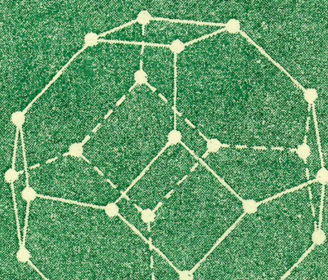
2012 International Year of Cooperatives

КОМБІНАТОРНА ОПТИМІЗАЦІЯ ТА НЕЧІТКІ МНОЖИНИ (КОНеМ – 2012)

Матеріали II всеукраїнського наукового семінару
(м. Полтава, 7–8 вересня 2012 року)



Полтава
2012

Українська Федерація інформатики
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет
економіки і торгівлі» (ПУЕТ)

КОМБІНАТОРНА ОПТИМІЗАЦІЯ ТА НЕЧІТКІ МНОЖИНИ (КОНеМ – 2012)

Програма II всеукраїнського наукового семінару
(м. Полтава, 7–8 вересня 2012 року)

Полтава
ПУЕТ
2012

УДК 519.7+519.8
ББК 22.18
К63

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ

К63 Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНеМ – 2012) : матеріли II всеукраїнського наукового семінару (м. Полтава, 7–8 вересня 2012 р.) / за ред. д.ф.-м.н., проф. О. О. Ємця. – Полтава : ПУЕТ, 2012. – 84 с.
ISBN 978-966-184-177-1

Збірник тез семінару включає сучасну проблематику в таких галузях, як комбінаторна оптимізація та суміжні питання, математичне моделювання і обчислювальні методи, теорія та застосування нечітких множин, сучасні проблеми оптимізації та невизначеності в прийнятті рішень, сучасні проблеми комбінаторики.

Збірник розрахований на фахівців з кібернетики, інформатики та системних наук.

УДК 519.7+519.8
ББК 22.18

Матеріали друкуються в авторській редакції мовами оригіналів. За виклад, зміст і достовірність матеріалів відповідають автори.

ISBN 978-966-184-177-1

ЗМІСТ

М. М. Ковалев, М. К. Кравцов. – М. : Наука. Глав. редак. физ.-мат. литер., 1981. – 344 с.
3. Grunbaum B. Convexpolytopes / B. Grunbaum. – N.Y. : Wiley, 1967.
4. Ермольев Ю. М. Математические методы исследования операцій / Ю. М. Ермольев, И. И. Ляшко, В. С. Михалевич, В. И. Тюптя. – К. : Вища шк., 1979. – 312 с.

УДК 519.85

ДРУГИЙ ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОМБІНАТОРНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ З ОБМЕЖЕННЯМИ–ПЕРЕСТАВЛЕННЯМИ НА СТРАТЕГІЇ ОДНОГО ГРАВЦЯ

*О. О. **Ємець**, д.ф.-м.н., професор;*
*О. В. **Ольховська**, аспірантка*
ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»

Розглянемо комбінаторну ігрову задачу на переставленнях, змістовна постановка якої розглянута в [1, 2] – це одна ігрова задача промислового виробництва із двома гравцями. В [1] побудована її математична модель, необхідна далі. Для її формулювання введемо необхідні позначення. Нехай P_i^x – елемент мультимножини $P^x = \left(P_1^x, P_2^x, \ldots, P_M^x\right)$, що складається з M дійсних чисел, серед яких ν різних, і нехай $0 \le P_i^x \le 1$, $i \in J_M = \{1, 2, \ldots, M\}$, $\sum_{i=1}^{m} P_i^x = 1$. Тут і далі J_M – множина M перших натуральних чисел. Позначимо $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ – вектор-переставлення, елементи x_i належать P^x, $x_i \in P^x$, а сам вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E_{M\nu}\left(P^x\right)$ – множині $E_{M\nu}\left(P^x\right)$ – m-переставлень з елементів мультимножини P^x [3]. Очевидно, що $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$.

Гра полягає в тому, що перший гравець вибирає стратегію-вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E_{M\nu}\left(P^x\right)$, а другий вибирає стратегіючисло $j \in J_n$; і при цьому перший гравець платить другому платежі $a'_{1j}, \ldots, a'_{mj}$ з ймовірностями $x_1, \ldots, x_m$ відповідно, де a'_{ij} – задані дійсні числа $\forall i \in J_m$ $\forall$ $j \in J_n$.

