

**ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ**

Навчально-науковий інститут денної освіти  
Форма навчання денна  
Кафедра комп'ютерних наук та інформаційних технологій

Допускається до захисту  
Завідувач кафедри  
\_\_\_\_\_ Олена ОЛЬХОВСЬКА  
(підпис)

«\_\_» \_\_\_\_\_ 202\_ р.

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА**

**на тему**

**СТВОРЕННЯ ПРОГРАМИ ДЛЯ ТРЕНАЖЕРА ДИСТАНЦІЙНОГО  
НАВЧАЛЬНОГО КУРСУ «ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА» З ТЕМИ  
«ПЛАНАРНІ ГРАФИ. РОЗФАРБУВАННЯ ГРАФІВ»**

**зі спеціальності 122 Комп'ютерні науки  
освітня програма «Комп'ютерні науки»  
ступеня магістра**

**Виконавець роботи** Коломієць Максим Володимирович  
\_\_\_\_\_ «\_\_» \_\_\_\_\_ 202\_ р.  
(підпис)

**Науковий керівник** к. ф.-м. н., доц., Парфьонова Тетяна Олександрівна  
\_\_\_\_\_ «\_\_» \_\_\_\_\_ 202\_ р.  
(підпис)

**Рецензент** \_\_\_\_\_

**ПОЛТАВА 2023**

## ЗМІСТ

|                                                                                                                                            |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ,<br>СКОРОЧЕНЬ, ТЕРМІНІВ.....                                                                  | 3  |
| ВСТУП.....                                                                                                                                 | 4  |
| 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ РОЗРОБКИ .....                                                                                                        | 6  |
| 2. ІНФОРМАЦІЙНИЙ ОГЛЯД .....                                                                                                               | 7  |
| 2.1. Огляд технології дистанційного навчання.....                                                                                          | 7  |
| 2.2. Огляд матеріалу з теми .....                                                                                                          | 9  |
| 3. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА.....                                                                                                                 | 17 |
| 3.1. Основна термінологія з теми «Планарні граfi. Розфарбування граfiв» .....                                                              | 17 |
| 3.2. Алгоритм програми тренажеру з теми «Планарні граfi. Розфарбування граfiв» дистанційного навчального курсу «Дискретна математика»..... | 22 |
| 3.3. Блок-схема тренажеру.....                                                                                                             | 25 |
| 4. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА.....                                                                                                                  | 26 |
| 4.1 Опис програмної реалізації .....                                                                                                       | 26 |
| 4.2. Інструкція по використанню навчального тренажеру.....                                                                                 | 30 |
| 4.3. Обґрунтування вибору програмних засобів .....                                                                                         | 37 |
| ВИСНОВКИ .....                                                                                                                             | 38 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....                                                                                                           | 39 |
| ДОДАТОК А. КОД ПРОГРАМИ .....                                                                                                              | 41 |

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ, ТЕРМІНІВ

| Умовні позначення, символи,<br>скорочення, терміни | Пояснення умовних позначень,<br>скорочень, символів                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Редактор Adobe Photoshop                           | Photoshop використовується професіоналами в галузі фотографії, дизайну, реклами, видавництва та багатьох інших сферах, де потрібно створювати та редагувати графіку. |
| Click                                              | Подія "Click" використовується для обробки натискання кнопки миші або елемента керування на формі.                                                                   |
| if..esle..then                                     | Ця конструкція дозволяє виконувати певний блок коду, якщо задане умова істинна, і інший блок коду, якщо умова є хибною.                                              |
| TextBox                                            | Поле для введення тексту                                                                                                                                             |
| Visual Studio                                      | Середовище розробки програмного забезпечення.                                                                                                                        |
| Visual Basic                                       | Є об'єктно-орієнтованою мовою програмування, розробленою компанією Microsoft.                                                                                        |
| Windows Forms                                      | Є частиною .NET Framework і є набором класів та інструментів для розробки графічних інтерфейсів користувача (GUI) для Windows додатків.                              |

## ВСТУП

Дистанційне навчання, або онлайн-навчання, стало невід'ємною частиною сучасної освіти, особливо в контексті технологічного прогресу та глобального зв'язку. Завдяки розвитку інтернету та спеціалізованих платформ, учні та студенти мають змогу отримувати знання та навички безпосередньо зі своїх домівок або з будь-якого місця, де є доступ до Інтернету. У цій роботі розглянемо важливість впровадження програм тренажерів до дистанційного навчання і як воно впливає на освіту та навчальний процес.

Важливість дистанційного навчання набуває все більшої актуальності у світі, що стрімко розвивається. Ця форма навчання дозволяє зручності, гнучкості та доступності освіти для всіх категорій учнів і студентів. Вона дає змогу вивчати нові предмети, покращувати професійні навички і розвиватися, незалежно від місця проживання або роботи. [2]

Мета кваліфікаційної роботи – створення програми для тренажера дистанційного навчального курсу «Дискретна математика» з теми «Планарні графи. Розфарбування графів».

Об'єкт розробки – алгоритмізація та програмна реалізація програмного забезпечення з дисципліни «Дискретна математика».

Предмет розробки – алгоритм тренажеру та його програмне функціонування з теми «Планарні графи. Розфарбування графів».

Кваліфікаційна робота складається з чотирьох розділів. У першому розділі описано постановку задачі для реалізації навчального тренажеру. У другому розділі описано про огляд технології дистанційного навчання та розмальовку графа. Третій розділ присвячено теоретичному матеріалу, детальному опису алгоритму та блок-схемі роботи тренажера. У

четвертому розділі розглянуто процес програмної реалізації тренажера та надано інструкцію користувача. Обсяг пояснювальної записки: 41 стор., в т.ч. основна частина – 36 стор., джерела – 20 назв.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ РОЗРОБКИ

Основним завданням кваліфікаційної роботи є створення програми для тренажера дистанційного навчання з дисципліни «Дискретна математика», зокрема, з теми «Планарні граfi. Розфарбування граfiв». Мета дослідження включає в себе такі завдання:

1. Аналіз теоретичного матеріалу з теми «Планарні граfi. Розфарбування граfiв».
2. Розробка алгоритму для функціонування тренажера.
3. Створення блок-схеми, що ілюструє роботу тренажера.
4. Написання програмного коду для реалізації тренажера.
5. Підготовка звіту, в якому будуть описані результати впровадження програмного тренажера.

У процесі розробки програми та алгоритму для тренажера, передбачається введення наступних вікон:

1. Початкове вікно тренажера повинно містити інформацію про тему тренажера, кнопку «Почати тренінг», а також дані про студента та наукового керівника магістерської роботи.
2. Під час подальших етапів тренажера користувачам будуть представлені тестові питання з теми тренажера, де студент повинен вибрати правильну або неправильну відповідь.
3. У заключному вікні тренажера, яке відкривається після завершення тренінгу, користувач отримує повідомлення про успішне завершення тренажера: «Вітаємо! Ви успішно пройшли тренажер з теми «Планарні граfi. Розфарбування граfiв» дистанційного курсу «Дискретна математика»».

## **2. ІНФОРМАЦІЙНИЙ ОГЛЯД**

### **2.1. Огляд технології дистанційного навчання**

Ідея освіти на відстані, в принципі, не є новою. Вона виникла з усвідомлення суспільством необхідності навчання без відриву від професійної діяльності більшої кількості людей і була втілена через систему заочної освіти. Нові обставини (збільшення попиту на вищу освіту) і нові можливості (комп'ютеризація, нові інформаційні технології, телекомунікації тощо) дали змогу перевести навчання на відстані на якісно інший рівень - створена дистанційна освіта. Дистанційне навчання в силу своєї специфіки не тільки позбавлене багатьох недоліків заочного, але й має перед ним ряд переваг. Головне в дистанційному навчання - це особиста орієнтація на освіту. Таким чином, навчатися дистанційно можна для здобуття середньої, спеціальної та вищої освіти або з метою підвищення кваліфікації. При цьому обов'язково треба мати високий рівень мотивації та самодисципліни. Отже, людина у будь-який період свого життя здобуває можливість дистанційно отримати нову професію, підвищити свою кваліфікацію, розширити свій світогляд, причому у будь-якому науковому чи навчальному центрі світу.

Сьогодні існує безліч визначень поняття "дистанційне навчання". Найчастіше дистанційне навчання визначають як навчання, де знання доставляються слухачу. Наприклад, можна навчатися в московському університеті МЕСІ й отримати його диплом, не виїжджаючи за межі України.

Насправді поняття "дистанційне навчання" більш широке й ґрунтується на трьох складових:

- відкрите навчання;
- комп'ютерне навчання;
- активне спілкування з викладачем і студентами з використанням сучасних телекомунікацій.

Дистанційне навчання є формою здобуття освіти, поряд з очною та заочною, при якій в освітньому процесі використовуються кращі традиційні та інноваційні засоби, а також форми навчання, що ґрунтуються на комп'ютерних і телекомунікаційних технологіях. Дистанційне навчання - нова організація освітнього процесу, що ґрунтується на принципі самостійного навчання студента. Дистанційне навчання - сукупність інформаційних технологій, що забезпечують доставку студентові основного обсягу матеріалу; інтерактивну взаємодію студентів та викладачів у процесі навчання; надання студентам можливості самостійної роботи щодо засвоєння матеріалу; а також оцінку їхніх знань та навичок у процесі навчання. Дистанційне навчання - це нова сходинка заочного навчання, на якій забезпечується застосування інформаційних технологій, заснованих на використанні персональних комп'ютерів, відео- та аудіотехніки, космічної техніки та оптичних систем зв'язку.

Дистанційне навчання - це універсальна форма навчання, що використовує традиційні педагогічні, нові інформаційні та телекомунікаційні технології, технічні засоби, що створюють умови для вибору студентами вільних освітніх дисциплін, які відповідають стандартам. Навчання відбувається завдяки спілкуванню з викладачем дистанційно та синхронно.

Деякі автори вважають, що дистанційне навчання - це варіант заочного навчання. Дійсно, між двома педагогічними технологіями, що розглядаються, має місце лише зовнішня подібність - в основі цих технологій лежить самостійна робота слухачів. В той же час, самостійна робота слухачів при дистанційному навчанні принципово відрізняється від самостійної роботи при заочному навчанні. По-перше, при дистанційному навчанні вона дійсно керована конкретним суб'єктом (тьютором), тому що на кожному її етапі перед слухачем ставиться конкретна мета і жорстко контролюється її досягнення. При необхідності слухачеві надається оперативна допомога з боку кваліфікованих спеціалістів. По-друге, самостійна робота слухача здійснюється за індивідуальним планом

(розкладом), у зручному для нього місці, темпі, послідовності. По-третє, дидактичне забезпечення самостійної роботи не обмежується методичними рекомендаціями і переліками літератури, як це, в основному, має місце при заочному навчанні, а здійснюється за допомогою спеціалізованих комплексів високої якості та індивідуального користування. Також слухач має узгоджену можливість контакту з викладачем по телефону, факсу, електронній і звичайній пошті, Інтернет, а також особисто. За визначенням В.В. Олійника, дистанційне навчання - це самостійна педагогічна технологія, яка відрізняється від існуючих, принципово відрізняється від заочного і аж ніяк не є його різновидом. Основою цієї технології є самостійна робота слухачів, дидактично забезпечена і контрольована. В її структуру органічно входять сучасні форми і методи відбору, конструювання і відображення навчального матеріалу; елементи модульного і комп'ютерного навчання, теорії і практики керованої самостійної роботи; застосування у навчанні інформаційних технологій, телекомунікаційних мереж тощо.

