповнення множини A (до U) зображується тією частиною прямокутника, що лежить за межами кола, що зображує A . Множини, що не перетинаються, зображуються областями, що не перекриваються. Якщо $A \subseteq B$, то на діаграмі Венна та область, що зображує множину A , цілком лежить усередині області, що зображує множину B . Діаграми Венна є корисним допоміжним засобом при вивченні операцій над множинами.

3.3. Алгоритм навчального інструменту з теми «Декартовий добуток. Мультимножини. Операції над мультимножинами»

1. Що таке Декартовий добуток двох множин?

- а) Сума елементів обох множин
- б) Множина всіх можливих пар елементів, де перший елемент з першої множини, а другий - з другої
- в) Різниця елементів двох множин

Правильна відповідь: б

2. Якщо множина A має 3 елементи, а множина B - 4 елементи, скільки елементів у їх декартовому добутку?

- а) 7
- б) 12
- в) 34

Правильна відповідь: б

3. Що таке мультимножина?

- a) Множина, у якій дозволені повторення елементів
- b) Множина, у якій всі елементи унікальні
- c) Множина, у якій елементи впорядковані за зростанням

Правильна відповідь: а

4. Яка операція використовується для об'єднання двох мультимножин?

- a) Об'єднання
- b) Перетин
- c) Декартовий добуток

Правильна відповідь: а

5. Як позначається об'єднання мультимножин A і B ?

- a) $A + B$
- b) $A \cap B$
- c) $A \cup B$

Правильна відповідь: с

6. Що таке перетин мультимножин?

- a) Мультимножина, що складається з елементів, які належать обом мультимножинам
- b) Мультимножина, у якій всі елементи повторюються двічі
- c) Мультимножина, яка не містить жодних елементів

Правильна відповідь: а

7. Як позначається перетин мультимножин A і B ?

- a) $A * B$
- b) $A \cap B$
- c) $A \cup B$

Правильна відповідь: b

8. Як виглядає різниця мультимножин A і B ?

- a) $A - B$
- b) $A \cap B$
- c) $A \cup B$

Правильна відповідь: а

9. Чому дорівнює різниця мультимножин $\{1, 2, 2, 3, 4\}$ і $\{2, 4\}$?

- a) $\{1, 3\}$
- b) $\{1, 2, 2, 3\}$
- c) $\{1, 2, 3, 4\}$

Правильна відповідь: а

10. Як називається операція, що визначає кількість входжень елемента у мультимножину?

- a) Потужність
- b) Кількість
- c) Множинність

Правильна відповідь: с

11. Якщо $A = \{1, 2, 3\}$ і $B = \{3, 4, 5\}$, то як виглядає їх симетрична різниця?

- a) $\{1, 2, 4, 5\}$
- b) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- c) $\{1, 2\}$

Правильна відповідь: а

12. Якою буквою або значком позначають множину натуральних чисел?

- a) Z
- b) N

c) Q

Правильна відповідь: b

13. Множину цілих чисел позначають буквою?

a) Z

b) N

c) Q

Правильна відповідь: a

14. Знайдіть множину C – спільних дільників чисел 24 і 32

a) $C = \{1; 2; 3; 8\}$

b) $C = \{1; 2; 8\}$

c) $C = \{1; 2; 4; 8\}$

Правильна відповідь: c

15. Нехай $M = \{5; 6; 8; 12\}$, $N = \{5; 6\}$. Знайти $C = M \setminus N$

a) $C = \{8; 12\}$

b) $C = \{5; 6\}$

c) $C = \{5; 6; 8; 12\}$

Правильна відповідь: c

16. Чи рівні множини А-множина рівносторонніх трикутників, В-множина трикутників, кожен кут якого дорівнює 30°?

a) Ні

b) Так

c) Умова хибна

Правильна відповідь: a

17. Що використовується для геометричної ілюстрації множин?

a) Еліпси

- b) Круги Ейлера
 - c) Квадрати Малевича
- Правильна відповідь: b

18. Якій операції над множинами відповідає вираз "Елемент, що належить отриманій множині, належить множині А АБО множині В.":

- a) Доповнення множини А до В
 - b) Перетин множин
 - c) Об'єднання множин
- Правильна відповідь: c

19. Із 27 учнів класу 15 займаються спортом, а 18 – музикою. Деякі з тих, які займаються і музикою, і спортом, ходять до театрального гуртка. Яке найбільше учнів можуть відвідувати театральний гурток?

- a) 6
- b) 10
- c) 25

Правильна відповідь: a

20. Чи рівні множини $\{(1;7)\}$ і $\{(7;1)\}$?

- a) Умова хибна
- b) Ні
- c) Так

Правильна відповідь: b

Після завершення останнього питання, користувач переходить на останню сторінку навчального інструменту, де написано: «Ви успішно пройшли навчальний інструмент з теми «Декартовий добуток. Мультимножини. Операції над мультимножинами» дистанційного курсу «Дискретна математика».

3.4. Блок-схема навчального інструменту

Блок-схема тренажера (рис. 3.1)