Позначимо A' матрицю, з елементами a'_{ij}. Середній платіж (математичне сподівання) першого гравця другому (при виборі стратегії $X_i = (x_{1i}, \ldots, x_{mi}) \in E_{M\nu}(P^x)$, і стратегії $j \in J_n$ відповідно 1-м і 2-м гравцям, $i \in J_{m!}$) виражається функцією

$$F(X_i, j) = \sum_{t=1}^{m} a'_{tj} x_{it} . \tag{1}$$

Запишемо математичну модель цієї задачі [1].

Задача. Знайти стратегії гравців X^* і j^*, а саме:

$$X^* = arg \min_{X \in E_{M\nu}(P^x)} \left(\max_{j \in J_n} F(X, j) \right); \tag{2}$$

$$j^* = arg \max_{j \in J_n} \left(\min_{X \in E_{M\nu}(P^x)} F(X, j) \right), \tag{3}$$

де функція $F(X, j)$ має вигляд (1).

Існують комбінаторні ігрові задачі на переставленнях в яких виконується умова $\sum_{i=1}^{m} x_i^* > 1$, а також в яких виконується умова $\sum_{i=1}^{m} x_i^* < 1$.

Якщо

$$\min_{X \in E_M(P^x)} \left(\max_{j \in J_n} F(X, j) \right) = \max_{j \in J_n} \left(\min_{X \in E_M(P^x)} F(X, j) \right), \tag{4}$$

то X^* за (2), та j^* за (3) називаються оптимальними (чистими) стратегіями. Якщо (4) немає місце то будемо шукати мішані стратегії, тобто вектори P^* та Q^*.

Розглянемо алгоритм другого ітераційного методу за умови $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$.

Зручно обчислення оформлювати у вигляді таблиці. Перший стовпець N – це номер одного етапу розіграшу гри, на якому гравці по черзі роблять свої кроки (обирають по одному разу свої стратегії). Зауважимо, що використовується вихідна матриця A'.

Крок 1. Першу стратегію і перший гравець обираємо випадковим чином з множини переставлень $E_{M\nu}\left(P^x\right)$.

Записуємо її покоординатно в стовпець X таблиці. (Тут і далі курсивом викладено дії алгоритму в табличній формі).

Крок 2. Обчислюємо скалярні добутки векторів стратегій другого гравця на вектор обраної стратегії першого гравця.

В таблиці це зручно оформлювати, ввівши стопці: B'_j, *де* $B'_j\left(\forall j \in J_n\right)$ *вектор стратегії* j *другого гравця з матриці* A; B'_jX *– вектор, що складається з поелементних добутків* X *та* B'_j, $j \in J_n$. *Ці вектори (*X, B'_j, B'_jX*) займають* n *рядків таблиці. В наступному рядку* sum *в стовпцях* B'_jX *записуємо скалярні добутки векторів* B'_j *та* X *(як сума елементів стовпця* B'_jX *таблиці).*

Крок 3. Знаходимо SUM_L – накопичені суми скалярних добутків (в рядку лівої частині таблиці).

В наступному рядку SUM_L *таблиці записуємо суму значень елементів рядка* sum *та рядка* SUM_L *з попереднього* (($N-1$)*-го) етапу. Перший раз (коли* $N=1$*) рядок* SUM_L *збігається з рядком* sum *цього етапу.*

Крок 4. Обираємо стратегію другого гравця за критерієм отримання максимального виграшу (стратегію з максимальною накопиченою сумою), знаходячи $N\overline{\nu}$.

Обираємо максимальне значення з рядка SUM_L, його записуємо в цьому ж рядку в стовпці $N\overline{v}$. Стратегія B_j, якій відповідає знайдене максимальне значення з рядку SUM_L, є стратегією другого гравця при наступному виборі. У стовпець j таблиці записується номер стратегії B_j, якій відповідає максимальне значення з рядка SUM_L. Вибраний стовпець B_j покоординатно заносимо в рядок у відповідні стовпці A_i'.