## **2.2. Огляд матеріалу з теми**

Останнім часом граfi і пов'язані з ними методи досліджень органічно пронизують на різних рівнях чи не всю сучасну математику. Теорія графів входить як окремий розділ у дискретну математику, розглядається як одна з гілок сучасної топології та має безпосереднє відношення до алгебри і теорії чисел.

Родоначальником теорії графів вважається Леонард Ейлер. У 1736 році в одному зі своїх листів він сформулював і запропонував розв'язок задачі про сім Кенігсберзьких мостів, що стала згодом однією з класичних задач теорії графів.

Поштовх до розвитку теорія графів отримала на рубежі XIX і XX століть, коли різко зросла кількість робіт в сфері топології та комбінаторики, з якими її пов'язують тісні узи спорідненості. Графи стали використовуватися при побудові схем електричних кіл і молекулярних

схем. Як окрема математична дисципліна теорія графів була вперше представлена в роботі угорського математика Кеніга в 30-тих роках XX століття.

Без теоретико-графових алгоритмів важко уявити сучасне програмування. У цьому контексті слід відмітити задачі, пов'язані з представленням програм у вигляді теоретико-графових моделей, найважливішою з яких є графова. Особливо важливе місце вони займають при моделюванні процесів та явищ [1].

Окрім того, сферами застосування граф-моделей є використання обчислювальних ресурсів системи, організація великих масивів інформації, збільшення степеня паралелізму програми, підвищення ефективності роботи багатопроцесорних і багатомашинних систем. Розв'язання цих та інших задач привело до появи великої кількості граф-моделей, пов'язаних як з параметрами та структурами даних, так і з обчислювальними системами.

Окрім того, графи знайшли своє застосування в теорії планування та управління, теорії розкладів, соціології, математичній лінгвістиці, економіці, біології, медицині, географії. Широке застосування знаходять графи в таких областях, теорія скінченних автоматів, електроніка, у розв'язанні ймовірнісних і комбінаторних задач, знаходженні максимального потоку в мережах, найкоротшої відстані між вершинами графа, максимального паросполучення, перевірки планарності графа тощо.

Як особливий клас можна виділити задачі оптимізації на графах. Математичні розваги і головоломки також є частиною теорії графів. Зокрема, однією із важливих задач на графах є задача розбиття або розфарбування множини його вершин чи ребер [2], а також знаменита проблема чотирьох фарб [3].

Зазвичай, коли мова заходить про розфарбування графів, майже завжди мають на увазі фарбування їх вершин. Оскільки графи, в яких є петлі, неможливо правильно розфарбувати, то вони не є предметом

обговорення. Термінологія, в якій мітки називаються кольорами (фарбами), походить від розфарбовування політичних карт. Розфарбування з використанням  $k$  кольорів називається  $k$ -розфарбуванням. Найменше число кольорів, необхідне для розфарбування вершин графа  $G$  називається його *хроматичним числом* і часто позначається  $X(G)$ . Основною проблемою при відшукуванні хроматичного числа графа є те, що компоненти розбиттів або декомпозицій в існуючих напрямках теорії графів мають бути зв'язними, в той час як компоненти оптимальних розбиттів, як правило, виявляються незв'язними. Це значно ускладнює застосування традиційних методів теорії графів для розв'язання задач на розбиття [4].

Вершинне розфарбування називається *власним (правильним)*, якщо жодні дві суміжні вершини не пофарбовані в один колір. Підмножина вершин, виділених одним кольором, називається *кольоровим класом*, кожен такий клас формує незалежний набір. Таким чином,  $k$ -розфарбування – це те ж саме, що і розбиття вершин на  $k$  підмножин, що не перетинаються [5].

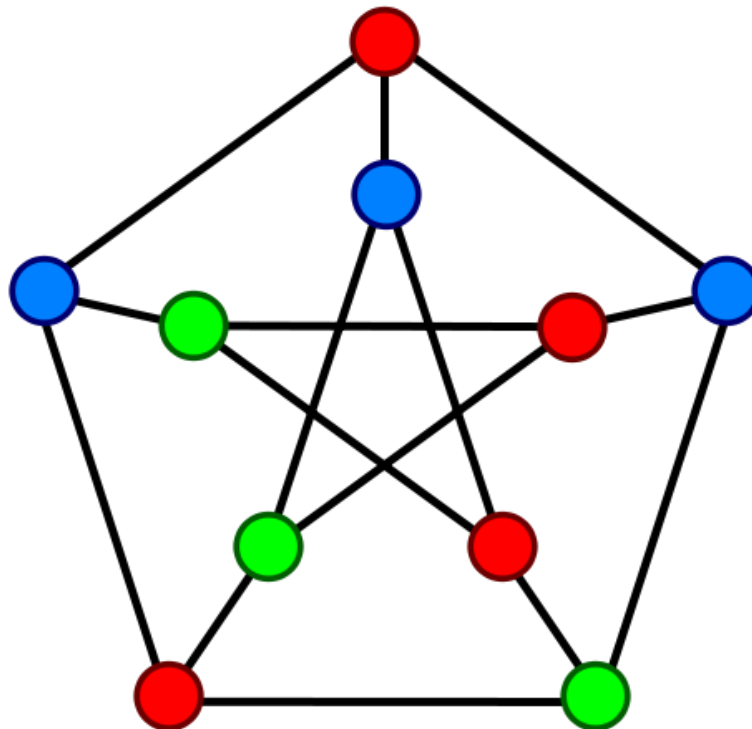


Рис. 2.1 – 3-розфарбування графа Петерсена.

Аналогічно, власним (правильним) реберним розфарбуванням графа називається присвоювання ребрам графа певних «кольорів» таким чином, що ніякі два суміжних ребра не фарбуються в один і той же колір. Наприклад, на рисунку 2.2 подано реберне розфарбування графа в червоний, синій і зелений кольори. Реберно-хроматичним числом (або хроматичним індексом) графа називають найменше число кольорів, необхідне для правильного розфарбування ребер графа. При знаходженні правильних вершинних чи реберних розфарбувань графів виникає питання: чи можна правильно розфарбувати вершини (ребра) заданого графа максимум в  $k$  різних кольорів для заданого значення  $k$  або ж навпаки – знайти мінімальне можливе число кольорів [5].

Наприклад, ребра графа на рисунку 2.2 можна правильно розфарбувати в три кольори, але не можна розфарбувати в два, отже, граф має хроматичний індекс три.

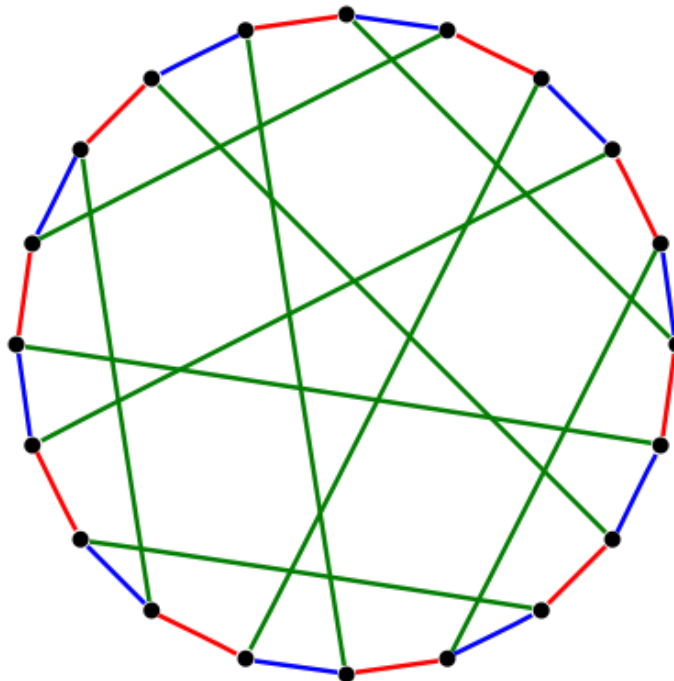


Рис. 2.2 – Правильне реберне розфарбування кубічного графа

Окрім задачі відшукування найменшого числа кольорів, у які можна правильно розфарбувати вершини (ребра) графа, виникає задача пошуку

усіх можливих правильних розфарбувань у задане число кольорів. Число можливих варіантів правильного розфарбування вершин графа з використанням не більше ніж заданого числа кольорів розв'язується із використанням хроматичного многочлена [5]. Наприклад, граф на рисунку 2.3 може бути розфарбований 12 способами з використанням 3 кольорів.

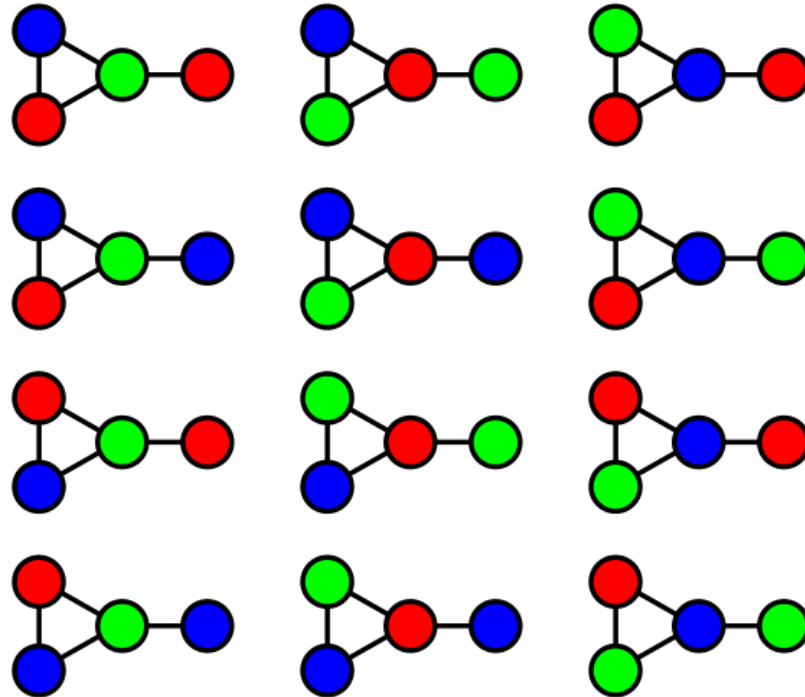


Рис. 2.3 – Правильні розфарбування графа у 3 кольори

Історично поняття хроматичного числа виникло з проблемою чотирьох фарб. Проблема виникла в математиці в середині 19 століття. Спочатку питання формулювалося наступним чином: знайти найменше число кольорів для розфарбування географічної карти, якщо сусідні країни розфарбовані в різні кольори? Під географічною картою розуміють розбиття площини на скінченне число зв'язних областей (країн), межі яких складаються із замкнутих неперервних ліній без самоперетинів, а сусідніми вважаються країни, що мають спільну границю.

Досить очевидно, що трьох фарб недостатньо, тому питання формулювалося зазвичай у більш конкретному виді: чи достатньо чотирьох фарб для розфарбування будь-якої географічної карти? Це і є проблема чотирьох фарб [6].