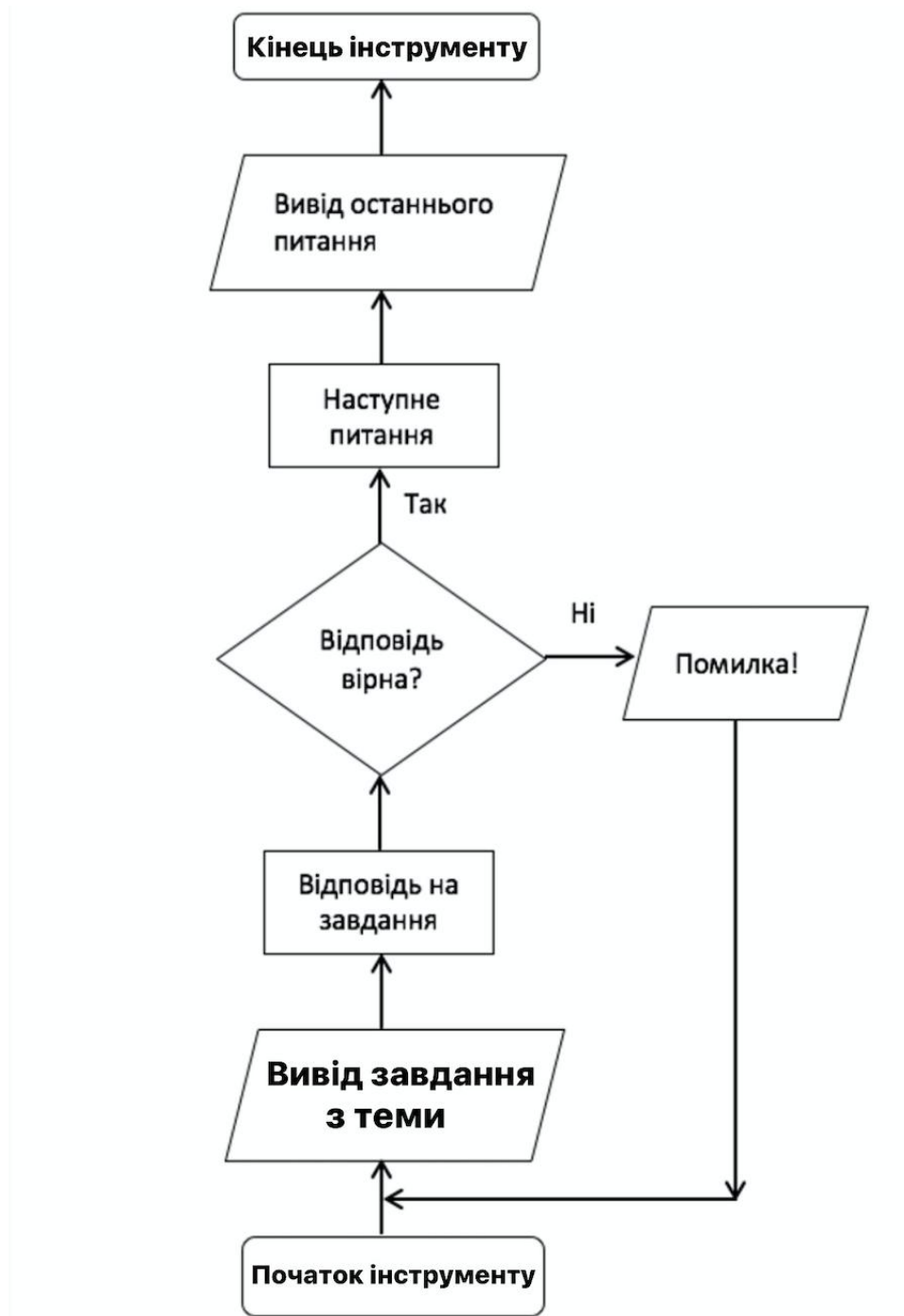


Рисунок 3.1 – Блок-схема навчального інструменту.

4. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

4.1. Опис програмної реалізації

Додаток реалізовано на мові програмування Visual Basic, в середовищі розробки Visual Studio. (рис. 4.1)

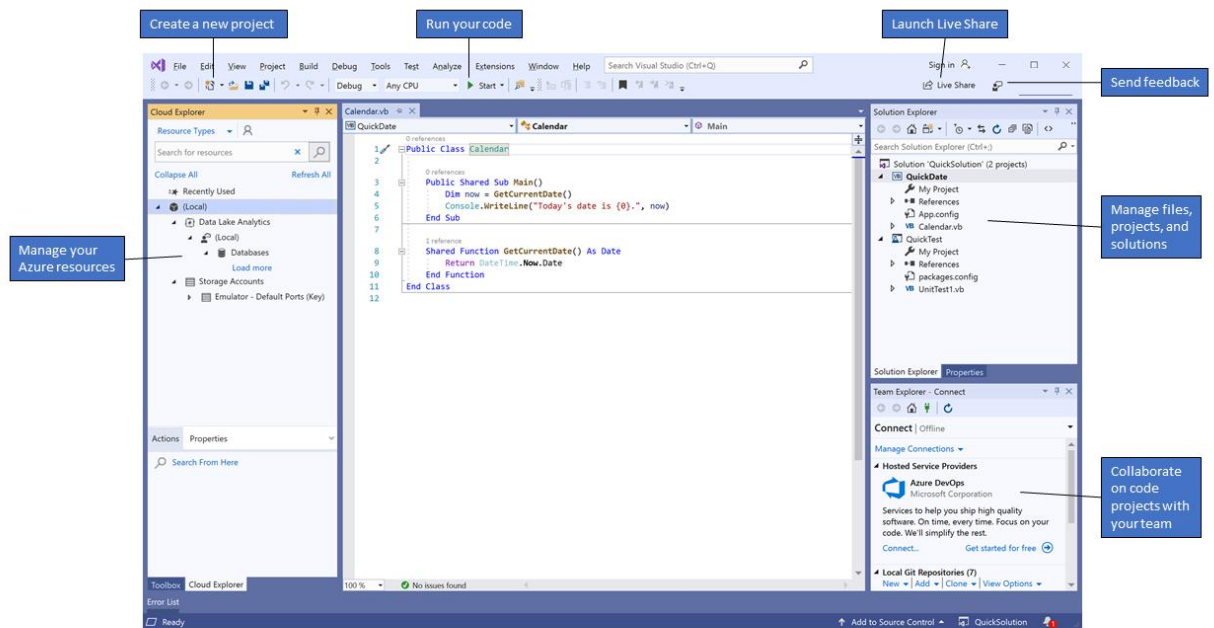


Рисунок 4.1 – Середовище Visual Studio.

Далі, триває процес розробки стартової форми тренажеру (рис. 4.2)