Крок 5. Стратегія $NextX$ (права частина таблиці) першого гравця обирається з умови отримання ним мінімального сумарного за N етапів платежу (програшу), тобто розв'язок задачі мінімізації цільової функції на множині переставлень [3]. Практично це означає впорядкування елементів вектора P^x, тобто найбільшому значенню зі стовпця A_i' рядка стратегії j-відповідне найменше значення з вектора P^x. Обрана стратегія записується в рядок $NextX$ правої частини таблиці та стовпець X лівої частини таблиці.

Крок 6. Розраховуємо значення стовпця sum правої частини таблиця, як скалярний добуток рядка j (стовпців A_i') на обрану стратегію $Next\,X$.

Отримане значення записуємо в стовпець sum.

Крок 7. Обчислюємо значення стовпця накопиченої суми SUM_R (в правій частині таблиці).

На першому етапі (коли $N=1$) значення стовпця SUM_R правої частини таблиці збігається з значенням стовпця sum правої частини таблиці. На наступних етапах в стовпцю SUM_R правої частини таблиці записуємо суму значень елементів стовпця SUM_R з попереднього $((N-1)$-го) етапу та стовпця sum на N-му етапі.

Крок 8. Обчислюємо значення $\underline{v} = \dfrac{SUM\_R}{N}$.

Знайдений результат заносимо в стовпець $\underline{v}$.

Крок 9. Обчислюємо $v^* = \frac{\underline{v} + \overline{v}}{2}$.

Знайдений результат заносимо в стовпець v^*.

Крок 10. Перевіряємо критерій завершення роботи алгоритму: мінімальне зі знайдених значень $\overline{v}$ (позначка $min\overline{v}$) дорівнює максимальному зі знайдених значень $\underline{v}$ (позначка $max\underline{v}$): $min\overline{v} = max\underline{v}$. Якщо цей критерій виконується, то роботу алгоритму завершено. За ціну гри приймають $v^* = \underline{v} = \overline{v}$. Інакше переходимо на крок 2 алгоритму, обравши за стратегію першого гравця стратегію $Next\,X$.

Роботу алгоритму також можна завершити, якщо проведена задана кількість ітерацій, або коли осягнена задана точність $\Delta = |min\overline{v} - max\underline{v}| \le \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – задана величина або при $\delta = \frac{\Delta}{\frac{1}{2}(min\overline{v} + max\underline{v})} \le \varepsilon$. При цьому за ціну гри приймаємо значення $v^* = \frac{1}{2}(min\overline{v} + max\underline{v})$.

За оптимальну стратегією першого гравця X^* приймаємо вектор частот застосувань стратегій-переставлень.

Оптимальною стратегією другого гравця j^* є мішана стратегія-вектор, що складається з частот застосування чистих стратегій другого гравця.

Тобто цей метод є модифікацією методу з [4], в кроках 5–8 алгоритму.

На основі програмної реалізації методу, проведено числовий експеримент з метою виявлення залежності часу обчислень від вимірності задачі. Результати експерименту занесені в таблицю 1 (в табл. 1 позначено: t – загальний час серії, $t_{сер}$ – середній час задачі в секундах (с) або мілісекундах (мс), $t_{іт}$ – середній час ітерації в мілісекундах (мс), $\Delta = min\overline{v} - max\underline{v}$,

$\delta = \dfrac{\Delta}{\frac{1}{2}\left(\left|min\,\overline{v}\right| + \left|max\,\underline{v}\right|\right)}$, δ_{min} – **мінімальне δ в серії обчислень,** δ_{max} – максимальне δ в серії обчислень).

Розв'язано по 100 задач вимірності $m \times n$, причому $m = n$. Елементи a_{ij} матриці генерувалися як рівномірно розподілені цілі числа в інтервалі $[a,b]$ вказаному в стовпці інтервалів табл. 1. Елементи мультимножин P^x генерувалися за рівномірним розподілом. Максимальна кількість ітерації 1 000. Вимірність задач задавалась в інтервалі від 10 до 700. В кожній серії проведено 100 000 ітерацій.

Із використанням пакету CurveExpert Professional 1.5 [5] побудовано регресійну залежність часу обчислень від вимірності задачі та величини δ від вимірності задачі для кожного з експериментів. Для першої серії експериментів залежності часу обчислень від вимірності задачі аналітична функція має вигляд $T(m) = 95{,}37 - 0{,}043m + 0{,}0035m^2$, коефіцієнт кореляції $r = 0{,}99$. Аналітична функція залежності величини δ від вимірності задачі має вигляд $\delta(m) = 0{,}399 \cdot 0{,}000027^{\frac{1}{m}}$; коефіцієнт кореляції $r = 0{,}97$.