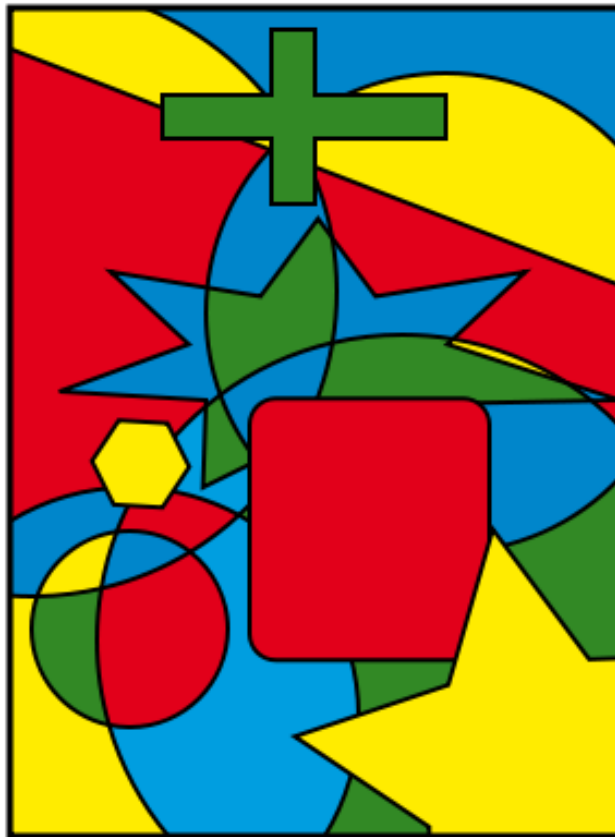


Рис. 2.4 – Розфарбування плоского графа у чотири кольори

Задача розфарбування географічних карт зводиться до пошуку правильного розфарбування вершин плоских графів, що є двоїстими до заданої плоскої карти. Проілюструємо це зведення картою, зображеної на рисунку 2.5.

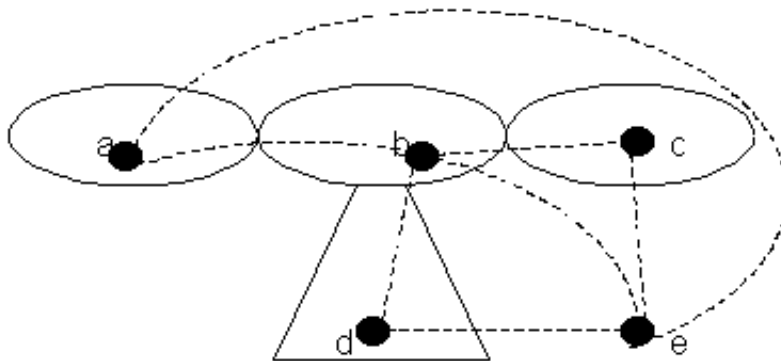


Рис. 2.5 – Побудова двоїстого графа

На рисунку 2.5 зображено карту, що має п'ять країн (зовнішня область – теж країни). Усередині кожної області зафіксуємо точку (вершину двоїстого графа), та з'єднуємо точки дугами, якщо відповідні країни

мають спільний кордон (на рис. 5 ребра проведено пунктирними лініями). При цьому ребра можна зобразити так, щоб вони не перетиналися, тобто щоб отриманий граф також був плоским. Зрозуміло, що розфарбування карти визначає правильне розфарбування вершин графа і навпаки. Тому проблему чотирьох фарб можна сформулювати наступним чином: чи достатньо чотирьох фарб для правильного розфарбування вершин плоского графа [6].

Ця проблема виникла вона при створенні географічних карт. У 1852 році Френсіс Гетрі, складаючи карту графств Англії, звернув увагу, що для того, щоб розфарбувати карту так, щоб два графства, що мають спільну границю, були забарвлені по-різному, цілком вистачає чотирьох фарб. Його брат, Фредерік, повідомив про це спостереження відомого математика Августа де Моргана, а той – математичну громадськість. Широку популярність проблема чотирьох фарб набула після того, як в 1878 році видатний математик Артур Келі повідомив, що він розмірковував над цією задачею, але так і не зумів її розв'язати[7].

Задача розфарбовування карти на площині еквівалентна аналогічній задачі на сфері. Для простих карт як правило, достатньо і трьох кольорів, четвертий колір потрібен, наприклад, тоді, коли є одна область, оточена непарним числом інших, які дотикаються одна одної, утворюючи цикл. Теорема про п'ять фарб, що стверджує, що для правильного розфарбування плоскої карти досить п'яти кольорів, мала коротке і нескладне доведення і була доведена наприкінці XIX століття. Проте обґрунтування аналогічного результату у випадку чотирьох кольорів наштовхнулося на значні труднощі.

Теорема про чотири фарби була доведена в 1976 році Кеннетом Аппелем і Вольфгангом Хакеном з університету Ілінойса. Це була перша велика математична теорема, доведена за допомогою комп'ютера. Першим кроком у доведенні було обґрунтування факту, що існує певний набір з 1936 карт, жодна з яких не може містити карту меншого розміру, яка

спростовувала б теорему. К.Аппель і В. Хакен використали спеціальну комп'ютерну програму, щоб довести цю властивість для кожної з 1936 карт. Доведення цього факту зайняло сотні сторінок. Після цього К.Аппель і В.Хакен дійшли висновку, що не існує контрприкладу до теореми, тому що інакше він мав би містити якусь із цих 1936 карт. Це протиріччя говорить те, що взагалі не існує контрприкладу до відповідної теореми.

Спочатку нетрадиційне «комп'ютерне» доведення не було прийняте математичною спільнотою, оскільки його неможливо було перевірити вручну. Проте згодом воно отримало визнання, хоча у деякого з прихильників традиційних доведень ще довгий час залишалися сумніви. Щоб розвіяти їх, у 1997 році Робертсон, Сандерс, Сеймур і Томас опублікували простіше доведення, в якому використовуються аналогічні ідеї, але як і раніше виконане за допомогою комп'ютера. Крім того, в 2005 році доведення було проведене Дж. Гонтиром з використанням спеціалізованого програмного забезпечення, проте комп'ютерна частина все ще залишалася швидше предметом віри. Адже навіть перевірка роздруківок усіх програм і усіх вхідних даних не може виключити випадкові збої або приховані вади електроніки [7].

Проблема чотирьох фарб, яка на перший погляд здавалася ізольованим завданням, навіть грою, мало пов'язаною з іншими розділами математики та практичними застосуваннями, знаходить у наш час найнесподіваніші застосування. Відомо понад двадцять формулювань цієї проблеми, які пов'язують її з конкретними задачами алгебри, статистичної механіки і задачами планування. І це ще раз підкреслює всюдисущий характер математики: розв'язок задачі, що вивчається з чистої цікавості, виявляється корисним в описі реальних і абсолютно різних за своєю природою об'єктів і процесів [7].

### 3. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

#### 3.1. Основна термінологія з теми «Планарні граfi. Розфарбування графів»

**Розфарбуванням простого графа  $G$**  називають таке приписування кольорів (або натуральних чисел) його вершинам, що ніякі дві суміжні вершини не набувають однакового кольору. Найменшу можливу кількість кольорів у розфарбуванні називають **хроматичним числом** і позначають  $\chi(G)$ . Множину вершин, розфарбованих в один колір називають **одноколірним класом**. Такі класи утворюють незалежні множини вершин, тобто ніякі дві вершини в одноколірному класі не суміжні.

Очевидно, що існує розфарбування графа  $G$  в  $k$  кольорів ( $k$ -розфарбування) для будь-якого  $k$  в діапазоні  $\chi(G) \leq k \leq n$ , де  $n$  – кількість вершин графа. Очевидно, що  $\chi(K_n) = n$ , і, отже, легко побудувати граfi з як завгодно великим хроматичним числом. З іншого боку,  $\chi(G) = 1$  тоді й лише тоді, коли  $G$  – вироджений граф (тобто в ньому немає ребер);  $\chi(G) = 2$  тоді й тільки тоді, коли  $G$  – дводольний граф (тому дводольний граф називають **біхроматичним**).

Теорема 3.1. Якщо найбільший зі степенів вершин графа дорівнює  $r$ , то цей граф можна розфарбувати в  $r+1$  колір.

*Доведення.* Застосуємо індукцію за кількістю вершин графа. Нехай граф  $G$  має  $n$  вершин; вилучимо з нього довільну вершину  $v$  разом з усіма інцидентними їй ребрами. Отримаємо граф з  $n - 1$  вершиною; степінь кожної вершини не більше ніж  $r$ . За припущенням індукції цей граф можна розфарбувати в  $r+1$  колір. Отже, у  $r+1$  колір можна розфарбувати й граф  $G$ , якщо розфарбувати вершину  $v$  кольором, що відрізняється від тих, якими розфарбовано суміжні з нею вершини (а їх разом не більше ніж  $r$ ).



Із середини 19 ст. відкритою лишалась проблема, відома під назвою гіпотеза чотирьох фарб. Її формулюють так: будь-який планарний граф можна розфарбувати в чотири кольори, тобто  $\chi(G) \leq 4$  для будь-якого планарного графа  $G$ . Ця гіпотеза була «фактично» доведена у 20 ст., але ще у 1890 році Хейвуд довів, що будь-який планарний граф можна розфарбувати у п'ять кольорів.

Теорема 3.2 (Хейвуда). Будь-який планарний граф можна розфарбувати в п'ять кольорів, тобто  $\chi(G) \leq 5$  для будь-якого планарного графа  $G$ .

*Доведення.* В будь-якому простому планарному графі є вершина, степінь якої не більше за п'ять.

Застосуємо математичну індукцію за кількістю вершин графа. Теорема справджується для графів із не більше ніж п'ятьма вершинами. Припустимо, що вона справджується для графів із не більш ніж  $n$  вершинами, де  $n \geq 5$ . Розглянемо довільний плоский граф  $G$  з  $n+1$  вершиною. Він містить вершину  $v_0$ , степінь якої не більше ніж п'ять. Нехай  $W = \Gamma(v_0)$  – множина вершин, суміжних із вершиною  $v_0$  в графі  $G$ . Окремо розглянемо два випадки.

Випадок 1.  $|W| \leq 4$ . Позначимо як  $G-v_0$  граф, отриманий із графа  $G$  вилученням вершини  $v_0$  та всіх інцидентних їй ребер. За індуктивним припущенням граф  $G-v_0$  можна розфарбувати в п'ять кольорів. Зафіксуємо одне з таких розфарбувань і зафарбуємо вершину  $v_0$  в той із п'яти кольорів, який не використано для фарбування вершин із множини  $W$ .

Випадок 2.  $|W|=5$ . У множині  $W$  є дві несуміжні вершини  $v_1$  та  $v_2$ , а ні, то граф  $G(W)$ , породжений множиною вершин  $W$ , – це  $K_5$ , і тоді граф  $G$  непланарний (теорема 3.2). Граф  $G'$ , отриманий із графа  $G-v_0$  злиттям вершин  $v_1$  та  $v_2$  в одну вершину  $v$  (рис.3.1), плоский, і за індуктивним припущенням його можна розфарбувати в п'ять кольорів. Зафіксуємо одне з таких розфарбувань графа  $G'$ . Тепер у графі  $G$  розфарбуємо вершини  $v_1$  і  $v_2$  в колір вершини  $v$ , а решту вершин, відмінних від  $v_0$  – у ті самі кольори,

що й відповідні вершини графа  $G'$ . Нарешті, припишемо вершині  $v_0$  колір, не використаний для розфарбування вершини із  $W$ . ►

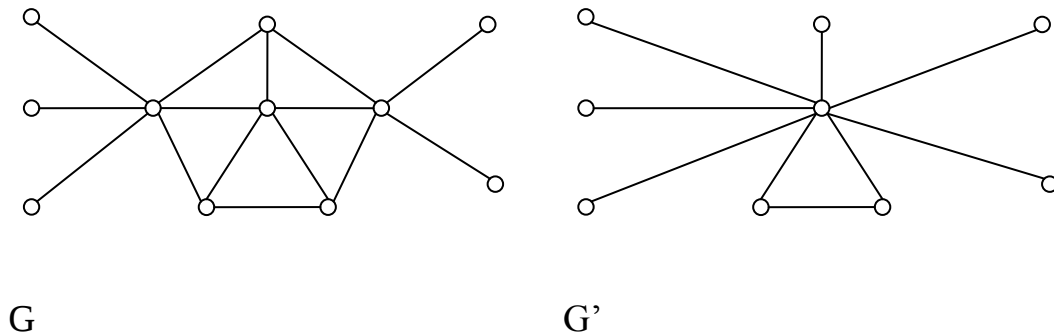


Рис. 3.1.

