ACADEMIA DE TRANSPORTURI, INFORMATICĂ ŞI COMUNICAŢII

INSTITUTUL DE CIBERNETICĂ ACADEMIA NAŢIONALĂ DE ŞTIINŢĂ A UCRAINEI

MODELARE MATEMATICĂ, OPTIMIZARE ŞI TEHNOLOGII INFORMAŢIONALE

Materialele Conferinţei Internaţionale

Chişinău,
19 – 23 martie 2012

EDIŢIA A III-A

Материалы 3-й международной конференции

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ОПТИМИЗАЦИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Кишинэу,

19 – 23 марта 2012 г.

Chişinău * Evrica * 2012

ACADEMIA DE TRANSPORTURI, INFORMATICĂ
ŞI COMUNICAŢII

INSTITUTUL DE CIBERNETICĂ
ACADEMIA NAŢIONALĂ DE ŞTIINŢĂ A UCRAINEI

MODELARE MATEMATICĂ, OPTIMIZARE ŞI TEHNOLOGII INFORMAŢIONALE

Materialele Conferinţei Internaţionale

**Chişinău,
19 – 23 martie 2012**

EDIŢIA A III-A

Материалы 3-й международной конференции

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ОПТИМИЗАЦИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

**Кишинэу,
19 – 23 марта 2012**

Chişinău • Evrica • 2012

CZU 519.711:004(082)=00
M 84

DESCRIEREA CIP A CAMEREI NAȚIONALE A CĂRȚII

„Modelare matematică, optimizare şi tehnologii informaţionale", conf. intern. (2012; Chişinău). Modelare matematică, optimizare şi tehnologii informaţionale: Materialele Conf. Intern., 19-21 mai 2012, Chişinău / col. red.: Dumitru Lozovanu, Evghenii Nurminschi, Petru Stețiuc [et al.]; red. resp.: Dumitru Solomon. – Ed. a 3-a. – Ch.: Evrica, 2012 (Tipogr. AŞM). – 576 p.

Antetit.: Acad. de Transporturi, Informatică şi Comunic., Inst. de Cibernetică, Acad. Naț. de Știință a Ucrainei.–Texte: lb. rom., engl., fr., rusă. – Bibliogr. la sfârşitul art. – 150 ex.

ISBN 978-9975-941-88-4.

– *1.Modelare matematică. 2. Informatică*

519.711:004(082)=00
M 84

Prezenta lucrare conține articole ştiințifice din domeniul modelării matematice, metodelor de optimizare, controlului optimal şi tehnologiilor informaționale. cu aplicații în economia, managementul şi tehnologia transporturilor.

M–208–96
ISBN ISBN 978-9975-941-88-4

ОПТИМИЗАЦИЯ НА НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВАХ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

О.А. ЕМЕЦ, А.О. ЕМЕЦ, Т.А. ПАРФЁНОВА,
Полтавский университет экономики и торговли,
Полтава, Украина
yemetsli@mail.ru, yemets2008@ukr.net, tapa@mail.ru

Предложен алгоритм метода ветвей и границ для задачи минимизации в нечеткой постановке. Показано применение метода ветвей и границ к комбинаторной транспортной задаче на перестановках с нечеткими данными.

Ключевые слова: *комбинаторная оптимизация, метод ветвей и границ, нечеткие множества.*

Не смотря на потребности практики, задачи комбинаторной оптимизации на нечетких множествах еще не нашли достаточного исследования. Известно небольшое количество работ в этом направлении [1-12]. Для таких задач практически нет методов, которые учитывают их специфику. Поэтому актуальным является рассмотрение таких задач и методов их исследования. В работе обосновывается общий подход в рамках метода ветвей и границ (МВГ) к решению задачи минимизации в нечеткой постановке, который иллюстрируется комбинаторной транспортной задачей на перестановках с нечеткими данными.