Розглянуто задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями-переставленнями, що накладаються на стратегії одного гравця при умові $\sum_{i=1}^{m} P_i^x = 1$. Запропонований модифікований ітераційний метод для їх розв'язування. Проведені чисельні експерименти для задачі з умовою $\sum_{i=1}^{m} P_i^x = 1$, що показують збіжність методу.

Таблиця 1

Результати першої серії експериментів

№	$m = n$	$[a,b]$	t	$t_{сер}$	t_{im} (мс)	Δ середнє	δ_{min}	δ_{max}	δ середнє
1	10	[1,200]	1 хв, 25 с	854 мс	1	16,6	0,000176	0,496	0,17
2	20	[1,400]	1 хв, 28 с	888 мс	1	44,5	0,0127	0,43	0,231
3	30	[1,600]	1 хв, 32 с	925 мс	1	82,2	0,123	0,456	0,292
4	40	[1,800]	1 хв, 36 с	963 мс	1	110	0,102	0,49	0,294
5	50	[1,1000]	1 хв, 39 с	998 мс	1	143	0,148	0,494	0,307
6	60	[1,1200]	1 хв, 48 с	1 с, 80 мс	1	177	0,143	0,504	0,321
7	70	[1,1400]	1 хв, 54 с	1 с, 147 мс	1	208	0,184	0,465	0,323
8	80	[1,1600]	1 хв, 55 с	1 с, 140 мс	1	246	0,166	0,464	0,338
9	90	[1,1800]	2 хв, 8 с	1 с, 284 мс	1	280	0,207	0,47	0,345
10	100	[1,2000]	2 хв, 13 с	1 с, 331 мс	1	309	0,202	0,461	0,343
11	200	[1,4000]	4 хв, 3 с	1 с, 433 мс	2	669	0,29	0,458	0,38
12	300	[1,6000]	7 хв, 30 с	4 с, 507 мс	5	1030	0,321	0,461	0,394
13	400	[1,8000]	10 хв, 32 с	6 с, 322мс	6	1380	0,343	0,469	0,399
14	500	[1,10000]	15 хв, 8 с	9 с, 86 мс	9	1730	0,335	0,456	0,403
15	600	[1,12000]	23 хв, 7 с	13 с, 872 мс	14	2100	0,35	0,457	0,41
16	700	[1,14000]	30 хв, 34 с	18 с, 348 мс	18	2480	0,372	0,453	0,415

Література

1. Емец О. А. Исследование математических моделей и методов решения задач на перестановках игрового типа / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян // Кибернетика и сист. анализ. – 2007. – № 6. – С. 103–114.
2. Емец О. А. Решение некоторых задач комбинаторной оптимизации на размещениях и перестановках игрового типа / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян // Проблемы управления и информатики. – 2006. – № 3. – С. 37–47.
3. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К. : Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.
4. Ємець О. О. Один ітераційний метод розв'язування ігрових задач на переставленнях / О. О. Ємець, Н. Ю. Устьян // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008. – № 3. – С. 5–10.
5. CurveExpert Software / Daniel G. Hyams. – 2011. – Режим доступу : http://www.curveexpert.net/. – Дата доступу: квітень 2011. – Назва з екрана.

УДК 519

КОМБІНАТОРНІ ПРЕДФРАКТАЛИ ЯК СЛОВА НАД ЗАДАНИМ АЛФАВІТОМ ТА ДЕЯКІ ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

***О. О. Ємець**, д.ф.-м.н., професор;*
***О. В. Тур**, асистент*
ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»

Задачі дослідження комбінаторних фракталів [1–6] на основі розміщення [6–9] може розглядатися як аналіз модифікації слова над деяким алфавітом.

Нехай є A – алфавіт $\left\{a_1, \ldots, a_{\gamma_A}\right\}$, з якого формують слова над алфавітом A.

Серед слів виокремлюють такі:

X – акцептант – слово, яке змінюється;

Y – акцепт – слово, яке вставляється в акцептант X, для зміни останнього;

Ψ – акцептор – це частина слова – акцептанта X, яка замінюється на акцепт Y;