Американські математики Апелъ і Гайкен у 1976 році довели гіпотезу чотирьох фарб, суттєво використавши комп'ютерні обчислення. Це перший випадок, коли настільки відому математичну проблему було розв'язано за допомогою комп'ютера. Спочатку проблему було зведено до розгляду скінченної (хоча й великої) кількості випадків. Надалі список «підозрілих» графів було зменшено й за допомогою комп'ютера розфарбовано в чотири кольори планарні графи з цього списку. За різними джерелами, 1976 року це можна було зробити за 1500-2000 годин роботи потужного комп'ютера. Отже, проблему чотирьох фарб було розв'язано. Хоча сам по собі метод доведення являє собою видатне досягнення й цілком достатній, щоб припинити пошуку контрприкладу, було б добре, щоб хтось знайшов елегантніше доведення гіпотези. Найцікавіше в цьому доведенні те, що воно розширило наше уявлення про математичне доведення. Проте не всі поділяють таку думку. Опоненти вважають, що важко погодитись із таким доведенням, бо й зведення загального випадку до скінченної множини графів, і розфарбування останніх дуже важко повторити.

**Означення 3.1.** Нехай  $G$  – простий граф, а  $P_G(k)$  – кількість способів, якими можна розфарбувати вершини графа  $G$  в  $k$  кольорів.  $P_G(k)$  називають **хроматичною функцією** графа  $G$ .

Для повного графа  $K_n$  виконується рівність  $P_G(k) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$ . Справді, для першої вершини є  $k$  варіантів кольору. Оскільки друга вершина суміжна з першою, то її можна розфарбувати в один з  $(k-1)$  кольорів. Третя вершина суміжна з першою і другою, тому для неї є  $(k-2)$  варіантів кольорів. Продовжуючи ці міркування, доходимо висновку, що для останньої вершини залишиться  $(k-n+1)$  варіантів вибору кольору.

Якщо  $k < \chi(G)$ , то  $P_G(k) = 0$ , а для  $k \geq \chi(G)$  виконується нерівність  $P_G(k) > 0$ . Гіпотеза чотирьох фарб еквівалентна такому твердженню: якщо  $G$  – простий планарний граф, то  $P_G(4) > 0$ . Якщо задано довільний простий граф, то в загальному випадку важко отримати його хроматичну функцію за допомогою простих міркувань. Наступна теорема й наслідок з неї дають систематичний метод отримання хроматичної функції простого графа у вигляді суми хроматичних функцій повних графів.

Теорема 3.3. Нехай  $G$  – простий граф, а  $v$  та  $w$  – його несуміжні вершини. Якщо граф  $G_1$  отримано з  $G$  за допомогою з'єднання вершин  $v$  та  $w$  ребром, а граф  $G_2$  – ототожненням вершини  $v$  та  $w$  (і кратних ребер, якщо їх буде одержано), то  $P_G(k) = P_{G_1}(k) + P_{G_2}(k)$ .

*Доведення.* За будь-якого допустимого розфарбування вершин графа  $G$  існує альтернатива:  $v$  та  $w$  мають або різні кольори, або той самий. Кількість розфарбувань, за яких  $v$  та  $w$  мають різні кольори, не зміниться, якщо долучити ребро  $(v, w)$ . Отже, ця кількість дорівнює  $P_{G_1}(k)$ . Аналогічно, кількість розфарбувань, за яких  $v$  та  $w$  мають один колір, не зміниться, якщо ототожнити  $v$  та  $w$ . Отже, ця кількість дорівнює  $P_{G_2}(k)$ . Залишилося застосувати комбінаторне правило суми. Теорему доведено.

На рис. 3.2 зображено графи  $G$ ,  $G_1$  та  $G_2$ .

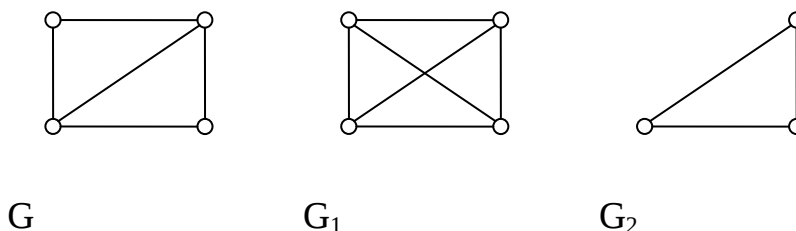


Рис. 3.2.

Наслідок. Хроматична функція простого графа – поліном.

Тепер ми будемо називати  $P_G(k)$  **хроматичним поліномом**. Зазначимо деякі властивості хроматичного полінома.

- Якщо граф  $G$  має  $n$  вершин, то степінь полінома  $P_G(k)$  дорівнює  $n$ .
- Коефіцієнт при  $k^n$  дорівнює 1, а при  $k^{n-1}$  дорівнює  $-m$ , де  $m$  – кількість ребер графа  $G$ .
- Знаки коефіцієнтів чергуються.
- Вільний член хроматичного полінома дорівнює 0.

Хроматичний поліном будують на основі теореми 29.5 у вигляді суми хроматичних поліномів повних графів.

Наприклад, на рис. 3.3 зображено процес побудови хроматичного полінома, де знаки « $=$ » та « $+$ » мають умовний зміст

$$P_G(k) = k(k-1)(k-2)(k-3) + 2k(k-1)(k-2) + k(k-1) = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k.$$

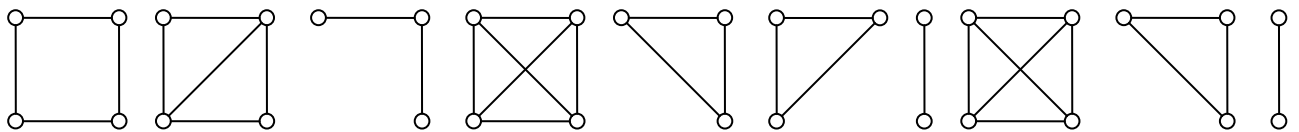


Рис. 3.3.

**3.2. Алгоритм програми тренажеру з теми «Планарні графи.  
Розфарбування графів» дистанційного навчального курсу  
«Дискретна математика»**

1. Що таке планарний граф?

- a) Граф, який містить лише парні числа вершин
- b) Граф, який можна намалювати на площині без перетину ребер
- c) Граф, що має лише одну вершину

Відповідь: b) Граф, який можна намалювати на площині без перетину ребер

2. Яке хроматичне число планарного графа?

- a) Завжди дорівнює 4
- b) Залежить від кількості вершин у графі
- c) Залежить від кількості ребер у графі

Відповідь: b) Залежить від кількості вершин у графі

3. Як називається найменша кількість кольорів, необхідна для правильного розфарбування планарного графа?

- a) Колірний індекс
- b) Хроматичний індекс
- c) Планарний індекс

Відповідь: b) Хроматичний індекс

4. Яка теорема стверджує, що будь-який планарний граф може бути розфарбований за допомогою не більше ніж чотирьох кольорів?

- a) Теорема Робіна
- b) Теорема Ейлера
- c) Теорема чотирьох кольорів

Відповідь: c) Теорема чотирьох кольорів

5. Як називається послідовність кольорів, яка використовується для розфарбування вершин графа?

- a) Колірна послідовність

b) Хроматична послідовність

c) Планарна послідовність

Відповідь: b) Хроматична послідовність

6. Як називається хроматичне число графа, що має найбільшу кількість вершин?

a) Хроматичне число

b) Хроматичний індекс

c) Кількість хроматичних вершин

Відповідь: a) Хроматичне число

7. Як називається граф, у якого всі ребра перетинаються лише у вершинах?

a) Планарний граф

b) Замкнений граф

c) Перев'язний граф

Відповідь: a) Планарний граф

8. Якість правильного розфарбування графа перевіряється за допомогою:

a) Хроматичного числа

b) Перевірки суміжних вершин

c) Хроматичної послідовності

Відповідь: b) Перевірки суміжних вершин

9. Якість правильного розфарбування планарного графа називається:

a) Колірна відповідність

b) Хроматична послідовність

c) Правильне розфарбування

Відповідь: c) Правильне розфарбування

10. Чи можна розфарбувати будь-який планарний граф за допомогою трьох кольорів?

a) Так, завжди достатньо трьох кольорів

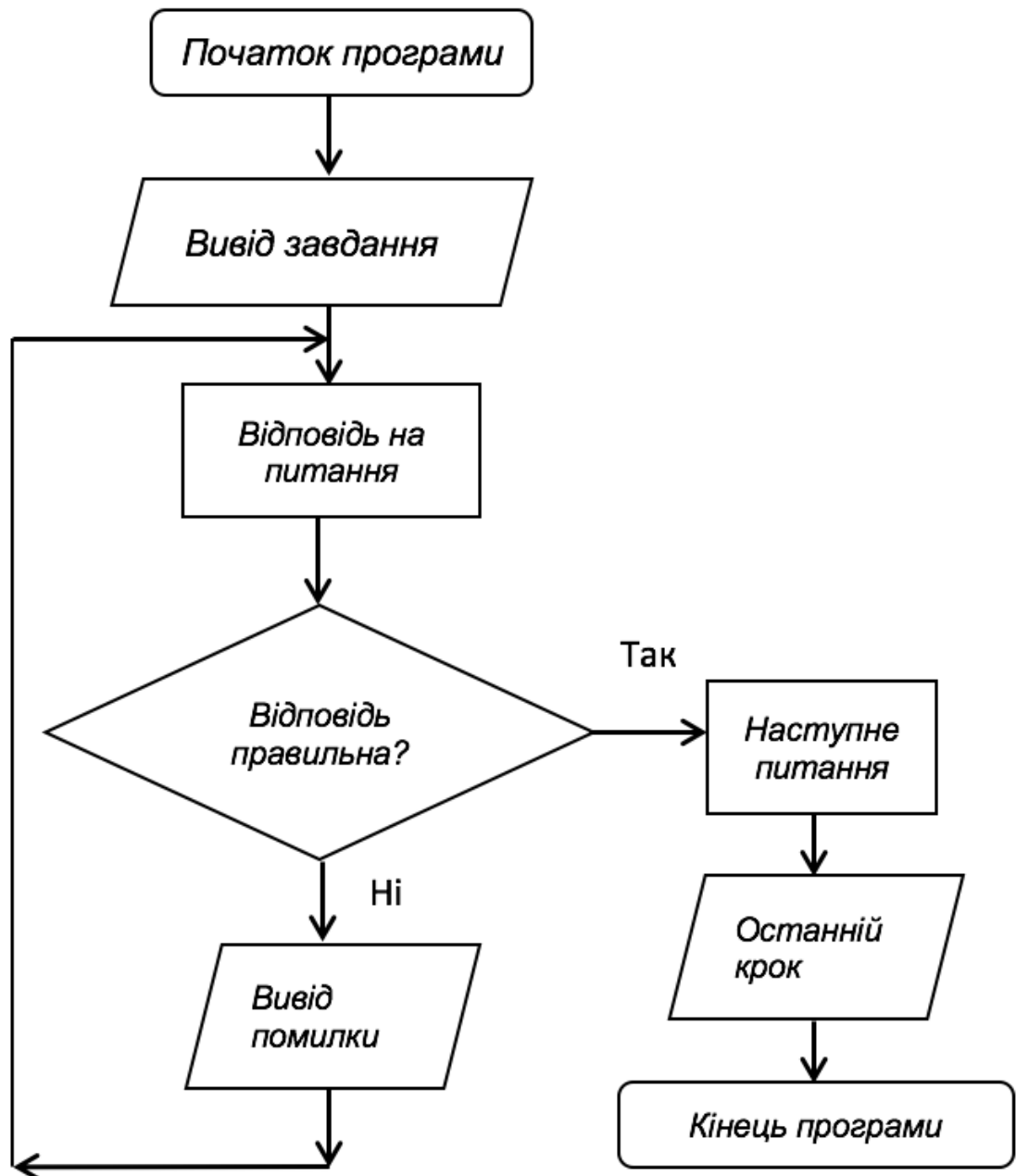
b) Ні, потрібно не менше чотирьох кольорів

c) Залежить від кількості вершин у графі

Відповідь: b) Ні, потрібно не менше чотирьох кольорів

Після завершення десятого кроку, користувач переходить на останню сторінку тренажеру, де відображено: «Ви успішно пройшли тренажер з теми «Планарні граfi. Розфарбування графів» дистанційного курсу «Дискретна математика».