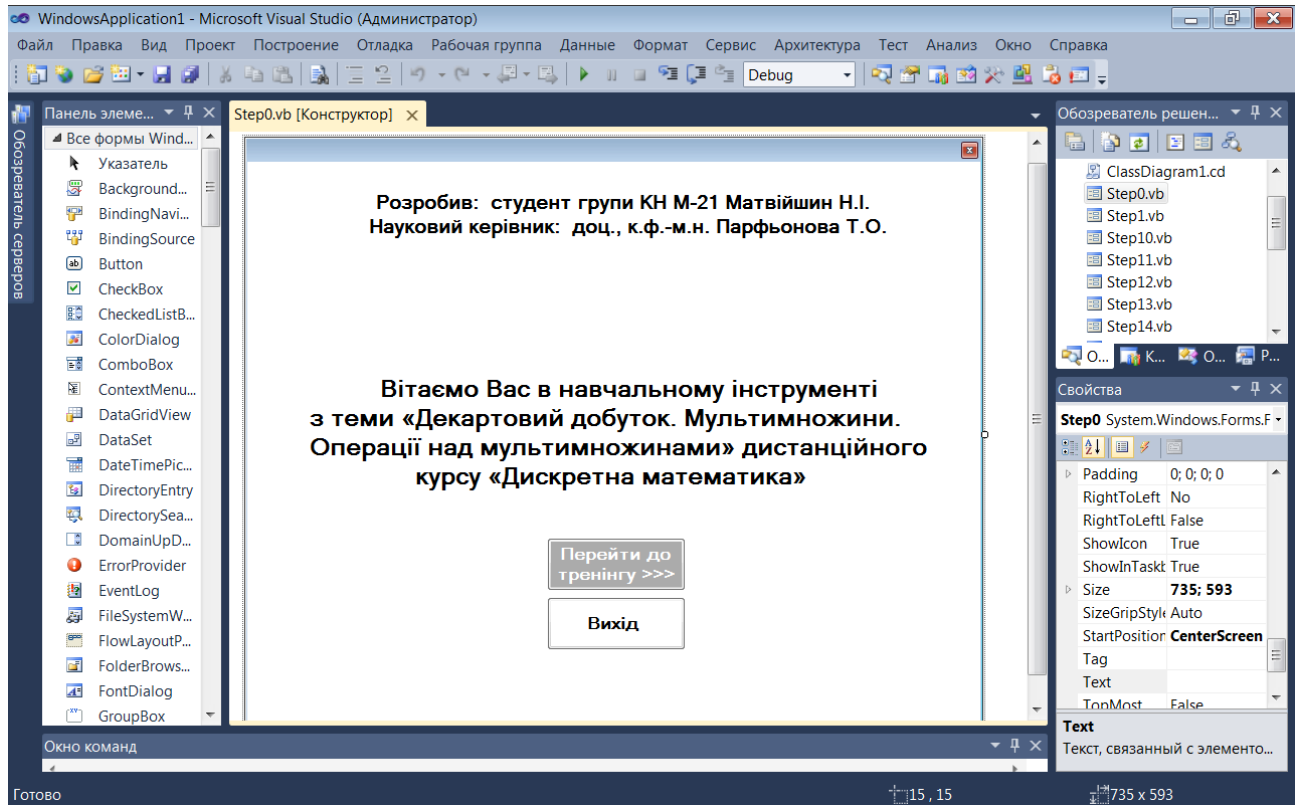


Рисунок 4.2 – стартова форма тренажеру.

Після стартової форми, потрібно запрограмувати перше питання з теми тренажеру, це буде перший крок алгоритму (рис. 4.3)

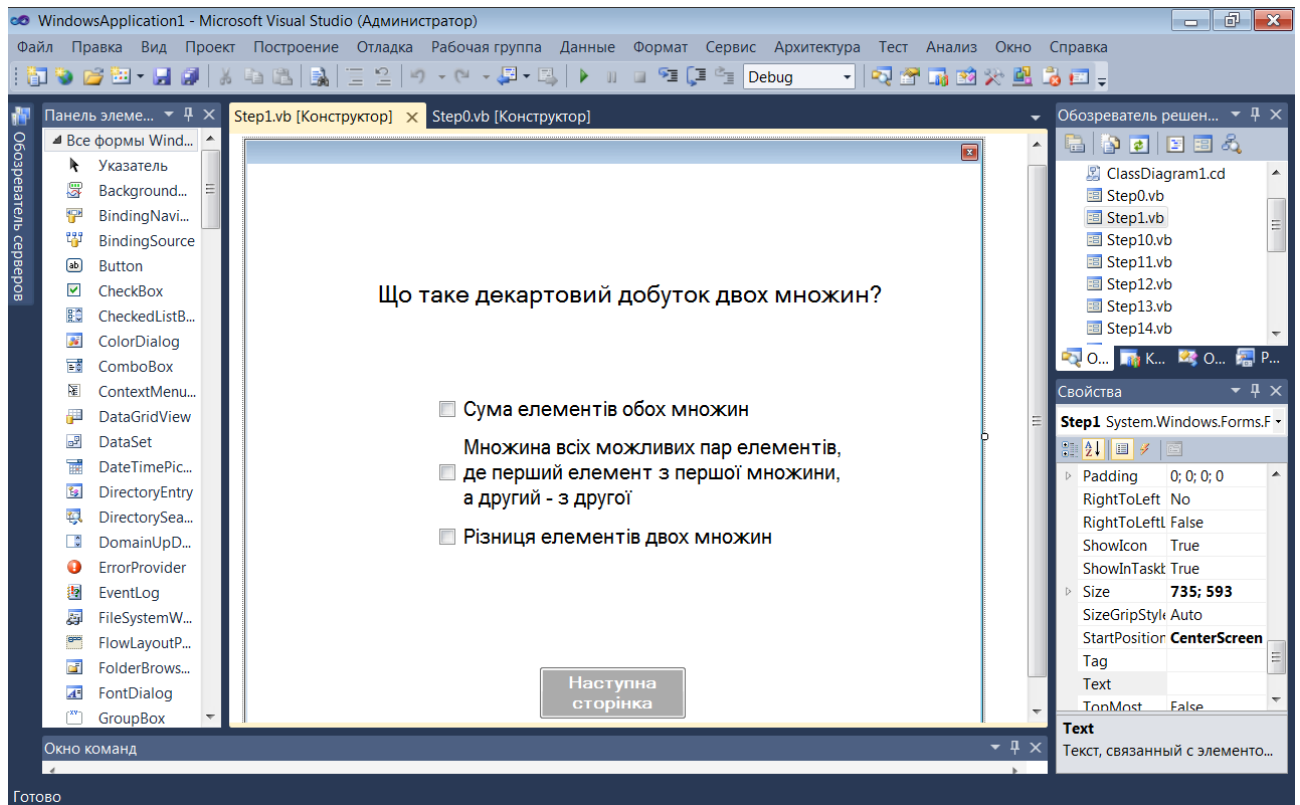


Рисунок 4.3 – перший крок алгоритму тренажеру.

Потім, після першого кроку, потрібно реалізувати другий крок з теми тренажеру (рис. 4.4)