1. Постановка задачи

Пусть есть функция $F(x)$, определенная на множестве X ($x \in X$) – нечетких чисел; $F(x) \in X$, то есть значение, которое она принимает, также являются нечетким числом. Пусть $D \subset X$ – множество допустимых нечетких чисел.

Используя операции из [5-12] (в т.ч. нахождение минимума и максимума), задача оптимизации на множестве нечетких чисел может быть сформулирована так: найти

$$\min_{x \in D} F(x)\,. \tag{1}$$

2. Метод ветвей и границ при оптимизации на нечетких множествах

Обозначим S – некоторый список (массив), n_{rec} – переменная, которая имеет смысл номера рассмотренного методом допустимого решения. Алгоритм МВГ для (1) изложен в следующих шагах.

0. $S=\varnothing$; $n_{rec}=0$. Задание допустимой области D ($D\neq\varnothing$) и целевой функции F на D.

1. Множество D разбивается на подмножества $D_1,...,D_n$ со свойствами: $D_i\neq\varnothing$; $D_i\bigcap D_j=\varnothing$ $\forall i,j\in J_n=\{1,2,...,n\}$, $D=D_1\bigcup...\bigcup D_n$. Множества $D_1,...,D_n$ считаем неразветвленными и неотсеченными. Назовем такое множество «почкой», а свойства таких множеств – «свойствами почек».

2. Каждому множеству, которое не принадлежит S и которые являются почкой, припишем оценку $\nu_i(D_i)=\nu_i\in X$ – нечеткое число со свойством $\nu_i\prec F(x)$ $\forall x\in D_i$, где знак $\prec$ – знак линейного порядка на множестве нечетких чисел X [5-12]. Дозапишем их в список S почек с оценками. Обозначим количество почек $|S|$ через n.

2. Проверка: $S=\varnothing$? Если «да» – на шаг 16. Если «нет» – на шаг 3.

3. Выбираем произвольную почку D_i.

4. Проверяем: количество элементов $|D_i|$ в множестве D_i равняется единице, $|D_i|=1$? Если «да» – на шаг 6. Если «нет» – на шаг 5.

5. Имеем $|D_i|\neq1$ (точнее, это означает $|D_i|>1$), разбиваем (разветвляем) D_i как D, перейдя на шаг 1.

6. Одноэлементную почку называем «листом», то есть $D_i=\{x_{n_{rec}}\}$, $x_{n_{rec}}\in D$. Лист D_i исключаем из S. Вычисляем $F_{n_{rec}}=F(x_{n_{rec}})$, используя операции из [5-12] для нечетких чисел.

7. Проверяем: $n_{rec}>0$? Если «нет» (то есть $n_{rec}=0$), то переход на шаг 8. Иначе (то есть $n_{rec}>0$) – на шаг 14.

8. Присваиваем точке, которая даст рекордное значение целевой функции, точку x_0; $n_{rec} = 1$.

9. Задаем $i = 1$ (организовываем начало цикла перебора почек).

10. Проверка: $\nu_i \prec F_0$? Если «да» – на шаг 12, если «нет» – на шаг 11.

11. Почку D_i исключаем из списка S. (Заметим, что при этом n не изменяется, оно изменяется только на шаге 1). Это означает отсечение почки D_i.

12. Увеличиваем на единицу i. То есть $i := i + 1$.

13. Проверка: $i > n$? Если «да» – переход на шаг 2. Если «нет» – переход на шаг 10.

14. Проверка: $F_{n_{rec}} \succ F_0$? Если «да» – переход на шаг 2. Если «нет» – переход на шаг 15.

15. Присваиваем рекорду целевой функции F_0 значение $F_{n_{rec}}$, то есть $F_0 := F_{n_{rec}}$, дальше $x_{rec} := x_{n_{rec}}$; $n_{rec} = n_{rec} + 1$. Переход на шаг 9.