### 3.3. Блок-схема тренажеру



## 4. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

### 4.1 Опис програмної реалізації

Додаток реалізовано на мові програмування Visual Basic, в середовищі розробки Visual Studio. (рис. 4.1)

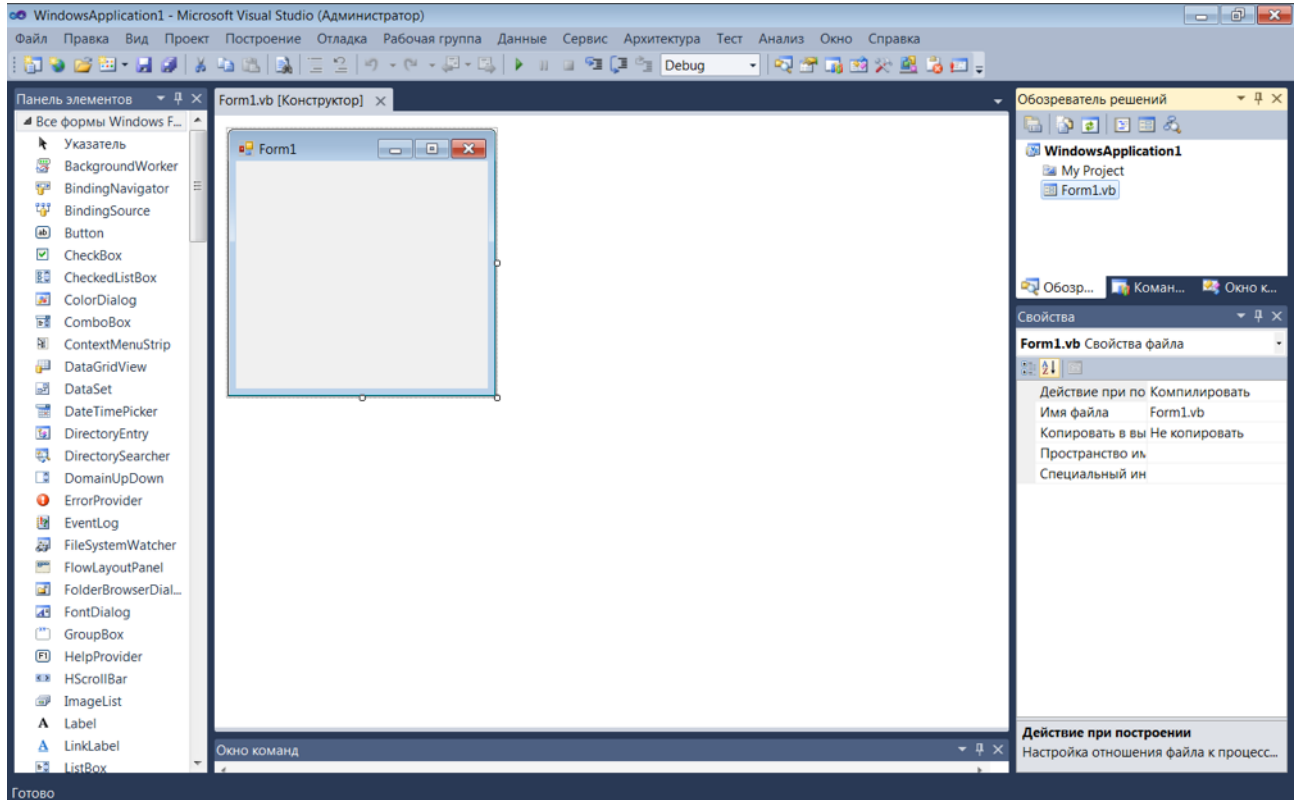


Рисунок 4.1 – Середовище Visual Studio.

Далі, триває процес розробки стартової форми тренажеру (рис. 4.2)

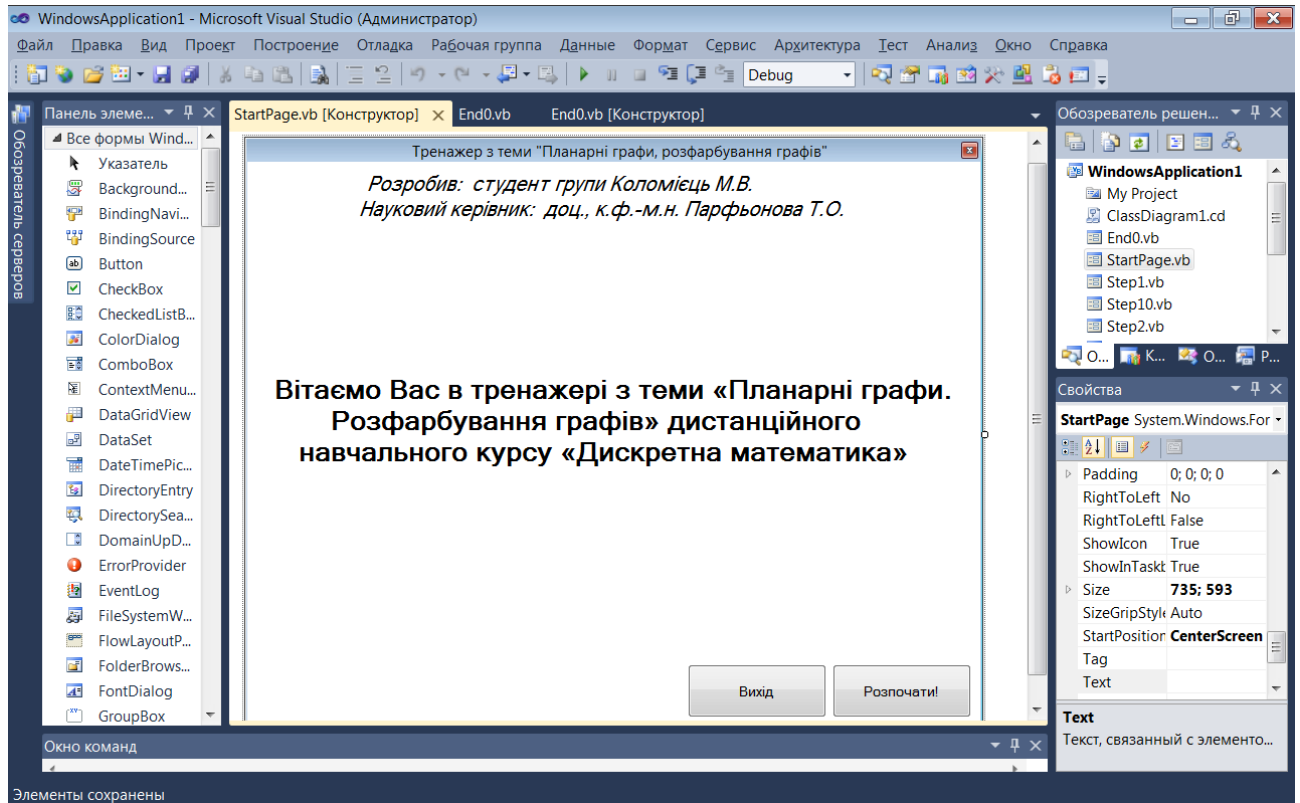


Рисунок 4.2 – стартова форма тренажеру.

Після стартової форми, потрібно запрограмувати перше питання з теми тренажеру, це буде перший крок алгоритму (рис. 4.3)

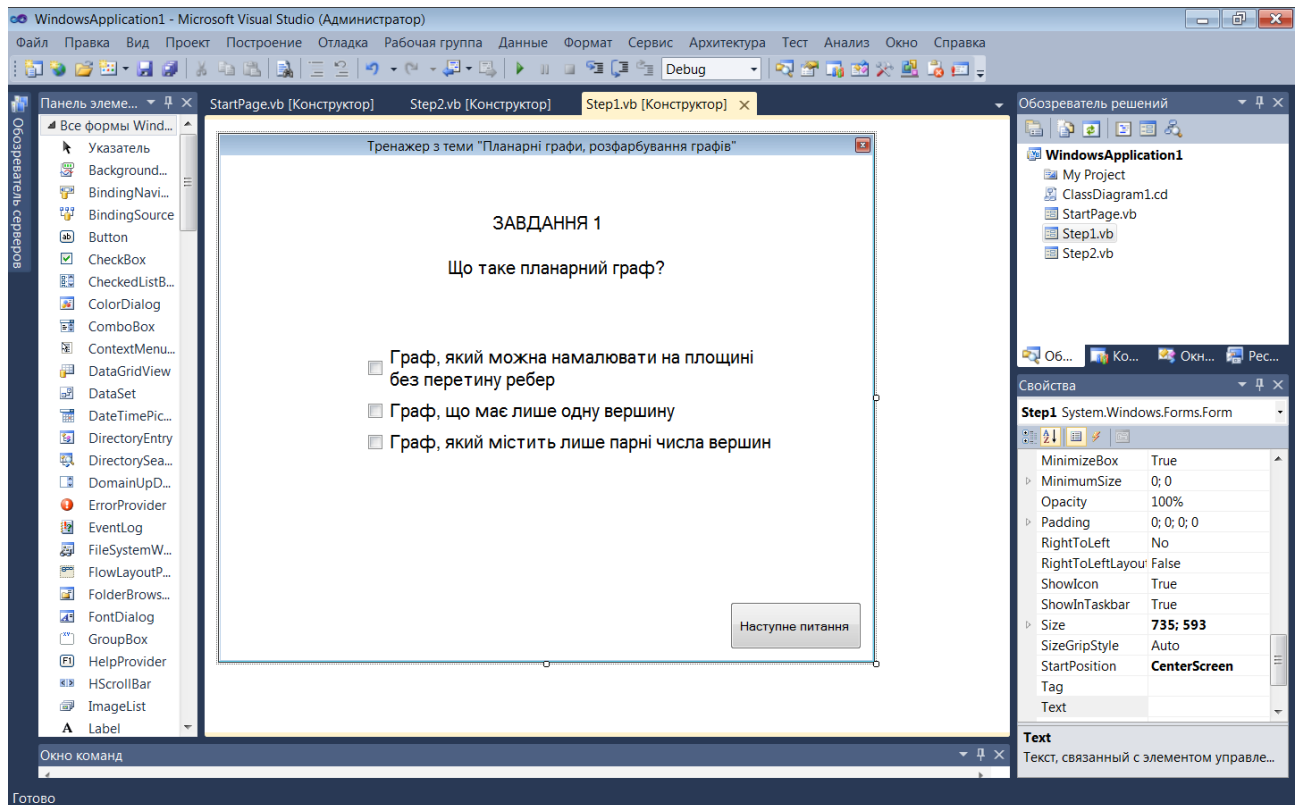


Рисунок 4.3 – перший крок алгоритму тренажеру.