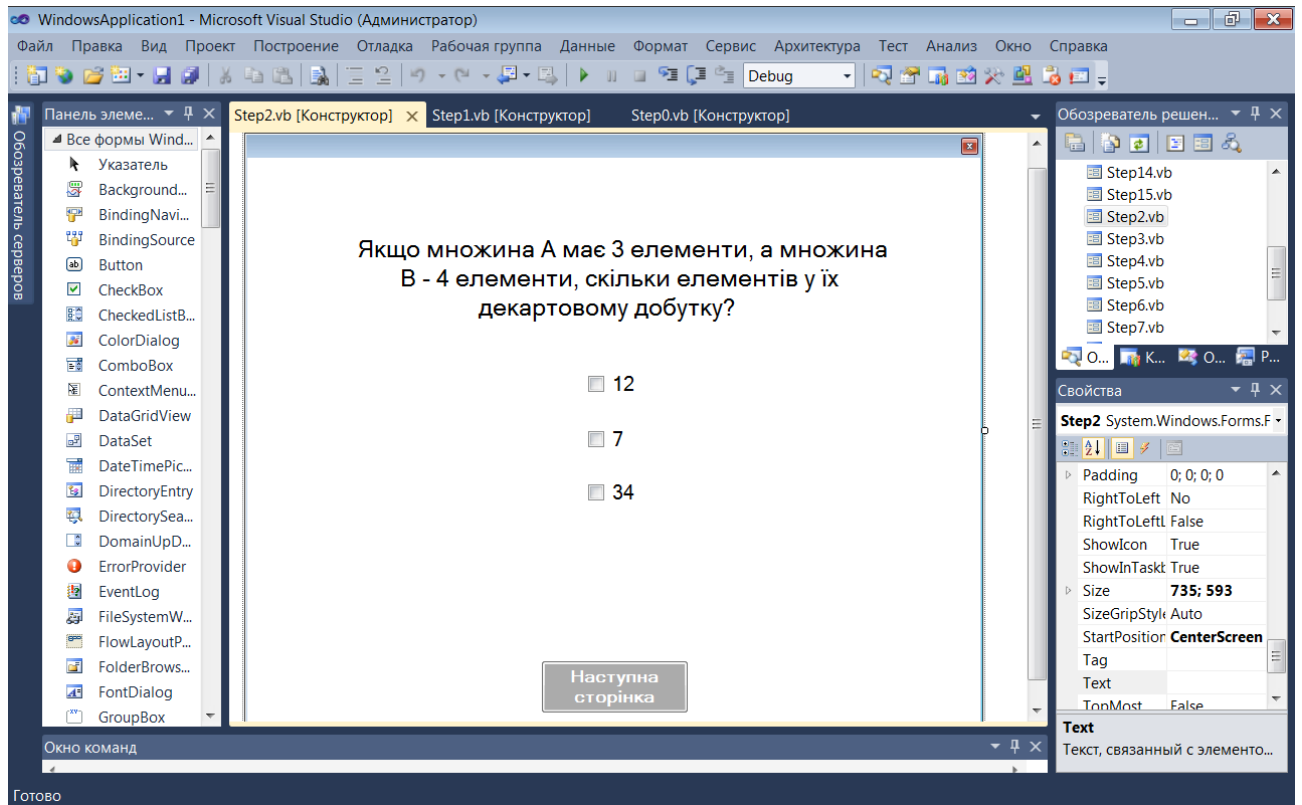


Рисунок 4.4 – другий крок алгоритму тренажеру.

4.2. Інструкція по використанню навчального інструменту

Після відкриття навчального інструменту відкривається головна сторінка (рис. 4.5)

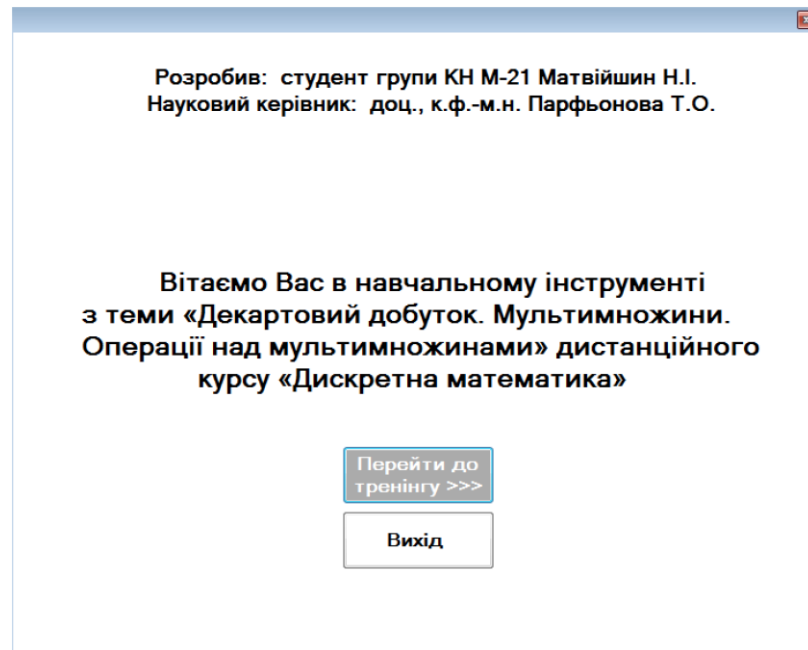
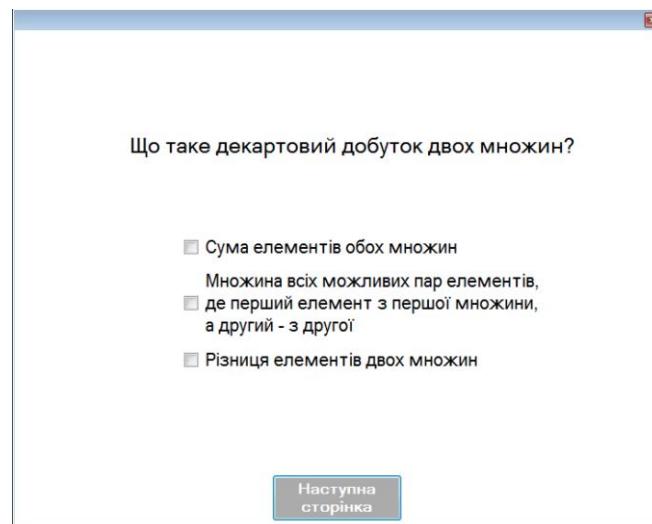


Рисунок 4.5 – головна сторінка.

Після натискання кнопки на формі «Перейти до тренінгу», користувачу відкривається перше питання, він може відповісти натиснувши на будь який варіант відповіді на питання (рис. 4.6)

Рисунок 4.6 – перше питання.



Після того, як користувач обрав свою відповідь, він натискає кнопку «Наступна сторінка», і якщо обрана відповідь є правильною, відобразиться додаткове вікно. (рис. 4.7)

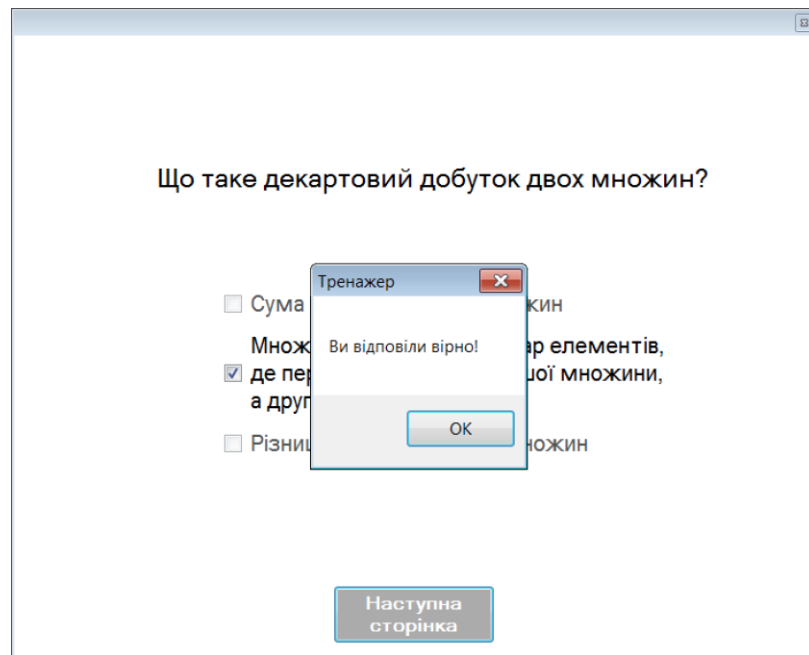


Рисунок 4.7 – відповідь правильна.