16. Вывод результата: минимальное значение F_0 целевой функции и точка x_{rec}, которая его доставляет. Остановка.

Замечание. Этот алгоритм является алгоритмом МВГ вообще (то есть для четкой или нечеткой постановки задачи (1)), если определен линейный порядок $\prec$ в множестве значений целевой функции (в связи с этим в действительных числах в алгоритме такие конкретизации: на шаге 14 это $\geq$; $<$ на шаге 10).

Существенно влияет на эффективность МВГ способ ветвления допустимого множества (шаг 1 (разбиение D на почки D_i); шаг 3 – выбор D_i) и оценивание D_i (определение оценки на шаге 1). Не имеется, в силу общности задачи, рецептов, которые бы действовали эффективно во всех случаях. Способы ветвления, отсечения, оценивания определяются спецификой класса задач, который рассматривается. Отсечение происходит, как видно по алгоритму, по аналогии с классическим для МВГ условием: если $\nu_i(D_i) \prec F_0$ не выполняется, то D_i – отсекается.

3. Решение МВГ комбинаторной транспортной задачи на перестановках (КТЗП) в нечеткой постановке

Как известно [10-11], КТЗП в нечеткой постановке имеет вид: найти минимум

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (2)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \prec a_i \quad \forall i \in J_m , \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \succ b_j \quad \forall j \in J_n , \qquad (4)$$

$$x = (x_{11},...,x_{mn}) \in E_k(G) , \qquad (5)$$

где c_{ij}, a_i, b_j, x_{ij} – нечеткие числа [5-12], их минимум, сумма, произведение, линейный порядок $\prec$ определены в [5-12], m, n, k – натуральные постоянные, а $E_k(G)$ – множество нечетких перестановок [5-12], $m \cdot n = k$, $G = \{g_1,...,g_k\}$ – мультимножество возможных объемов перевозок, $J_m = \{1,2,...,m\}$ – как и раньше множество первых m натуральных чисел.

Заметим, что по экономическому содержанию задачи элементы носителей чисел c_{ij}, a_i, b_j, g_t являются положительными.

Рассмотрим способ разбиения D на почки D_i. Упорядочим тарифы c_{ij}, $\forall i \in J_m$, $\forall j \in J_m$:

$$c_{i_1\tau_1} \succ c_{i_2\tau_2} \succ ... \succ c_{i_k\tau_k} ; \qquad (6)$$

переобозначив их так

$$c_1^* \succ c_2^* \succ \ldots \succ c_k^* . \qquad (7)$$

Тут i_l – это номер строки, а τ_l – номер столбца транспортной таблицы, в которых стоит тариф $c_{i_l j_l} = c_l^*$, что в упорядочении (7) стоит на l-тому месте.

Пусть объемы перевозок g_j, которые составляют мультимножество $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$, пронумерованы согласно порядка:

$$g_1 \prec g_2 \prec \ldots \prec g_k . \qquad (8)$$

Переобозначим это для удобства дальнейшего изложения так: $g_1^0 \prec g_2^0 \prec \ldots \prec g_k^0$, $G^0 = G$.

Почки образуем в таком порядке. Множество D разбивается на подмножества согласно порядка:

D_1 – это подмножество D, где $x_{i_1 j_1} = g_k^0$;

D_2: $x_{i_1 j_1} = g_{k-1}^0$;

...

D_i: $x_{i_1 j_1} = g_{k-i+1}^0$;

...

D_k: $x_{i_1 j_1} = g_1^0$.

Выбор номера i почек первого уровня $D_1, \ldots, D_k$ на шаге 3 МВГ происходит последовательно от 1-ой до k-ой.