Потім, після першого кроку, потрібно реалізувати другий крок з теми тренажеру (рис. 4.4)

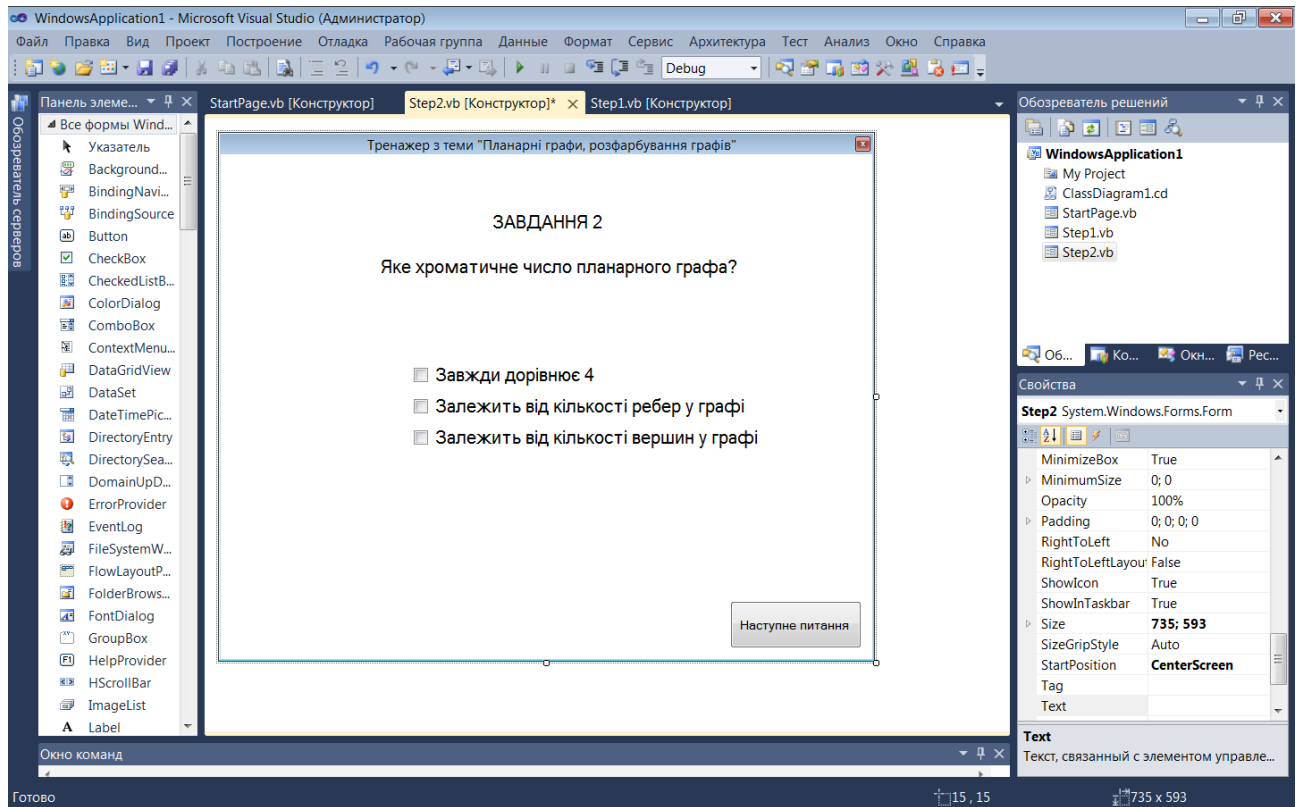


Рисунок 4.4 – второй шаг алгоритма тренажера.

## 4.2. Інструкція по використанню навчального тренажеру

Після відкриття програми тренажеру користувачу відкривається титульна сторінка (рис. 4.5)

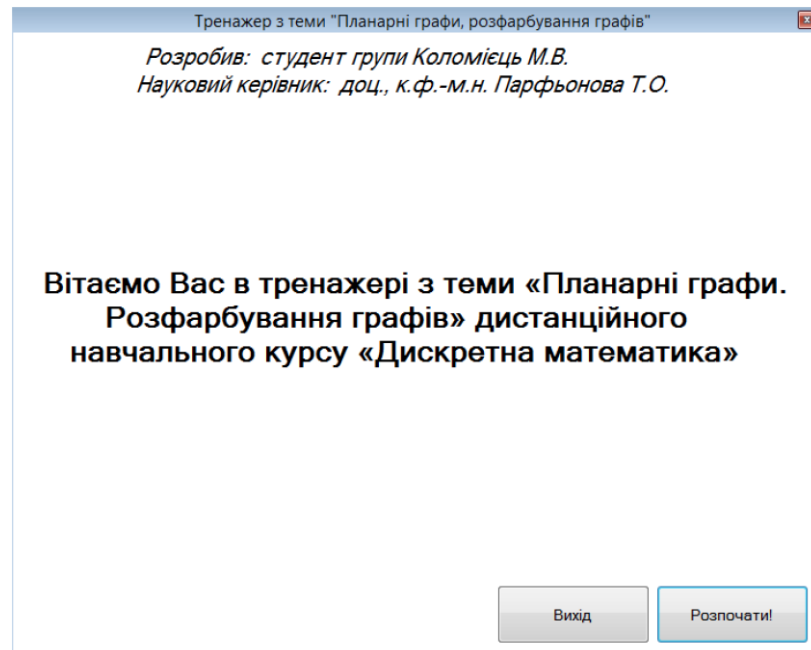


Рисунок 4.5 – Титульна сторінка.

Після натискання кнопки на формі «Розпочати!», користувачу відкривається перше питання, він може відповісти натиснувши на будь який варіант відповіді на питання (рис. 4.6)

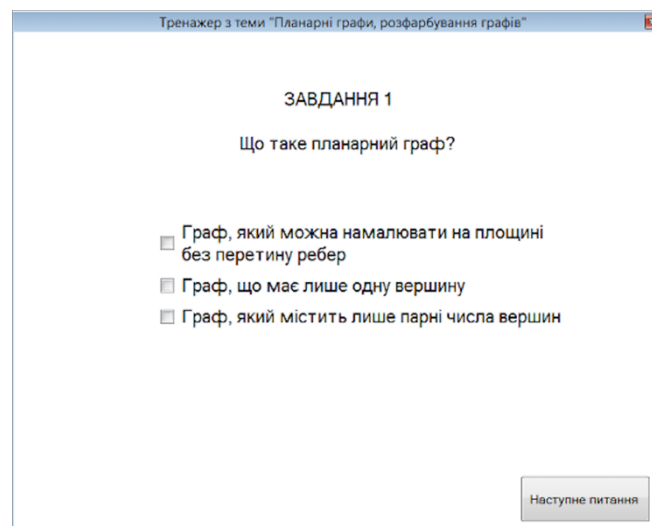


Рисунок 4.6 – Перше питання.

Після того, як студент обрав свою відповідь, він натискає кнопку «Далі», і якщо обрана відповідь є правильною, відобразиться додаткове вікно (рис. 4.7).

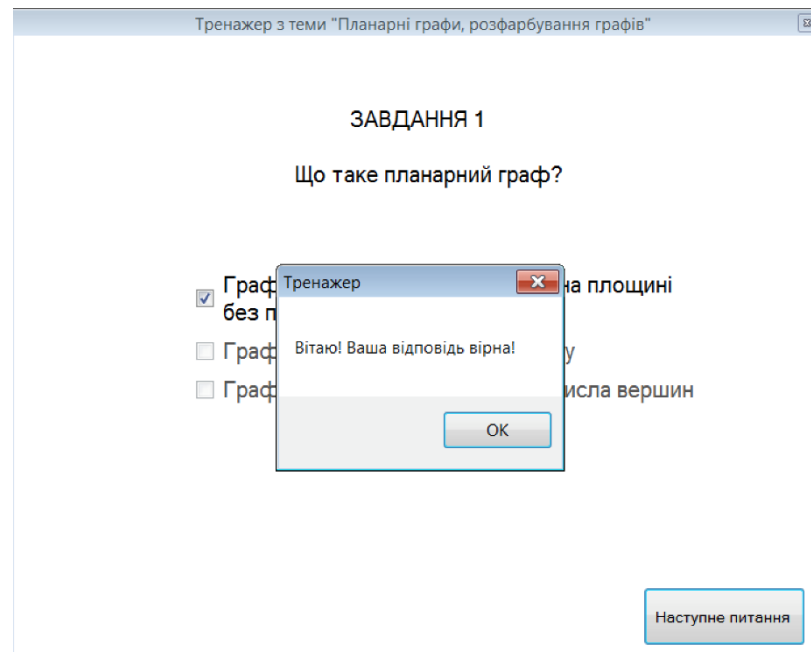


Рисунок 4.7 – Вікно правильної відповіді.

Якщо студент надав неправильну відповідь, відобразатиметься повідомлення про помилку (рис. 4.8).

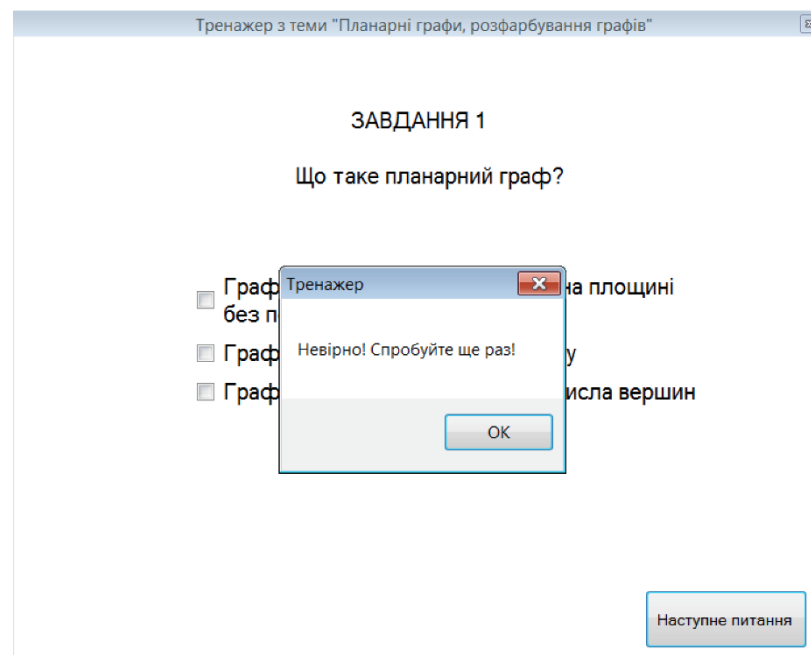


Рисунок 4.8 – Вікно з помилкою.

Після правильної відповіді, користувач переходить до наступного питання з теми. (рис. 4.9)

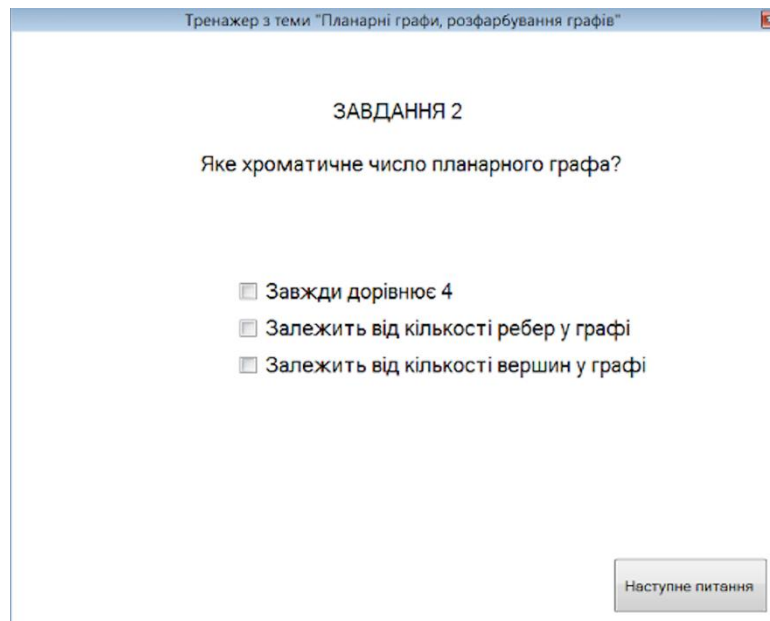


Рисунок 4.9 – Вікно питання номер 2.