Якщо користувач надав неправильну відповідь, відобразатиметься повідомлення про помилку. (рис. 4.8)

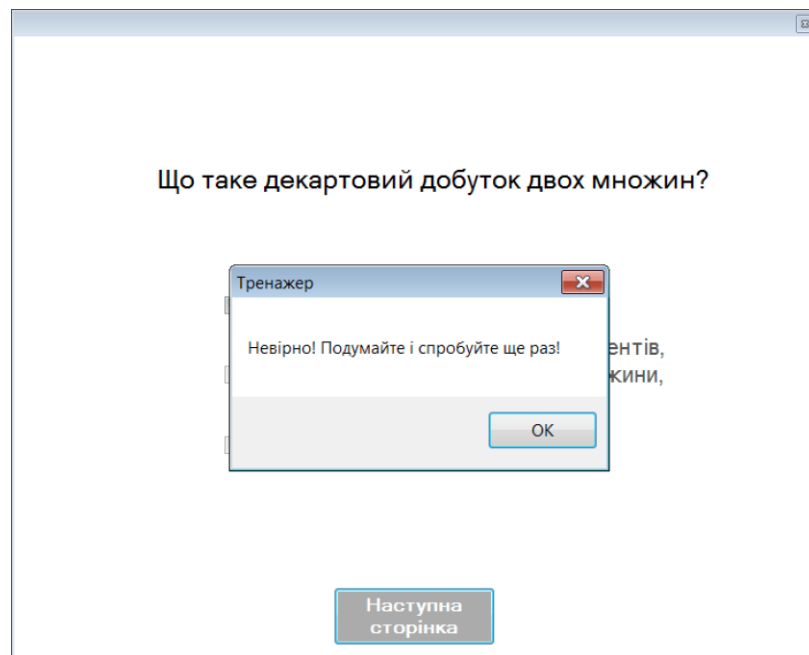
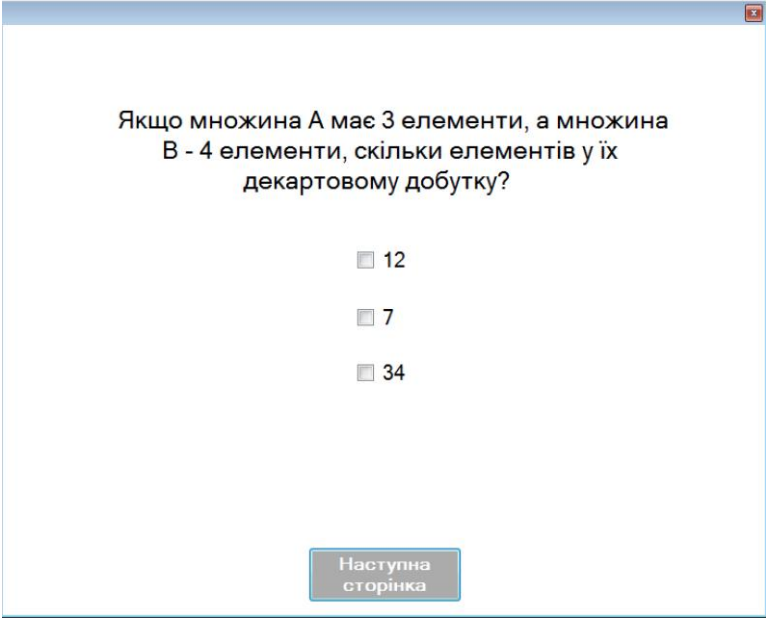


Рисунок 4.8 – помилка.

Після правильної відповіді, користувач переходить до наступного питання з теми. (рис. 4.9)



Якщо множина A має 3 елементи, а множина B - 4 елементи, скільки елементів у їх декартовому добутку?

☐ 12

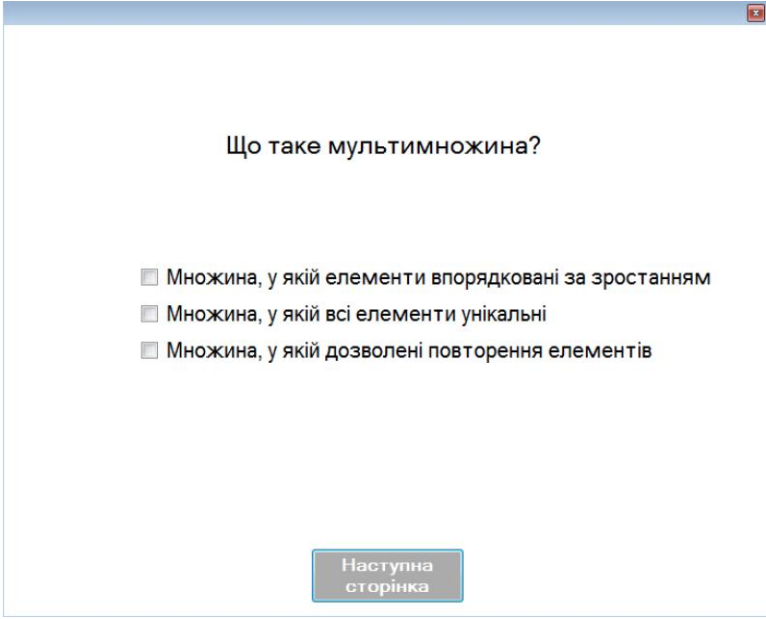
☐ 7

☐ 34

Наступна сторінка

Рисунок 4.9 – вікно питання номер 2.

Потім після правильної відповіді користувачу відкриється питання номер 3 (рис. 5.0)



Що таке мультимножина?