Если выбрана почка первого уровня $D_i = D_{\tau_1}$, то на шаге 5 она рассматривается как D. Это означает следующее. Образуется разность мультимножества G и $\{g_{k-i+1}\}$, которая используется в качестве $G^1 = G^0 - \{g_{k-\tau_1+1}^0\}$, где $G^1 = \{g_1^1, \ldots, g_{k-1}^1\}$, и элементы в G^1 пронумерованы так: $g_1^1 \prec \ldots \prec g_{k-1}^1$. Почки второго уровня образуются в таком порядке:

$(D_{\tau_1})_1 = D_{\tau_1 1}$ – это подмножество множества D_{τ_1}, в котором $x_{i_2 j_2} = g^1_{k-1}$.

$(D_{\tau_1})_2 = D_{\tau_1 2}$, это подмножество множества D_{τ_1}, в котором $x_{i_2 j_2} = g^1_{k-2}$.

...

$D_{\tau_1\tau_2}$: это подмножество множества D_{τ_1}, в котором $x_{i_2 j_2} = g^1_{k-\tau_2}$.

...

$D_{\tau_1(k-1)}: x_{i_2 j_2} = g^1_1$.

Выбор номера τ_2 почек второго уровня $D_{\tau_1\tau_2}$ на шаге 3 МВГ происходит последовательно от $\tau_2 = 1$ до $\tau_2 = k-1$.

Если на шаге 1 выбрана почка r-го уровня $D_{\tau_1\tau_2...\tau_r}$, которая на шаге 5 рассматривается как D, то это означает следующее.

Образуются разность G^{r} мультимножеств $\mathrm{G}^{\mathrm{r-1}}$ и $\{g^{r-1}_{k-\tau+1}\}$, то есть $\mathrm{G}^{\mathrm{r}} = \mathrm{G}^{\mathrm{r-1}} - \{g^{r-1}_{k-\tau+1}\}$, где $\mathrm{G}^{\mathrm{r}} = \{g^r_1, ..., g^r_{k-r}\}$, и элементы G^{τ} упорядочены так: $g^r_1 \prec ... \prec g^r_{k-r}$.

Почки $(r+1)$-го уровня образуются в таком порядке:

$(D_{\tau_1\tau_2...\tau_r})_1 = D_{\tau_1\tau_2...\tau_r 1}$ – это подмножество $D_{\tau_1...\tau_r}$, когда $x_{i_{\tau_r} j_{\tau_r}} = g^r_{k-r}$;

$(D_{\tau_1\tau_2...\tau_r})_2 = D_{\tau_1\tau_2...\tau_r 2}: x_{i_{\tau_r} j_{\tau_r}} = g^r_{k-r-1}$;

...

$D_{\tau_1\tau_2...\tau_r\tau_{r+1}}: x_{i_{\tau_r} j_{\tau_r}} = g^r_{k-r-\tau_{r+1}+1}$;

...

$D_{\tau_1\tau_2...\tau_r(k-r)}: x_{i_{\tau_r} j_{\tau_r}} = g^r_1$.

Ясно, что уровней почек не больше чем k.

Понятно, что некоторые почки будут пустыми, поскольку для них может не выполнятся одно из ограничений в (3).

Замечание. Вместо (6)-(8) можно использовать любой линейный порядок на множестве тарифов объемов перевозок.

Замечание. Легко видеть, что для нечетких чисел с дискретным носителем [5-9, 12] и суммой из [5-9, 12] пустую почку можно отсекать. То есть, если $(a+b) \prec (a+b)+c$, то, если $d = \{(d_1 \mid \mu_1),...,(d_t \mid \mu_t)\}$ $\forall i \in J_t$ $d_i \geq 0$, то

$$(a+b) \prec (a+b)+c+d. \qquad (9)$$

Другими словами, если условие (3) на некотором уровне для почки не выполнилось, то оно не выполнится для почек, которые образованы разбиением этой почки (на дальнейших уровнях).

4. Оценивание допустимых подмножеств в МВГ

Опишем, как вычисляется оценка подмножества $D_{\tau_1\tau_2...\tau_r}$ – почки r-го уровня.