Потім після правильної відповіді користувачу відкриється питання номер 3 (рис. 4.10).

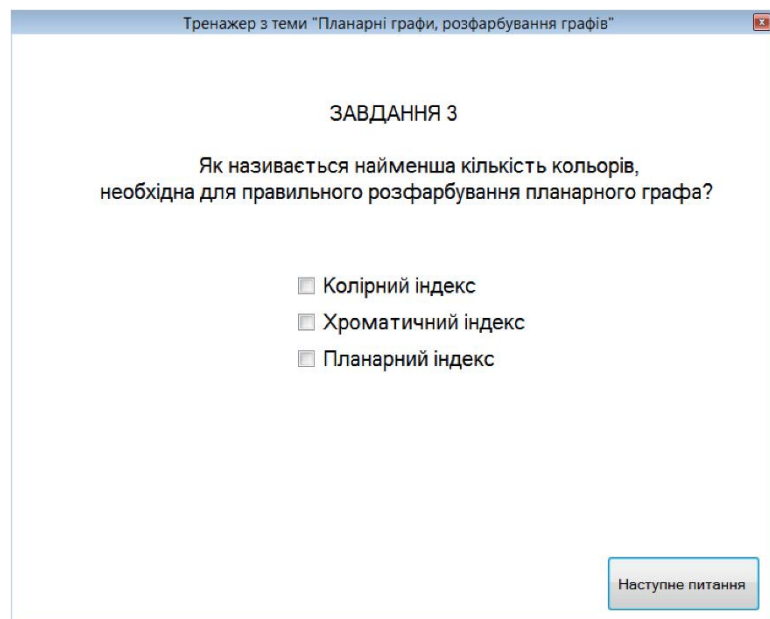


Рисунок 4.10 – Вікно питання номер 3.

Після 3 питання користувачу по порядку відкривається 4 питання з теми (рис. 4.11).

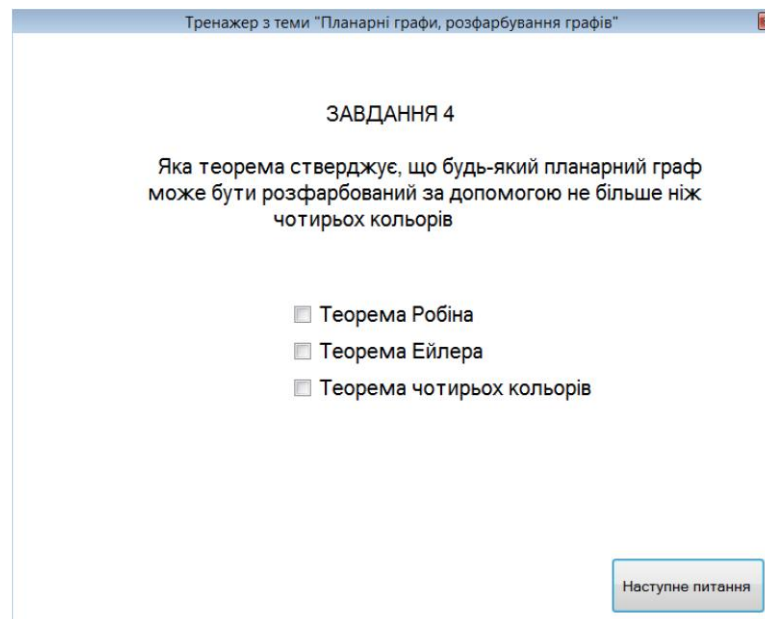


Рисунок 4.11 – Вікно питання номер 4.

Якщо користувач вибрав правильний варіант відповіді, йому відкриється питання номер 5 (рис. 4.12).

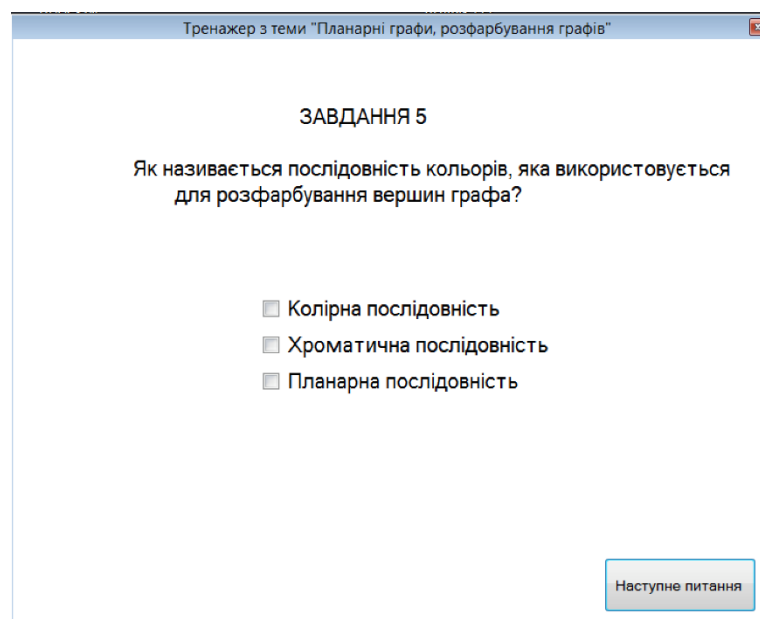


Рисунок 4.12 – Вікно питання номер 5.

Після 5 питання, по порядку відкривається питання номер 6 (рис. 4.13)

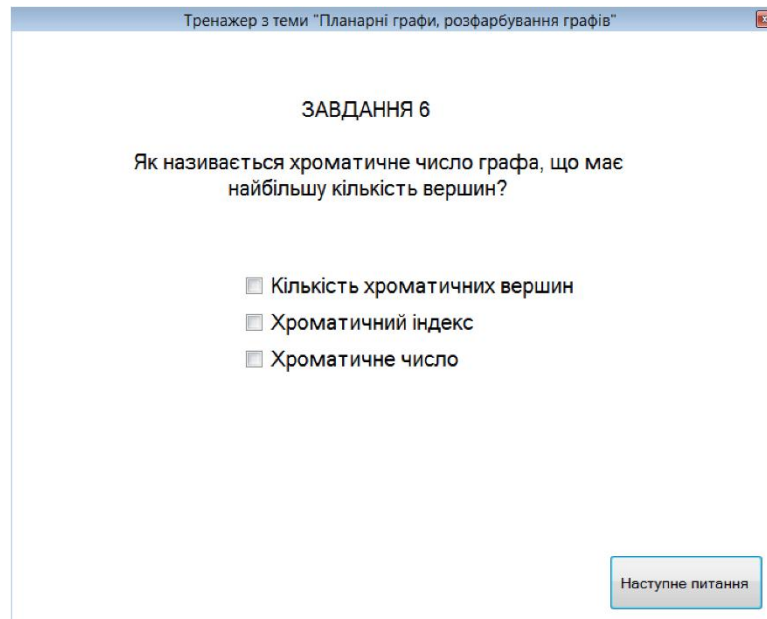


Рисунок 4.13 – Вікно питання номер 6.

Потім користувачеві відкривається питання номер 7 (рис. 4.14)

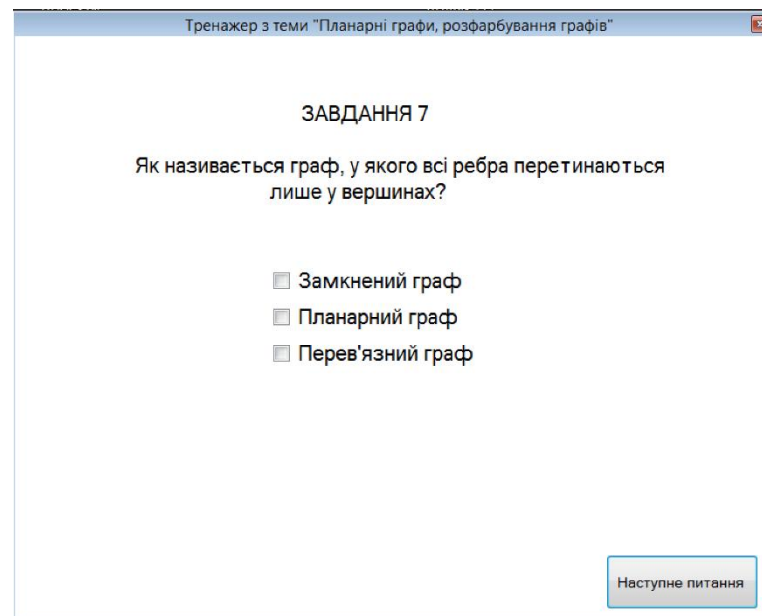


Рисунок 4.14 – Вікно питання номер 7.

Потім користувачеві відкривається питання номер 8 (рис. 4.15)

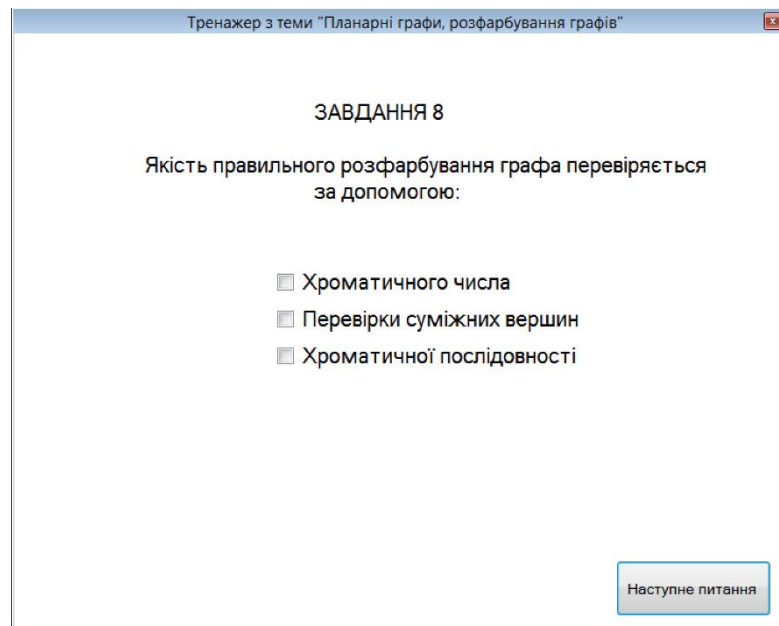


Рисунок 4.15 – Вікно питання номер 8.