☐ Множина, у якій елементи впорядковані за зростанням

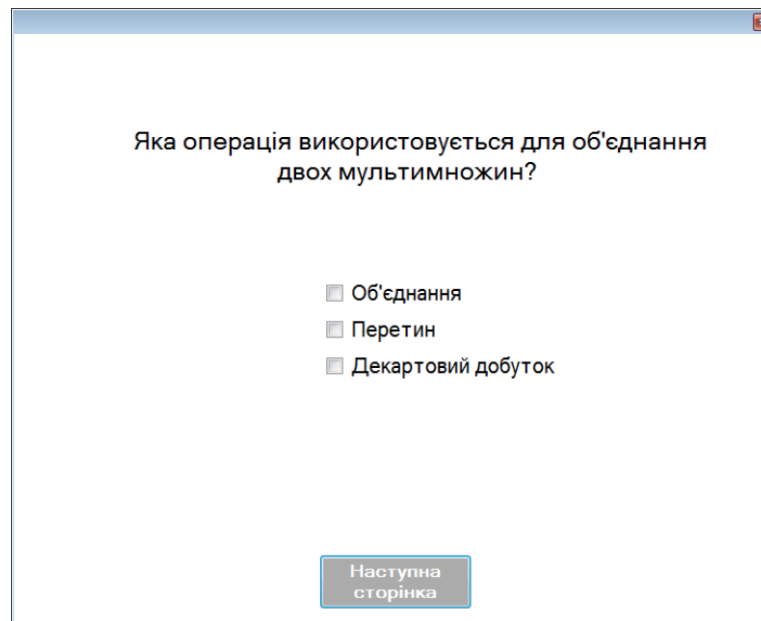
☐ Множина, у якій всі елементи унікальні

☐ Множина, у якій дозволені повторення елементів

Наступна сторінка

Рисунок 5.0 – вікно питання номер 3.

Після 3 питання користувачу по порядку відкривається 4 питання з теми (рис. 5.1)



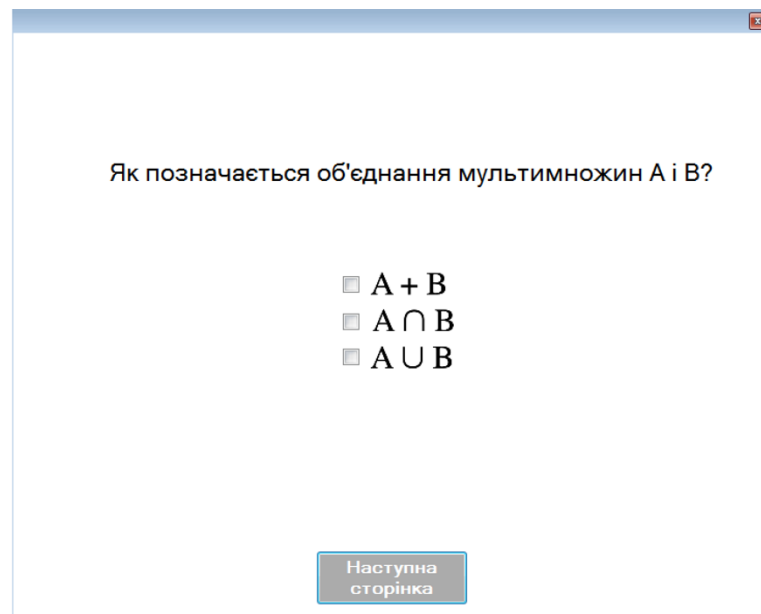
Яка операція використовується для об'єднання двох мультимножин?

- ☐ Об'єднання
- ☐ Перетин
- ☐ Декартовий добуток

Наступна сторінка

Рисунок 5.1 – вікно питання номер 4.

Якщо користувач вибрав правильний варіант відповіді, йому відкриється питання номер 5 (рис. 5.2)



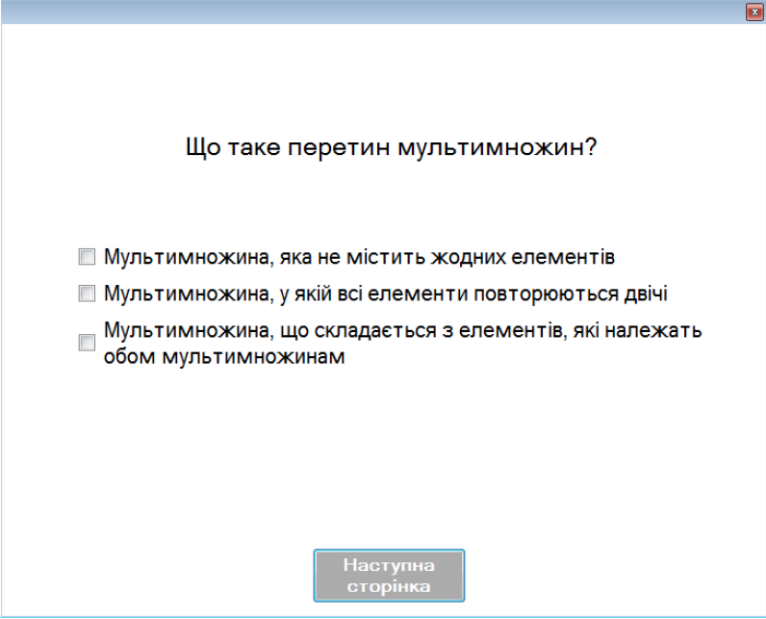
Як позначається об'єднання мультимножин A і B?

- ☐ $A + B$
- ☐ $A \cap B$
- ☐ $A \cup B$

Наступна сторінка

Рисунок 5.2 – вікно питання номер 5.

Після 5 питання, по порядку відкривається питання номер 6 (рис. 5.3)



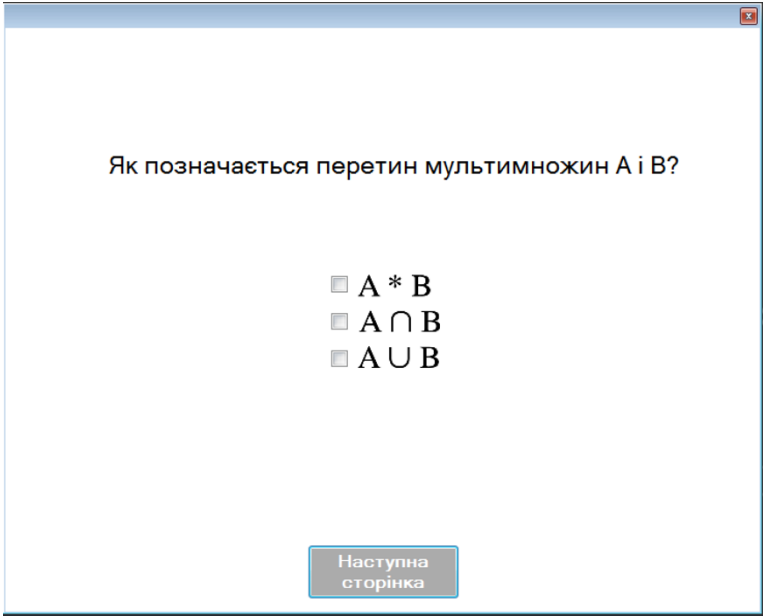
Що таке перетин мультимножин?