Когда данные – действительные числа, свойством оценки $\xi(D)$ подмножества D, которая обеспечивает работу МВГ, является такое: если $D_i \subset D$, то $\xi(D_i) \geq \xi(D)$.

Имеет место такое утверждение.

Теорема 1. Если $D_{i_1} \supset D_{i_2} \supset ... \supset D_{i_n} = \{x\}$, то есть $|D_{i_n}| = 1$, а функционал ξ, который задан на множествах $D_{i_1},...,D_{i_n}$, такой, что $\xi(D_{i_n}) = \xi(x) = F(x)$, $\xi(D_{i_j}) \prec \xi(D_{i_{j+1}})$, $\forall j \in J_{n-1}$, то значение функционала $\xi(D)$ может быть оценкой допустимого подмножества в МВГ.

Доказательство. Из того, что $\xi(D_{i_j}) \prec \xi(D_{i_{j+1}})$ $\forall j \in J_{n-1}$ и $\xi(D_{i_n}) = \xi(x) = F(x)$ следует, $\xi(D_{i_j}) \prec F(x)$ $\forall x \in D_{i_j}$ $\forall j \in J_n$. Что надо было доказать.

Теорема 2. Если $c_\tau = \{(c_1^\tau \mid \mu_1^{c_\tau}),...,(c_k^\tau \mid \mu_k^{c_\tau})\}$, $g_t = \{(g_1^t \mid \mu_1^{g_t}),...,(g_l^t \mid \mu_l^{g_t})\}$, где $c_i^\tau \geq 0$ $\forall i \in J_n$; $g_j^t \geq 0$ $\forall j \in J_l$, то оценкой $\xi(D)$ множества D в МВГ может служить число $H(C)$, – характеристический сравнитель [7] нечеткого числа C, где

$$C = \sum_{x \in G^B} c_j x_j^B \qquad (10)$$

– значение части целевой функции, то есть тех ее слагаемых, в которых определены переменные.

Доказательство. В соответствии с формулировкой теоремы в доказательстве нечеткие числа считаются нечеткими числами с дискретным носителем. Пусть a, b – два таких нечетких числа (с дискретным носителем). Если $a \prec b$, то $H(a) \le H(b)$ (см. утверждение 7 из [7]).

Если $a \prec b$, то $a \prec b + c$, если $c = \{(c_1 \mid \mu_1), \ldots, (c_k \mid \mu_k)\}$ и $c_i \ge 0$ $\forall i \in J_k$ (см. теорему 2 из [12]).

Докажем, что за оценку можно взять характеристический сравнитель $H(C)$.

Подмножество следующего уровня в МВГ дает еще одно слагаемое в определившуюся часть целевой функции – пусть это $\Delta C = c_\tau g_t$ (заметим, что $c_\tau = \{(c_1^\tau \mid \mu_1^{c_\tau}), \ldots, (c_k^\tau \mid \mu_k^{c_\tau})\}$, $g_t = \{(g_1^t \mid \mu_1^{g_t}), \ldots, (g_l^t \mid \mu_l^{g_t})\}$, где $c_i^\tau \ge 0$ $\forall i \in J_n$; $g_j^t \ge 0$ $\forall j \in J_l$).

Докажем, что $H(C) \le H(C + \Delta C)$.

Очевидно, $C \prec C + \Delta C$. Доказано такое свойство характеристического сравнителя (см. утверждение 7 из [7]): если $a \prec b$, то $H(A) \le H(B)$. То есть $H(C)$, где C – это (10) – „частичное" значение целевой функции, которое определяет подмножество D, имеет свойство функционала $\xi(D) = H(C)$ и согласно теоремы 1 является оценкой подмножества D. Что и надо было доказать.

Замечание. Оценивание допустимых множеств, рассмотренное при решении КТЗП, как видно, не использует конкретной постановки этой задачи и, следовательно, применимо и к общей задаче (1), где D – множество нечетких перестановок.