Потім користувачеві відкриється питання номер 9 (рис. 4.16)

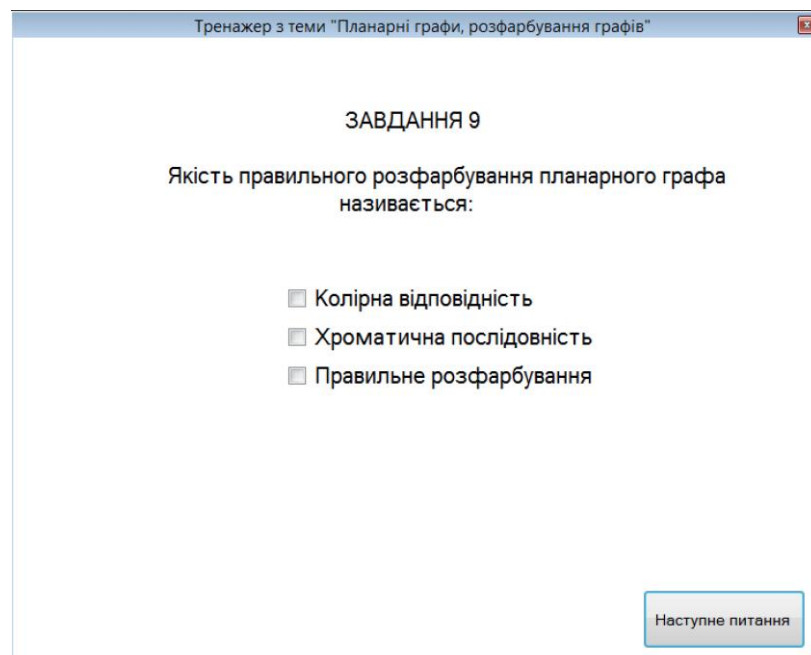


Рисунок 4.16 – Вікно питання номер 9.

Потім користувачеві відкриється питання номер 10 (рис. 4.17)

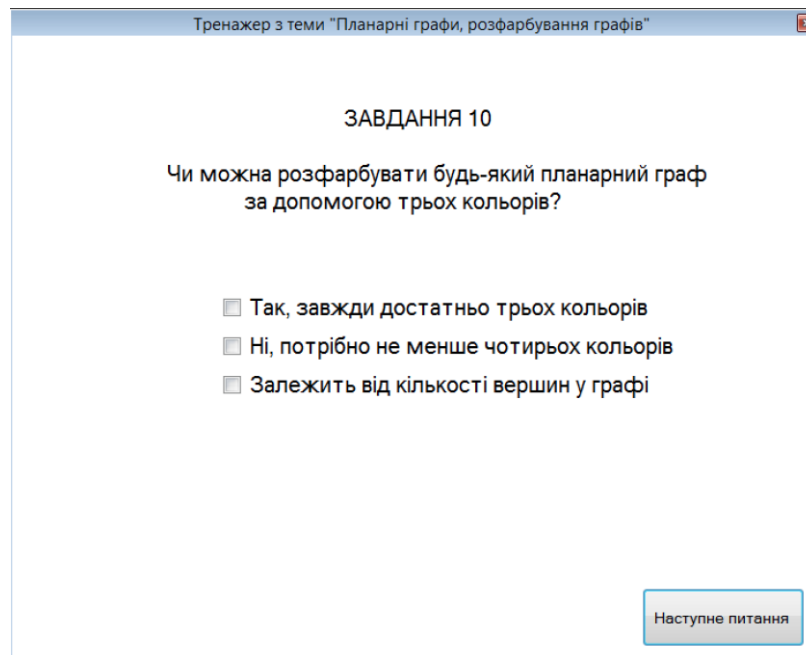


Рисунок 4.17 – Вікно питання номер 10.

Після відповіді на десяте питання, користувач активує кнопку "ОК", відкриваючи фінальне вікно тренажеру. Там відображається привітання, а також доступні кнопки для завершення або повторення тренінгу. (рис. 4.18)

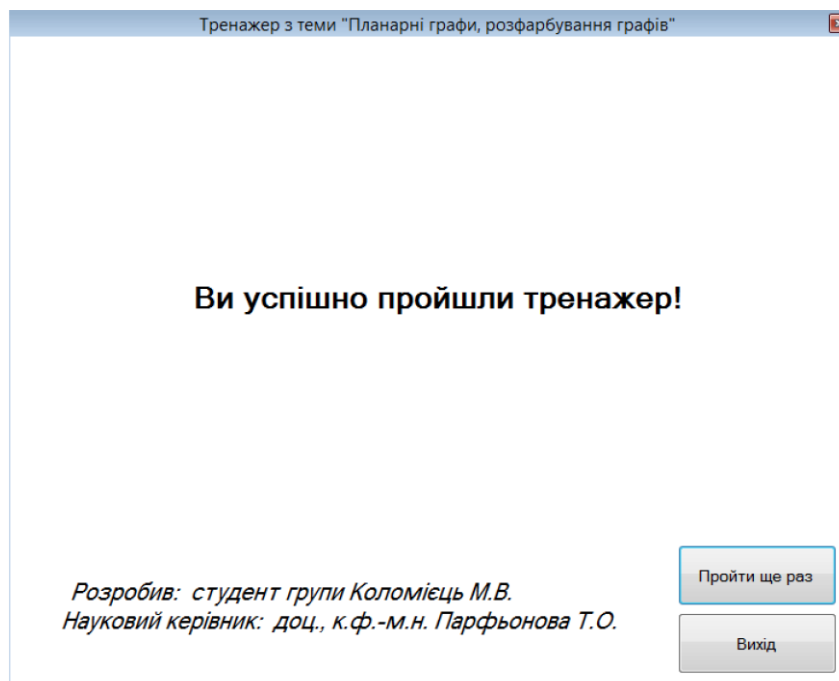


Рисунок 4.18 – Фінальне вікно тренажеру.

### 4.3. Обґрунтування вибору програмних засобів

Visual Basic .NET — найсучасніша BASIC-базована мова програмування. Станом на лютий 2022 року найновішою є версія VB.NET 2022 — частина VS 2022.

Працює ця мова на базі .NET- фреймворку (працює за допомогою CLR), для роботи з яким також розроблена мова програмування C#, до 2005 року існувала J#, а починаючи з 2010 додана F#. З виходом .Net Core шаблони для VB.NET не були включені, тобто на ньому можна було писати тільки для .NET Framework, а для .Net Core тільки деякі бібліотеки, що викликало думку, що розвиток мови припинений, але з виходом .Net 5 додані усі шаблони за винятком Unity-проектів, для яких і надалі може слугувати як мова розробки бібліотек.

VB.NET — є першою з сімейства повністю об'єктноорієнтованою мовою, у ній підтримується всі основні принципи ООП, за винятком множинного успадкування.

## ВИСНОВКИ

Отже, дистанційне навчання в парі з програмами тренажерами є потужними інструментами, які впливають на освіту і розвиток суспільства. Завдяки важливості та перевагам дистанційного навчання, воно стає все більш популярним і необхідним у сучасному світі.

Дистанційне навчання також стимулює використання інноваційних технологій в освітньому процесі, збагачує навчальні матеріали різноманітними мультимедійними ресурсами і сприяє активній взаємодії між викладачами та студентами. Крім того, воно розширює можливості для міжнародного співробітництва та обміну знаннями, зокрема через віртуальні платформи співпраці.

Однак, важливо зазначити, що дистанційне навчання не може повністю замінити традиційну форму освіти, але воно доповнює і посилює можливості навчання. Варто забезпечувати якість освіти в онлайн-середовищі, забезпечувати підтримку та співпрацю між учасниками процесу, а також забезпечувати доступність технологій та інтернет-підключення для всіх студентів.

В результаті виконання кваліфікаційної роботи було створено програму тренажер з теми «Планарні графи. Розфарбування графів».

Кваліфікаційну роботу було успішно виконано, створено зручний освітній тренажер для навчання студентів на тему "Планарні графи. Розфарбування графів" в рамках дистанційного курсу "Дискретна математика".

Основні результати кваліфікаційної роботи включають:

- Використання спливаючих вікон.
- Теоретичні і практичні завдання у тренажері.
- Можливість повторного проходження тренінгу.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Черненко О. О. Курсовий проєкт із фаху: методичні рекомендації щодо оформлення пояснювальних записок до курсового проєкту для студентів спеціальності 122 Комп'ютерні науки освітня програма «Комп'ютерні науки» ступеня бакалавра, магістра / О. О. Черненко. – Полтава : ПУЕТ, 2022. – 58 с. – 1 електрон. опт. диск (CVD-ROM).
2. Дистанційна освіта [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://nus.org.ua/tags/383/>
3. Розфарбування графів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://studopedia.com.ua/1\\_135788\\_rozfarbuvannya-grafiv.html](https://studopedia.com.ua/1_135788_rozfarbuvannya-grafiv.html)
4. Розфарбування графів як математична модель [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://knowledge.allbest.ru/programming/2c0b65625a2ac69a5d43a88421306d26\\_0.html](https://knowledge.allbest.ru/programming/2c0b65625a2ac69a5d43a88421306d26_0.html)
5. Дискретна математика» розділ «Теорія графів» [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://elartu.tntu.edu.ua/bitstream/lib/40795/1/Kurs\\_lektsiy\\_2023.pdf](https://elartu.tntu.edu.ua/bitstream/lib/40795/1/Kurs_lektsiy_2023.pdf)
6. Методи розфарбування графів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://ukrbukva.net/119656-Metodi-rozfarbuvannya-graf-v.html>
7. Алгоритми визначення мінімальної кількості кольорів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://jait.donnu.edu.ua/article/view/14008>
8. Розділ “ елементи теорії графів” [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://nmetau.edu.ua/file/072.pdf>
9. Алгоритм розкладання графів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/1165/1/60\\_02.pdf](https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/1165/1/60_02.pdf)
10. Алгоритм послідовної розмальовки графа [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.mathros.net.ua/algorytm-poslidovnoi-rozmalovky-grafa.html>

11. Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання: ДСТУ 7.1-2006. – [Чинний від 2007-07-01]. – К. : Держспоживстандарт України, 2007. – 47 с.
12. Microsoft Visual Studio [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Microsoft\\_Visual\\_Studio](https://uk.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Visual_Studio)
13. Microsoft Visual Basic [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Visual\\_Basic](https://uk.wikipedia.org/wiki/Visual_Basic)
14. Програмування на Visual BASIC [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://kursoviks.com.ua/bd\\_kompyuterni/article\\_post/65-lektsiya-osnovi-programuvannya-movoyu-visual-basic-6-0](https://kursoviks.com.ua/bd_kompyuterni/article_post/65-lektsiya-osnovi-programuvannya-movoyu-visual-basic-6-0)
15. Microsoft Visual Basic 2010 Step by Step [Електронний ресурс]. – Режим доступу:  
[https://books.google.com.ua/books?hl=uk&lr=&id=Ap9CAwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT18&dq=visual+basic&ots=n5NfMNuX8q&sig=8OFek2tHiXjaKynsUtD6SgQKabY&redir\\_esc=y#v=onepage&q=visual%20basic&f=false](https://books.google.com.ua/books?hl=uk&lr=&id=Ap9CAwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT18&dq=visual+basic&ots=n5NfMNuX8q&sig=8OFek2tHiXjaKynsUtD6SgQKabY&redir_esc=y#v=onepage&q=visual%20basic&f=false)
16. Розфарбовування графів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://repository.sspu.edu.ua/bitstream/123456789/410/4/Rozfarbuвання\\_graphiv.pdf](https://repository.sspu.edu.ua/bitstream/123456789/410/4/Rozfarbuвання_graphiv.pdf)
17. Опис редактору Visual Basic [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://studfile.net/preview/7785340/>
18. Randolph Visual Studio 2010 for professionals // Randolph, Nick, Gardner, David, Minutillo, Michael, Anderson, Chris.: Trans. with English - М.: LLC "I.D. Williams", 2011. - 1184 p.
19. Appleman D. E72 Win32 API and Visual Basic. For professionals (+SD) / D. Appleman. - Peter, 2002. - 1120 p.
20. Halvorson M. Microsoft Visual Basic 2005. Series "Step by step" / M. Halvorson. - ECOM Publishers. - 640 p.

**ДОДАТОК А. КОД ПРОГРАМИ**