- ☐ Мультимножина, яка не містить жодних елементів
- ☐ Мультимножина, у якій всі елементи повторюються двічі
- ☐ Мультимножина, що складається з елементів, які належать обом мультимножинам

Наступна сторінка

Рисунок 5.3 – вікно питання номер 6.

Потім користувачеві відкривається питання номер 7 (рис. 5.4)



Як позначається перетин мультимножин A і B ?

- ☐ $A * B$
- ☐ $A \cap B$
- ☐ $A \cup B$

Наступна сторінка

Рисунок 5.4 – вікно питання номер 7.

Потім користувачеві відкривається питання номер 8 (рис. 5.5)

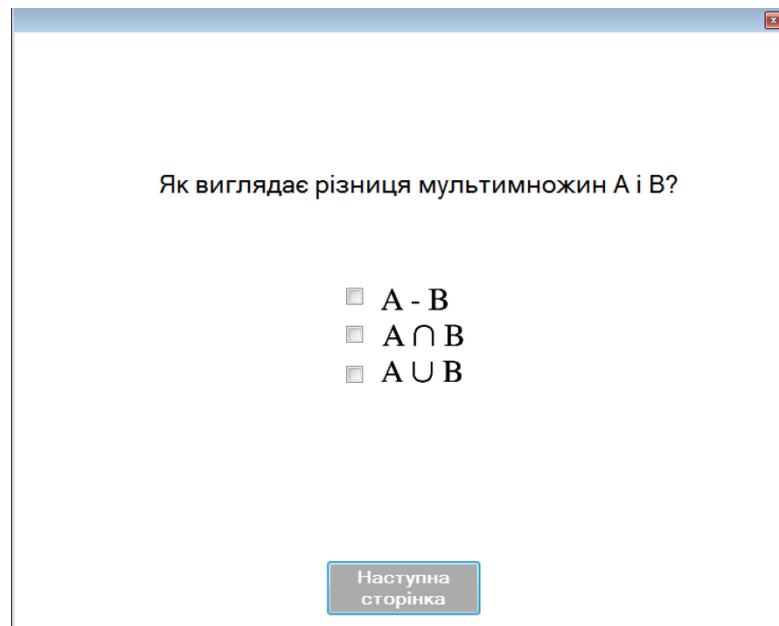


Рисунок 5.5 – вікно питання номер 8.

Потім користувачеві відкриється питання номер 9 (рис. 5.6)

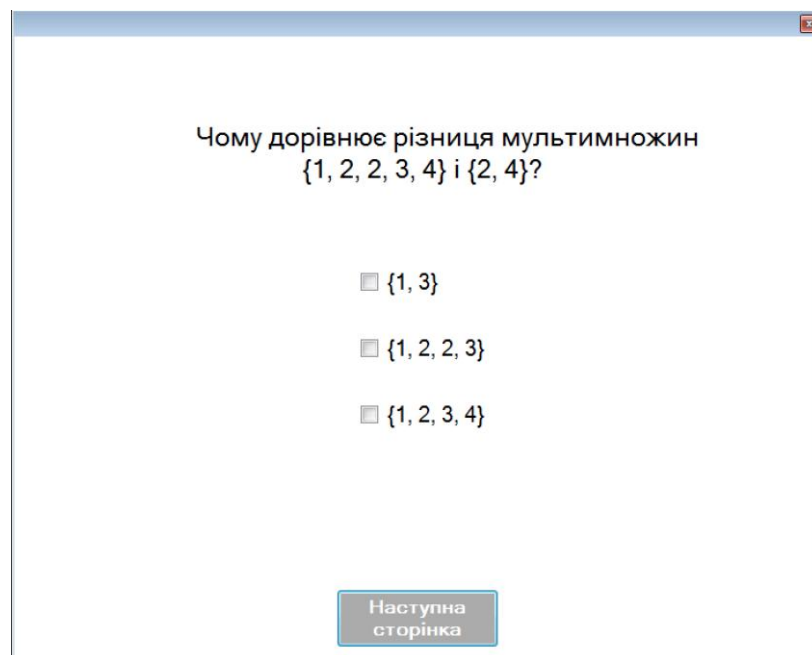


Рисунок 5.6 – вікно питання номер 9.

Потім користувачеві відкриється питання номер 10 (рис. 5.7)

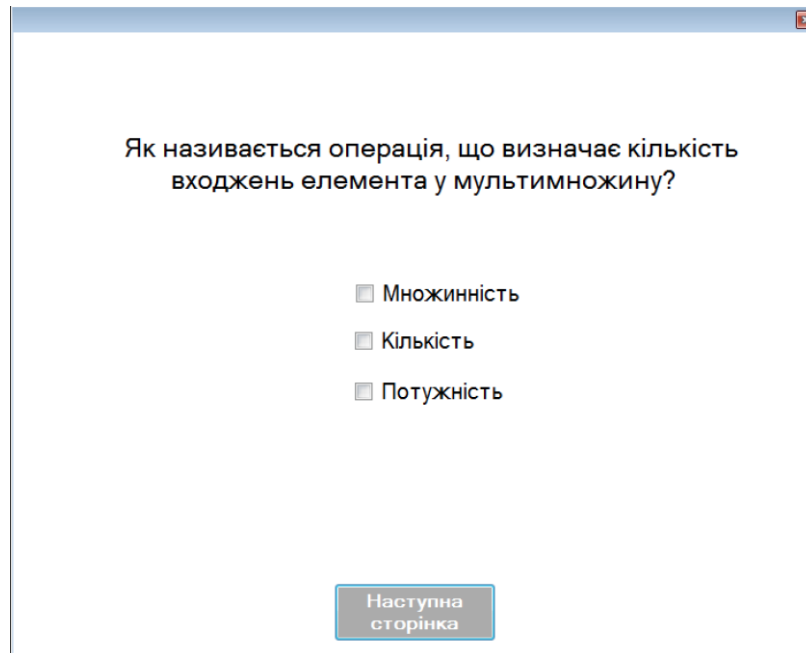


Рисунок 5.7 – вікно питання номер 10.