5. Доказательство того, что МВГ дает решение задачи (1)

Справедливо такое утверждение.

Теорема 3. Изложенный МВГ применительно к задаче (1) дает ее решение, которым выступает F_0 – значение целевой функции и x_{rec} – точка, в котором оно достигается.

Доказательство. Согласно шагу 11 исключают из рассмотрения только почки D_i, в которых не выполняется условие $\nu_i(D_i) \prec F_0$.

Если $F_{n_{rec}} \prec F_0$, то на шаге 15 F_0 обновляется и стает равным $F_{n_{rec}}$, что достигается в точке x_{rec}.

Следовательно, в силу свойства оценки: $\nu(D) \prec F(x) \quad \forall x \in D$, цепочки: $F_1 \succ ... \succ F_{n_{rec}}$ и правила отсечения $\nu_i(D_i) \prec F_0$ имеем: $F_{n_{rec}} \prec F(x) \quad \forall x \in D$. Что и надо было доказать.

Вывод. Предложен алгоритм МВГ для задачи минимизации в нечеткой постановке. Проиллюстрировано применение МВГ к КТЗП с нечеткими данными.

Как направление дальнейших исследований можно указать необходимость числовых экспериментов по этому методу для установки рамок его практической применимости.

Литература.

1. Сергиенко И.В. Об одной нечеткой задаче многопараметрического выбора оптимальных решений / И.В. Сергиенко, И.Н. Парасюк, М.Ф. Каспшицкая // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – №2. – С. 3-15.
2. Сергиенко И.В. Применение понятий размытой математики для формализации и решения комбинаторных оптимизационных задач / И.В. Сергиенко, М.Ф. Каспшицкая // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – №2. – С. 158-162.
3. Серая О.В. Нечеткая задача коммивояжера / О.В. Серая // Математическое моделирование. – 2007. – №2 (17). – С. 13-15.

4. Роскладка А.А. Решение одной комбинаторной задачи упаковки с учетом неопределенности данных, описанной нечеткими числами / А.А Роскладка, А. О. Емец // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. - № 2. - С. 132-141.
5. Ємець Ол-ра О. Одна задача упакування як комбінаторна оптимізація на нечіткій множині розбиттів і її розв'язування / Ол-ра О. Ємець // Радиоэлектроника и информатика. - 2007. - № 4. - С. 150-160.
6. Емец О.А. О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности / О.А. Емец, А.А. Роскладка // Кибернетика и сист. анализ. – 2008. – №5. – С. 35-44.
7. Ємець О.О. Операції та відношення над нечіткими числами / О.О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008 – №5. – С. 39-46.
8. Ємець О.О. Побудова математичної моделі однієї комбінаторної задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами / О.О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008 – №6. – С. 25-33.
9. Донец Г.А. Постановка и решение задачи о рюкзаке с нечеткими данными / Г.А. Донец, А.О. Емец // Проблемы управления и информатики – 2009. – №5. – С. 65-76.
10. Ємець О.О. Транспортна задача на переставленнях та її розв'язування: чітка та нечітка постановки / О.О. Ємець, Т.О. Парфьонова // Український матем. конгрес – 2009. (Київ 27-29 серпня, 2009). [Електронний ресурс] – 2 с. – Режим доступу до тез: http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/Yemets.pdf. – Назва з титул. екрану.
11. Емец О.А. Операции над нечеткими числами с носителем мощности континуум для моделирования в комбинаторной оптимизации / О.А. Емец, Т.А. Парфенова // Проблемы управления и информатики. – 2010 – №2. С.86-101.
12. Ємець Ол-ра О. Деякі властивості операції суми та лінійного порядку для нечітких чисел з дискретним носієм / Ол-ра О. Ємець // Праці міжнародної молодіжної математичної школи "Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII)". – Київ: ІК НАНУ, 2011. – С. 62-63.

CUPRINS