Після відповіді на останнє питання, користувач активує кнопку "ОК", потім відкривається фінальна сторінка навчального інструменту. Там відображається напис, а також є кнопки для завершення або повторення тренінгу. (рис. 5.8)

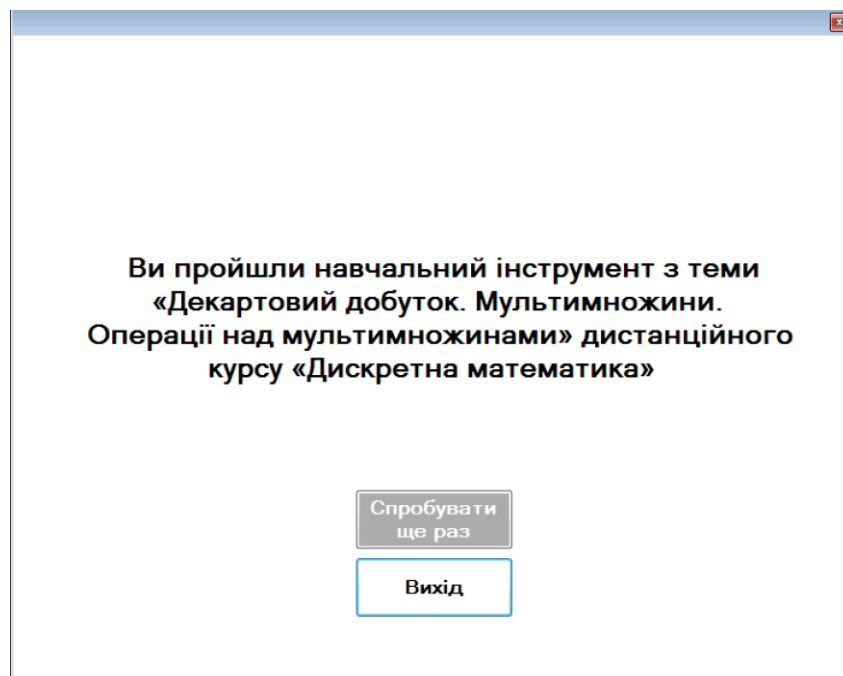


Рисунок 5.8 – заключне вікно навчального інструменту.

4.3. Обґрунтування вибору програмних засобів

VB.NET дозволяє програмістам легко створювати програми, частково завдяки вдосконаленій IDE, а частково завдяки доступу до вбудованих бібліотек під назвою .NET Framework. .NET Framework — це гігантський інструментарій віджетів, який програміст може використовувати, щоб надати вашим веб-сайтам більше функціональності та можливостей. Найкраще те, що вони реально економлять час. Вам не потрібно писати все з нуля. Об'єктно-орієнтована природа Visual Basic дозволяє писати код, який можна легко повторно використовувати, що робить його дуже гнучким.

VB.NET підтримує Common Language Runtime (CLR) .NET Framework, що забезпечує міжмовну сумісність, дозволяючи розробникам легко інтегрувати компоненти, написані різними мовами .NET. Він надає широкий спектр можливостей і функціональних можливостей, включаючи підтримку успадкування, поліморфізму, обробки винятків, а також повний набір бібліотек і API, що робить його придатним для різних типів додатків, таких як настільні, веб та мобільні додатки.

За допомогою VB.NET розробники можуть скористатися перевагами сучасних парадигм програмування, зберігаючи легкість використання та простоту, пов'язану з традиційною мовою Visual Basic. Синтаксис мови та IDE (інтегроване середовище розробки) у Visual Studio роблять її доступною як для початківців, так і для досвідчених розробників, що робить її популярним вибором для широкого кола проектів.

ВИСНОВКИ

Отже, освіта під час війни виступає важливішою, ніж будь-коли. Суспільство, яке інвестує в знання та освіту, здатне краще реагувати на виклики, що виникають у часи конфліктів. Освіта допомагає зберегти культурну ідентичність, підтримує духовний розвиток і надає інструменти для відновлення країни після війни.

Використання навчальних тренажерів є ключовим елементом сучасного підходу до освіти в умовах війни. Вони дозволяють забезпечити доступ до якісного навчання, зберігаючи безпеку та ефективність у найскладніших умовах. Такі інновації стають мости між науковими досягненнями та реальним життям, допомагаючи підготувати наступне покоління до викликів, які може призвести військова діяльність.

В кінцевому підсумку, освіта та використання навчальних тренажерів під час війни формують стійке, розумне та готове до випробувань суспільство.

В результаті виконання кваліфікаційної роботи був успішно створений освітній інструмент, який охоплює тему "Декартовий добуток. Мультимножини. Операції над мультимножинами".

Кваліфікаційна робота дозволила розробити зручний навчальний інструмент для студентів, які вивчають дистанційний курс "Дискретна математика".

Отримані результати свідчать про успішну реалізацію проекту та готовність освітнього інструменту надавати якісне навчання у форматі дистанційного курсу.

- 82%D0%B8%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B8%D0%BD%D0%B0
9. Основи дискретної математики [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/31522/1/%D0%9D%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf
 10. розділ “множини” [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://nmetau.edu.ua/file/073.pdf>
 11. Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання: ДСТУ 7.1-2006. – [Чинний від 2007-07-01]. – К. : Держспоживстандарт України, 2007. – 47 с.
 12. Microsoft Visual Studio [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Visual_Studio
 13. Microsoft Visual Basic [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Visual_Basic
 14. Програмування на Visual BASIC [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://kursoviks.com.ua/bd_kompyuterni/article_post/65-lektsiya-osnovi-programuvannya-movoyu-visual-basic-6-0
 15. Microsoft Visual Basic 2010 Step by Step [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://books.google.com.ua/books?hl=uk&lr=&id=Ap9CAwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT18&dq=visual+basic&ots=n5NfMNuX8q&sig=8OFek2tHiXjaKynsUtD6SgQKabY&redir_esc=y#v=onepage&q=visual%20basic&f=false
 16. Операції над множинами [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://cherto4ka.xyz/2019/09/16/%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%86%D1%96%D1%97-%D0%BD%D0%B0%D0%B4-%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8/>

17. Опис редактору Visual Basic [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://studfile.net/preview/7785340/>
18. Randolph Visual Studio 2010 for professionals // Randolph, Nick, Gardner, David, Minutillo, Michael, Anderson, Chris.: Trans. with English - M.: LLC "I.D. Williams", 2011. - 1184 p.
19. Appleman D. E72 Win32 API and Visual Basic. For professionals (+SD) / D. Appleman. - Peter, 2002. - 1120 p.
20. Halvorson M. Microsoft Visual Basic 2005. Series "Step by step" / M. Halvorson. - ECOM Publishers. - 640 p.

ДОДАТОК А. КОД ПРОГРАМИ